

Лекция 11. Вязкопластические среды: качественное описание решений.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область. Рассматриваем задачу

$$J(u) := J_D(u) := \mu \int_D |\nabla u|^2 dx + \tau \int_D |\nabla u| dx - c \int_D u dx \rightarrow \inf, \quad u \in \dot{W}_2^1(D). \quad (1)$$

Из теоремы вложения Соболева следует, что $u \in L_q(D)$ при $\frac{1}{2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} > 0$, то есть для $q < \infty$. П.П. Мосолов и В.П. Мясников [1] показали, что решение задачи (1) непрерывно (их доказательство будет приведено в этой лекции). Позже их результат был усилен Х. Брезисом [2], который доказал, что решение принадлежит пространству $W_2^2(D)$.¹

В работе [1] также доказано существование ядер течения, то есть замкнутых множеств с непустой внутренностью, в которых значение скорости u постоянно и является локальным максимумом. Внутри ядер течения среда движется, как твердое тело.

Пусть $v \in C(D)$, E — непустое замкнутое связное множество, $E \subset D$. Назовем E множеством строгого локального минимума (максимума) функции v , если $v|_E \equiv c_E$ и найдется открытое множество $U \supset E$ такое, что для любого $x \in U \setminus E$ выполнено $v(x) > c_E$ (соответственно $v(x) < c_E$).

Теорема 1. Пусть μ, τ, c — положительные константы, $D \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная p -связная область. Тогда решение задачи (1) является неотрицательной непрерывной функцией. При этом, \hat{u} не имеет множеств строгих локальных минимумов. Если $E \subset D$ — множество строгого локального максимума функции \hat{u} , то оно содержит круг радиуса $\frac{\tau}{8pc}$.

Доказательство. Скажем, что $v \in \widehat{W}$, если существует открытое множество $\tilde{D} \subset D$ такое, что $\partial \tilde{D} \subset D$ — конечное объединение ломаных, $v|_{D \setminus \tilde{D}} = 0$ и существует разбиение \tilde{D} на треугольники Δ_i ($1 \leq i \leq i_0$) такое, что для любого $i \in \{1, \dots, i_0\}$ функция $v|_{\Delta_i}$ является аффинной.² Это множество плотно в $\dot{W}_2^1(D)$.

Пусть \hat{u} — решение задачи (1), $\{v_n\} \subset \dot{W}_2^1(D)$. Поскольку функционал J является непрерывным и сильно выпуклым, то $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \hat{u}$ в пространстве $\dot{W}_2^1(D)$ тогда и только тогда, когда $J(v_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} J(\hat{u})$ (см. лекцию про близость реологических моделей, предложение 2).

Докажем, что $\hat{u} \geq 0$ п.в. Пусть $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \hat{u}$, $\tilde{v}_n(x) = \max\{v_n(x), 0\}$. Нетрудно видеть, что $J(\tilde{v}_n) \leq J(v_n)$, поэтому $\tilde{v}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \hat{u}$. Остается заметить, что существует подпоследовательность, сходящаяся к \hat{u} п.в.

¹Т.е. пространству функций, у которых все обобщенные частные производные второго порядка принадлежат $L_2(D)$.

²Это почти то же, что и \tilde{W} из доказательства теоремы о предельной нагрузке, только функция v может быть постоянной в некоторых треугольниках, содержащихся в \tilde{D} .

Теперь перейдем к доказательству непрерывности \hat{u} .

Шаг 1. Пусть $v \in \widehat{W}$, $\tilde{D} = \text{supp } v$, $r > 0$. Положим

$$D_{r,v} = \{x \in \tilde{D} : v(x) < r\}$$

и обозначим $D_{r,v}^i$, $1 \leq i \leq m(r)$, связные компоненты $D_{r,v}$, $\overline{D_{r,v}^i}$ — их замыкания.

Утверждение. Если $\overline{D_{r,v}^i} \cap \partial \tilde{D} \neq \emptyset$ для любого $i = 1, \dots, m(r)$, то существует такое $\delta > 0$, что для любого $\tilde{r} \in (r - \delta, r)$ выполнено $m(\tilde{r}) = m(r)$ и $\overline{D_{\tilde{r},v}^i} \cap \partial \tilde{D} \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, m(r)$.

