



Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет
Кафедра Общих Проблем Управления

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Оптимальное управление в одной конечномерной задаче
Хеле-Шоу

Выполнила: студентка 532 группы
М.Г. Ефименко

Научный руководитель:
Л.В. Локуцкий

Москва - 2014

Содержание

1	Введение	2
2	Построение модели	3
2.1	Об уравнении Полубариновой-Галина.	4
2.2	Кардиоид Полубариновой-Галина	5
3	Комплексные моменты	6
3.1	Контрпример различных областей с одинаковой последовательностью моментов Ричардсона	7
4	О полиномиальных решениях	9
5	Оптимальное управление	10
5.1	Оптимальный синтез	11
6	Заключение	14

1 Введение

Работа, опубликованная в начале 20 века, в которой Хеле-Шоу (1854-1941) впервые описал свою одноименную ячейку, стала основой для многочисленных исследований более 50 лет спустя. Классическую задачу можно описать следующим образом. Между двумя пластинами, находящимися на незначительном расстоянии h друг от друга, находится пятно ньютоновской жидкости. В начальный момент времени пятно представляет собой односвязную область $\Omega(0)$ с гладкой границей. Далее, точно такая же жидкость закачивается или выкачивается через источник или сток соответственно, что приводит к увеличению или уменьшению пятна жидкости в размерах. Основная задача состоит в том, чтобы определить, как это пятно $\Omega(t)$ будет эволюционировать с течением времени.

Математические модели данной задачи находят свое применение в различных областях, таких как нефтяная промышленность, производство пластмасс и многих других. Метод, используемый в данной работе, впервые был разработан П.Я. Полубариновой-Кочиной и Л.А. Галиным [3, 5, 6]. Основная идея метода состоит в нахождении отображения единичного круга из вспомогательной комплексной плоскости на область, занимаемую жидкостью. Если данное отображение полиномиальное, то известно, что полностью выкачать жидкость будет невозможно. Это связано с образованием особенности на границе до того момента времени, когда граница достигнет стока.

В данной работе рассматривается модифицированная модель Хеле-Шоу. Отличительная особенность этой модели состоит в том, что вместо одного стока имеется мультиполе, а именно несколько источников и стоков, работающих с одинаковой скоростью и находящихся друг от друга на расстоянии, стремящимся к нулю. Также в работе широко применяются инструменты теории оптимального управления, которые позволят нам показать, что в такой модели даже при полиномиальном отображении в большинстве случаев мы можем выкачать жидкость полностью, первоначально превратив наше пятно в круг.

2 Построение модели

Пусть $\Omega(t)$ —односвязная область с гладкой границей $\partial\Omega(t)$ в \mathbb{R}^2 в плоскости (z) , занимаемая вязкой жидкостью в момент времени t . Мы будем рассматривать процесс выкачивания и закачивания жидкости через сток и источник соответственно, которые находятся в начале координат (рис. 1).

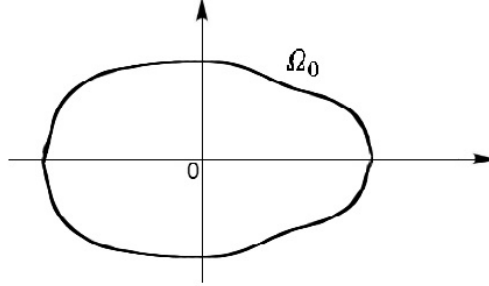


Рис. 1

Предположим, что источник/сток работает с постоянной скоростью Q , которая положительна ($Q > 0$) в случае выкачивания и отрицательна ($Q < 0$) в случае закачивания жидкости. Безразмерное давление p нормировано так, что 0 соответствует атмосферному давлению. В начальный момент времени $t = 0$ имеется область $\Omega(0) = \Omega_0$ с границей $\partial\Omega_0$. Потенциальная функция p является гармонической в области $\Omega(t) \setminus \{0\}$, гладко продолжается на границу и удовлетворяет системе Стокса-Лебенсона (см. [4]):

$$\begin{cases} \Delta p = Q\delta_0(z) & \text{на } \Omega(t) \\ p(z, t) = 0 & \text{на } \partial\Omega(t) \end{cases} \quad (1)$$

где $\delta_0(z)$ есть дельта-функция Дирака в нуле. Более того, мы предполагаем, что выполнено кинематическое граничное условие:

$$-\frac{\partial p}{\partial n} = v_n \text{ на } \partial\Omega(t),$$

где $\frac{\partial p}{\partial n} = n \cdot \nabla p$ обозначает производную по направлению внешней нормали $n(t)$ к границе $\partial\Omega(t)$. Поскольку скорость частиц есть ∇p , а $p|_{\partial\Omega(t)} = 0$, то на границе $\partial\Omega(t)$ частицы всегда движутся перпендикулярно ей. v_n —нормальная составляющая скорости по направлению $n(t)$:

$$v_n = V|_{\partial\Omega(t)} \cdot n(t).$$

2.1 Об уравнении Полубариновой-Галина.

