Большинство задач взяты из книги Fabian'а и др.

1. Доказать обобщение теоремы Бишопа – Фелпса: пусть X — банахово пространство, $C \subset X$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество, тогда множество функционалов, достигающих максимума на C, плотно в X^*. **Указание.** Доказывается аналогично теореме Бишопа – Фелпса. Можно считать, что $0 \in C$ и что существует $\hat{x} \in C$ такое, что $g(\hat{x}) > 0$ (g — функционал, который хотим приблизить). В качесте φ берется $P_C^2(x) - g(x)$, p_C — функционал Минковского множества C.

2. Доказать, что если X — бесконечномерное банахово пространство, то слабая топологоия на X и $*$-слабая топология на X^* не метризуема.

3. Доказать, что если X — бесконечномерное банахово пространство, то единичная сфера плотна в единичном шаре относительно слабой топологии.

4. Доказать, что единичный шар в $C[0,\,1]$ со слабой топологией не метризуем.

5. Доказать, что единичный шар в $l_\infty(\mathbb{R})$ является $*$-слабо компактным, но не секвенциально $*$-слабо компактным.

6. Доказать, что множество функций из единичного шара в $l_\infty(\mathbb{R})$, имеющих не более, чем счетный носитель, является $*$-слабо секвенциально компактным, но не $*$-слабо компактным.

7. Пусть $X = C[0,\,1]$, $M = B_{X^*}$, $B = \{\pm\delta_t : t \in [0,\,1]\} \subset M$, где $\delta_t(x) = x(t)$. Доказать, что B — граница Джеймса для M, но $M \neq \overline{\operatorname{conv}}\, B$.

8. Доказать, что норма на $L_\infty[0,\,1]$ нигде не дифференцируема по Гато.

9. Доказать, что норма в l_∞ дифференцируема по Гато на открытом плотном множестве. Пусть $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l_\infty$, $p(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} |x_n|$, $|||x||| = \|x\|_{l_\infty} + p(x)$. Показать, что это эквивалентная норма на l_∞, нигде не дифференцируемая по Гато.

10. Пусть X строго выпукло. Показать, что для любого выпуклого множества $M \subset X$ и для любого $x \in X$ множество
$$P_M(x) = \{y \in M : \|x - y\| = \operatorname{dist}(x,\,M)\}$$
состоит не более, чем из 1 элемента.

11. Пусть $X = c_0$, $X^* = l_1$. На X^* введем эквивалентную норму $|||x||| = \|x\|_{l_1} + \|x\|_{l_2}$. Показать, что эта норма строго выпукла, но не локально равномерно выпукла. Она порождает норму на c_0, которая дифференцируема по Фреше. **Указание.** Новая норма на c_0 будет дифференцируема по Гато, а на единичной сфере в $(X^*,\,|||\cdot|||)$ сильная и $*$-слабая топологии совпадают.

12. Пусть нормы на X и на X^* дифференцируемы по Фреше. Тогда нормы на X и на X^* локально равномерно выпуклы.

13. Пусть $X = l_2$, $C = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in B_X : x_n \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}\}$. Показать, что 0 — выставленная, но не сильно выставленная точка.

14. Показать, что стандартные базисные векторы e_n в l_1 являются сильно выставленными точками для единичного шара.

15. Показать, что единичный шар в c_0 и $L_1[0,\,1]$ не имеет крайних точек. Найти все крайние точки единичного шара в $C[0,\,1]$. Описать все выставленные и сильно выставленные точки единичного шара в l_∞.

16. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $B_X = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leqslant 4,\ (x+1)^2 + y^2 \leqslant 4\}$. Показать, что множество сильно выставленных точек B_{X^*} не образует границу Джеймса для B_{X^*}.

17. С помощью формулы двойственности найти оценку сверху для модуля гладкости пространств L_p, $1 < p < \infty$.

18. Показать, что $C[0, 1]$ имеет базис, состоящий из полиномов.

19. Показать, что существует нерефлексивное банахово пространство, изометрически изоморфное своему первому сопряженному.