В самом деле, поскольку $D_{\tilde{r},v} \subset D_{r,v}$ при $\tilde{r} < r$, то $m(r) \leq m(\tilde{r})$. Поэтому найдутся такие $m \geq m(r)$ и $\delta > 0$, что для любого $\tilde{r} \in (r - \delta, r)$ выполнено $m(\tilde{r}) = m$. Пусть $m > m(r)$. Тогда найдется $i = 1, \dots, m(r)$ такое, что $A := D_{\tilde{r},v}^i$ содержит не менее двух связных компонент множества $D_{\tilde{r},v}$ (обозначим их $A_{\tilde{r}}^1, \dots, A_{\tilde{r}}^k$). Тогда

$$A = \bigcup_{j=1}^k (\bigcup_{\tilde{r} < r} A_{\tilde{r}}^j)$$

является объединением $k \geq 2$ открытых непустых непересекающихся множеств — противоречие. Пусть $\delta > 0$ таково, что $m(\tilde{r}) = m(r)$ при $\tilde{r} \in (r - \delta, r)$, $D_{\tilde{r},v}^i \subset D_{r,v}^i$. Пусть $\hat{x} \in \overline{D_{r,v}^i} \cap \partial \tilde{D}$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{x}$, $x_n \in D_{r,v}^i$. Так как $v(\hat{x}) = 0$, то при достаточно больших n выполнено $v(x_n) < r - \delta$ и $x_n \in D_{\tilde{r},v}^i$. Значит, $\hat{x} \in \overline{D_{\tilde{r},v}^i} \cap \partial \tilde{D}$. Утверждение доказано.

Определим отображение $\varphi : \widehat{W} \rightarrow \widehat{W}$ следующим образом. Обозначим \mathcal{R}_v множество $r > 0$ таких, что $D_{r,v}$ содержит связную компоненту, замыкание которой не пересекается с $\partial \tilde{D}$. Если $\mathcal{R}_v = \emptyset$, то положим $\varphi(v) = v$. Пусть $\mathcal{R}_v \neq \emptyset$. В силу утверждения, \mathcal{R}_v содержит максимальный элемент $\hat{r}(v)$. Пусть G_1, \dots, G_l — связные компоненты $D_{\hat{r}(v),v}$, граница которых не пересекается с \tilde{D} . Положим

$$\varphi(v)(x) = \begin{cases} v(x), & \text{если } x \notin \bigcup_{j=1}^l G_j, \\ \hat{r}(v), & \text{если } x \in \bigcup_{j=1}^l G_j. \end{cases}$$

Тогда $\varphi(v) \in \widehat{W}$, $J(\varphi(v)) \leq J(v)$ и $\hat{r}(\varphi(v)) < \hat{r}(v)$. Заметим также, что ∂G_j содержит вершину некоторого треугольника Δ_i ³ (иначе $\hat{r}(v)$ — не максимум \mathcal{R}_v). Отсюда следует, что найдется такое $n(v) \in \mathbb{N}$, что $\varphi^{n(v)+1}(v) = \varphi^{n(v)}(v)$.

Положим $\psi(v) = \varphi^{n(v)}(v)$. Тогда $\mathcal{R}_{\psi(v)} = \emptyset$.

Шаг 2 (“затягивание локальных минимумов”). Пусть $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{u}$. Положим $\tilde{u}_n = \psi(u_n)$. Тогда $\tilde{u}_n \in \widehat{W}$, $J(\tilde{u}_n) \leq J(u_n)$ и $\mathcal{R}_{\tilde{u}_n} = \emptyset$. В частности, \tilde{u}_n не имеет множеств строгого локального минимума.