Галин [3] и Полубаринова-Кочина [5], [6] впервые предложили метод комплексной переменной. Они ввели конформное отображение вспомогательной параметрической плоскости (ξ) на область $\Omega(t)$ в плоскости (z) и получили уравнение для данного отображения. Ниже мы рассмотрим, как работает этот метод.

Пусть единичный круг U комплексной плоскости (ξ) конформно отображается на область $\Omega(t)$ в плоскости (z) , то есть $z = f(\xi, t)$, где $f(\xi, t)$ аналитическая функция в U и $f(0, t) = 0$ для любого $t \geq 0$, или, другими словами, начало координат переходит в начало координат в любой момент времени (см. рис. 2).

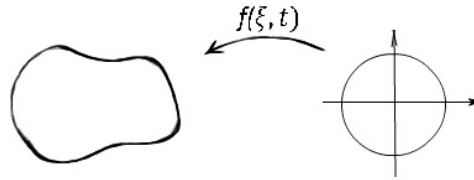


Рис. 2

Рассмотрим комплексный потенциал $W(z, t)$, $\text{Re}W = p$. Для любого фиксированного момента времени t потенциал является многозначной аналитической функцией, определенной на $\Omega(t)$, и его действительная часть удовлетворяет системе Стокса-Лебенсона (1). Также мы можем рассмотреть комплексный потенциал $\omega(\xi, t) = W(f(\xi, t), t)$, определенный в единичном круге на плоскости (ξ) . Очевидно, выполнено равенство $W'_z = \frac{\omega'_\xi}{f'_\xi}$. Таким образом, уравнение Полубариновой-Галина может быть записано в следующем виде (см. [4]):

$$\text{Re}(f(\xi, t)\overline{\xi f'_\xi}) = -\omega'_\xi \xi, \quad |\xi| = 1. \quad (2)$$

С этого момента и далее мы будем использовать следующие обозначения $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}$ и $f'_\xi = \frac{\partial f}{\partial \xi}$. В классическом случае, так как функция Грина является решением первого уравнения системы (1), мы можем записать потенциал в виде:

$$W(z, t) = \frac{Q}{2\pi} \ln z + \omega_0(z, t),$$

где $\omega_0(z, t)$ аналитическая по z , регулярная функция на $\Omega(t)$. Поскольку функция Грина является инвариантной относительно конформных отображений, мы имеем следующую композицию:

$$\omega(\xi, t) = (W \circ f)(\xi, t) = \frac{Q}{2\pi} \ln \xi,$$

и дифференцируя, мы получаем:

$$\omega'_\xi = \frac{\partial W}{\partial z} f'(\xi, t) = \frac{Q}{2\pi\xi}.$$

Следовательно, подставляя полученные выражения в уравнение (2), мы получаем:

$$\operatorname{Re}(f(\xi, t)\overline{\xi f'_\xi}) = -\frac{Q}{2\pi}, \quad |\xi| = 1. \quad (3)$$

2.2 Кардиоид Полубариновой-Галина

Используя нелинейное уравнение Полубариновой-Галина (2), можно получить много точных решений задачи Хеле-Шоу. Основная идея метода состоит в поиске параметрического однолистного отображения $f(\xi, t)$ в специальном виде. Простейшим решением в данном случае является увеличение/уменьшение единичного круга, в центре которого находится источник/сток. Это единственный случай, когда жидкость может быть полностью удалена. Решение в этом случае записывается очевидным образом:

$$f(\xi, t) = \sqrt{\frac{|\Omega(0)| - Qt}{\pi}} \xi.$$

Первое нетривиальное решение задачи Хеле-Шоу было получено Полубариновой-Кочиной и Галиным. Они рассмотрели квадратичное отображение:

$$f(\xi, t) = a_1(t)\xi + a_2(t)\xi^2,$$

где $\xi \in U$ и коэффициенты $a_1(t)$ и $a_2(t)$ действительные. Подстановка такого отображения в уравнение (3) приводит к следующей системе уравнений на коэффициенты:

$$\begin{cases} a_1^2(t)a_2(t) = a_1^2(0)a_2(0) \\ a_1^2(t) + 2a_2^2(t) = a_1^2(0) + 2a_2^2(0) - \frac{Qt}{\pi} \end{cases}$$

Для любого начального условия такого, что $|a_1/2a_2| > 1$, решение $f(\xi, t)$ однолистно в момент времени $t \in [0, t_0)$. Момент "взрыва" t_0 происходит тогда, когда неравенство превращается в равенство, то есть $|a_1/2a_2| = 1$, что в точности соответствует нарушению условия отличия производной функции f от нуля на границе круга и образованию особенности в виде точки возврата, или, что тоже самое, каспа (cusp). Эволюция пятна жидкости показана на рисунке 3.