Шаг 3. Обозначим

$$\mathcal{F}_{\tau,p,c} = \{E \subset D : E \text{ не содержит кругов радиуса } \tau/8pc\}.$$

Пусть $v \in \widehat{W}$, $\mathcal{R}_v = \emptyset$. Для каждого $s > 0$ положим

$$\mathcal{E}_s^v = \{E \subset D : E \text{ — множество строгого локального максимума функции } v, \ v|_E = s\}$$

(напомним, что по определению множества строгого локального максимума непустые, замкнутые и связные),

$$S_v = \{s > 0 : \mathcal{E}_s^v \cap \mathcal{F}_{\tau,p,c} \neq \emptyset\}.$$

³См. определение класса \widehat{W} .

Так как $v \in \widehat{W}$, то $\text{card} \{s > 0 : \mathcal{E}_s^v \neq \emptyset\} < \infty$, так что S_v конечно. Пусть $\hat{s}_v = \max S_v$, $\mathcal{E}_{\hat{s}_v}^v = \{E_1, \dots, E_k\}$.

Пусть $s > 0$, $U_{s,v} = \{x \in D : v(x) > s\}$. Для $s \in (0, \hat{s}_v)$, $j = 1, \dots, k$ обозначим $U_{j,s,v}$ связную компоненту $U_{s,v}$, содержащую E_j . Заметим, что если s достаточно близко к \hat{s}_v , то в $U_{j,s,v}$ нельзя вписать круг радиуса $\frac{\tau}{8pc}$ (иначе берем последовательность таких кругов, у которых центры сходятся к некоторой точке, и пользуемся тем, что $E_j = \bigcap_{s \in (0, \hat{s}_v)} U_{j,s,v}$). Положим

$$s_j = \inf \{s < \hat{s}_v : U_{j,s,v} \text{ не содержит круг радиуса } \tau/8pc\},$$

$$\tilde{\varphi}(v)(x) = \begin{cases} v(x), & x \notin \bigcup_{j=1}^k U_{j,s_j,v}, \\ s_j, & x \in U_{j,s_j,v}. \end{cases}$$

Заметим, что $\tilde{\varphi}(v) \in \widehat{W}$, $\mathcal{R}_{\tilde{\varphi}(v)} = \emptyset$, $\hat{s}_{\tilde{\varphi}(v)} < \hat{s}_v$. Каждая связная компонента множества $\bigcup_{j=1}^k \overline{U}_{j,s_j,v}$ содержит круг радиуса $\frac{\tau}{8pc}$ или не является множеством строгого локального максимума функции $\tilde{\varphi}(v)$. Поэтому

$$\text{card } S_{\tilde{\varphi}(v)} < \text{card } S_v. \quad (2)$$

Покажем, что $J(\tilde{\varphi}(v)) \leq J(v)$. Для этого докажем следующее утверждение: если $w \in \widehat{W}$, $\mathcal{R}_w = \emptyset$, U — связная компонента $U_{s,w}$, не содержащая круг радиуса $\frac{\tau}{8pc}$,

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} w(x), & x \notin U, \\ s, & x \in U, \end{cases}$$

то $J(\tilde{w}) \leq J(w)$. В самом деле, положим $h(x) = w(x) - s$, $x \in U$, и покажем, что

$$\mu \int_U |\nabla h|^2 dx + \tau \int_U |\nabla h| dx - c \int_U h dx \geq 0.$$

Это верно, если $c \leq \tau \inf_{\tilde{U} \subset U} \frac{|\partial \tilde{U}|}{|\tilde{U}|}$. На прошлой лекции было показано, что $\inf_{\tilde{U} \subset U} \frac{|\partial \tilde{U}|}{|\tilde{U}|} \geq \frac{1}{8pd}$, где \tilde{d} — радиус круга, вписанного в U . Поэтому достаточно выполнения неравенства $c \leq \frac{\tau}{8pd}$, то есть $\tilde{d} \leq \frac{\tau}{8pc}$.

Из (2) следует, что найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\tilde{\varphi}^n(v) = \tilde{\varphi}^{n+1}(v)$. Положим $\tilde{\psi}(v) = \tilde{\varphi}^n(v)$. Тогда $J(\tilde{\psi}(v)) \leq J(v)$.

Шаг 4 (“срезка локальных максимумов”). Пусть \tilde{u}_n — последовательность, полученная на шаге 2. Положим $\hat{u}_n = \tilde{\psi}(\tilde{u}_n)$. Тогда $J(\hat{u}_n) \leq J(\tilde{u}_n)$ и поэтому $\hat{u}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{u}$ в $\dot{W}_2^1(D)$. При этом, \hat{u}_n не имеет множеств строгого локального минимума, а любое множество строгого локального максимума содержит круг радиуса $\frac{\tau}{8pc}$.

Шаг 5. Покажем, что множество $\{\hat{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ предкомпактно в $C(D)$. Достаточно проверить, что оно равномерно непрерывно (равномерная ограниченность тогда следует из условия $\hat{u}_n|_{\partial D} = 0$). Продолжим \hat{u}_n нулем на $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\rho < \frac{\tau}{32pc}$, $B_\rho, B_{2\rho}$ — замкнутые концентрические круги радиуса ρ и 2ρ соответственно, $x_1, x_2 \in B_\rho$, $\hat{u}_n(x_1) = \max_{B_\rho} \hat{u}_n$, $\hat{u}_n(x_2) = \min_{B_\rho} \hat{u}_n$. Оценим $\hat{u}_n(x_1) - \hat{u}_n(x_2)$. Будем считать, что эта величина положительна.

Обозначим через A_j связную компоненту множества $\{x \in D : \hat{u}_n(x) = \hat{u}_n(x_j)\}$, содержащую x_j . Покажем, что $A_j \cap (\partial B_{2\rho}) \neq \emptyset$. Предположим обратное. Пусть K_1, \dots, K_m — связные компоненты множества $B_{2\rho} \setminus A_j$, при этом $K_1 \supset \partial B_{2\rho}$. Если $m \geq 2$, то обозначим

$$K_2^+ = \{x \in K_2 : \hat{u}_n(x) > \hat{u}_n(x_j)\}, \quad K_2^- = \{x \in K_2 : \hat{u}_n(x) < \hat{u}_n(x_j)\}.$$

Хотя бы одно из этих множеств непусто. Если $K_2^+ \neq \emptyset$, то каждая связная компонента множества $\{x \in K_2^+ : u(x) = \max_{K_2^+} u\}$ является множеством строгого локального максимума, не содержащим круг радиуса $\frac{\tau}{8\rho c}$. Если $K_2^- \neq \emptyset$, то каждая связная компонента множества $\{x \in K_2^- : u(x) = \min_{K_2^-} u\}$ является множеством строгого локального минимума. В обоих случаях получаем противоречие. Значит, $m = 1$. Но тогда A_1 является множеством строгого локального максимума, в которое нельзя вписать шар радиуса $\frac{\tau}{8\rho c}$, а A_2 является множеством строгого локального минимума. Снова получается противоречие.

Итак, $A_j \cap (\partial B_{2\rho}) \neq \emptyset$. Выберем начало координат в центре шара B_ρ и введем полярные координаты (r, θ) , $x = x(r, \theta)$. Так как $\hat{u}_n \in \widehat{W}$, то можно выбрать кусочно-непрерывные функции $\theta_j : [\rho, 2\rho] \rightarrow [0, 2\pi)$, $j = 1, 2$, такие, что $\hat{u}_n(x(r, \theta_j(r))) = \hat{u}_n(x_j)$. Тогда для $r \in [\rho, 2\rho]$

$$\hat{u}_n(x_1) - \hat{u}_n(x_2) = \pm \int_{\theta_2(r)}^{\theta_1(r)} (\hat{u}_n)'_\theta d\theta,$$

откуда

$$\begin{aligned} 0 \leq \hat{u}_n(x_1) - \hat{u}_n(x_2) &\leq \frac{1}{\rho} \int_\rho^{2\rho} dr \int_0^{2\pi} |(\hat{u}_n)'_\theta| d\theta \leq \frac{1}{\rho} \int_\rho^{2\rho} r dr \int_0^{2\pi} |\nabla \hat{u}_n| d\theta = \\ &= \frac{1}{\rho} \int_{B_{2\rho}} |\nabla u_n| dx \leq \frac{1}{\rho} |B_{2\rho}|^{1/2} \left(\int_{B_{2\rho}} |\nabla \hat{u}_n|^2 dx \right)^{1/2} = 2\sqrt{\pi} \left(\int_{B_{2\rho}} |\nabla \hat{u}_n|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как $\nabla \hat{u}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nabla \hat{u}$ в $L_2(D)$, то в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\rho \in (0, \tau/32\rho c)$ и $N \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geq N$ и любого шара $B_{2\delta}$ выполнено $2\sqrt{\pi} \left(\int_{B_{2\rho}} |\nabla \hat{u}_n|^2 dx \right)^{1/2} < \varepsilon$. Взяв $\rho > 0$ достаточно малым, можно считать, что то же неравенство выполнено и для $n < N$.

Итак, предкомпактность $\{\hat{u}_n\}$ доказана. Выбираем сходящуюся подпоследовательность. Ее предел совпадает с \hat{u} (по теореме вложения, \hat{u}_n сходится к \hat{u} в $L_2(D)$). Отсюда следует, что \hat{u} непрерывна, не имеет множеств строгого локального минимума и любое множество строгого локального максимума содержит круг радиуса $\tau/8\rho c$. \square

В [1] также доказано, что при уменьшении области значения $\hat{u}(x)$ не увеличиваются.

Теорема 2. (принцип мажоризации). Пусть D_1 — ограниченная область с липшицевой границей, $\psi : \partial D_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ — липшицева функция, $D_2 \subset D_1$ — область. Пусть \hat{u}_1 — решение задачи

$$J_{D_1}(u) \rightarrow \min, \quad u \in W_2^1(D_1), \quad u|_{\partial D_1} = \psi,$$

\hat{u}_2 — решение задачи

$$J_{D_2}(u) \rightarrow \min, \quad u \in \mathring{W}_2^1(D_2).$$

Тогда $u_1(x) \geq u_2(x)$, $x \in D_2$.

Доказательство. Предположим обратное: $\tilde{D} = \{x \in D_2 : \hat{u}_2(x) > \hat{u}_1(x)\} \neq \emptyset$. Продолжим \hat{u}_2 нулем вне D_2 . Пусть $J_{\tilde{D}}(\hat{u}_2) \geq J_{\tilde{D}}(\hat{u}_1)$. Положим $\tilde{u} = \max\{\hat{u}_1, \hat{u}_2\}$. Тогда

$$J_{D_1}(\tilde{u}) = J_{D_1 \setminus \tilde{D}}(\hat{u}_1) + J_{\tilde{D}}(\hat{u}_2) \geq J_{D_1 \setminus \tilde{D}}(\hat{u}_1) + J_{\tilde{D}}(\hat{u}_1) = J_{D_1}(\hat{u}_1).$$

Значит, $\tilde{u} \neq \hat{u}_1$ является точкой минимума функционала J_{D_1} , что противоречит его строгой выпуклости. Если $J_{\tilde{D}}(\hat{u}_2) \leq J_{\tilde{D}}(\hat{u}_1)$, то положим $\tilde{u} = \min\{\hat{u}_1, \hat{u}_2\}$. Тогда

$$J_{D_2}(\tilde{u}) = J_{D_2 \setminus \tilde{D}}(\hat{u}_2) + J_{\tilde{D}}(\hat{u}_1) \geq J_{D_2 \setminus \tilde{D}}(\hat{u}_2) + J_{\tilde{D}}(\hat{u}_2) = J_{D_2}(\hat{u}_2).$$

Получаем противоречие со строгой выпуклостью функционала J_{D_2} . \square

С помощью принципа мажоризации будет доказано существование застойных зон для некоторого класса областей (в частности, для выпуклых областей, имеющих угловую точку).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П.П. Мосолов, В.П. Мясников, “Вариационные методы в теории течений вязко-пластической среды” *Прикладная математика и механика*, **29**:3 (1965), 468–492.
- [2] Н. Brezis, “Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations”. В: *Contribution to Non-Linear Functional Analysis*. E. Zarantonello, Ed., Acad. Press (1971), 101–156.