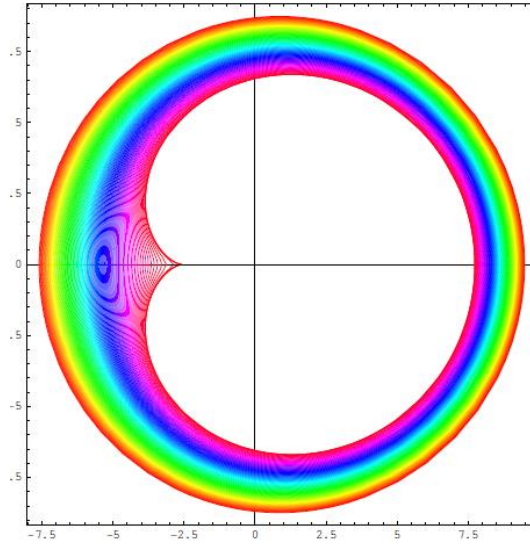


Рис. 3. Кардиоид Полубариновой-Галина.

Из рисунка видно, что образование каспа происходит до того момента, когда граница жидкости достигает стока. Это свойство характерно для всех полиномиальных решений задачи Хеле-Шоу.

3 Комплексные моменты

Для произвольного момента времени $t \geq 0$ мы сопоставим области $\Omega(t)$ бесконечную последовательность комплексных моментов $M_k(t), k = 0, 1, 2, \dots$, где k -ый момент определяется следующим образом (см. [7]):

$$M_k(t) = \int \int_{\Omega(t)} z^k dx dy.$$

Следовательно, $M_0(t)$ есть ни что иное, как площадь $\Omega(t)$. Комплексные моменты указанного вида впервые были введены Ричардсоном для задачи Хеле-Шоу и известны как моменты Ричардсона.

Воспользовавшись теоремой Грина, мы можем переписать $M_k(t)$ в виде криволинейного интеграла по замкнутому контуру $\partial\Omega(t)$ или ∂U :

$$M_k(t) = \frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega(t)} z^k \bar{z} dz = \frac{1}{2i} \int_{\partial U} f^k \bar{f}' d\xi.$$

Теорема 1 Пусть $\Omega(t)$ односвязная область, занимаемая жидкостью в момент времени t , и пусть $L(z)$ гармоническая функция на $\Omega(t)$, продолжаемая на окрестность области $\Omega(t)$. Тогда

$$\frac{d}{dt} M_L(t) = -QL(0),$$

где $M_L(t) = \int \int_{\Omega(t)} L(z) dx dy.$

Доказательство. Применив теорему Грина, мы получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \int_{\Omega(t)} L(z) dx dy &= \int_{\partial\Omega(t)} L(z) V_n ds = - \int_{\partial\Omega(t)} L(z) \frac{\partial p}{\partial n} ds = \\ &= \int_{\partial\Omega(t)} \left(-L(z) \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{\partial L(z)}{\partial n} p \right) ds \text{ (так как } p = 0 \text{ на } \partial\Omega(t)) = \\ &= \int \int_{\Omega(t)} (\Delta L p - L \Delta p) dx dy = \int \int_{\Omega(t)} (-L Q \delta(x, y)) dx dy = -Q L(0). \end{aligned}$$

□

В частности, рассмотрев подынтегральную функцию в виде $L(z) = z^k$ при неотрицательных k , мы получаем бесконечную последовательность моментов $M_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$, для которых выполнено следующее свойство:

$$\frac{dM_k(t)}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int \int_{\Omega(t)} z^k dx dy = -Q \chi_{0k},$$

где

$$\chi_{0k} = \begin{cases} 0 & \text{если } k \neq 0 \\ 1 & \text{если } k = 0 \end{cases}$$

Таким образом, все моменты являются инвариантами, за исключением нулевого ($k = 0$), отвечающего за площадь области, которая изменяется со скоростью Q . Имея начальную область, мы можем рассчитать начальные значения комплексных моментов для нее. В последствии, когда площадь пятна увеличится/уменьшится на величину A , значение $M_0(t)$ также увеличится/уменьшится на величину A , а остальные моменты будут сохранять свои первоначальные значения.

Таким образом, видно, что моменты Ричардсона являются важнейшей характеристикой области в задаче Хеле-Шоу (значение M_L для произвольной гармонической функции $L(z)$ очевидно восстанавливается с помощью её ряда Тейлора и значений моментов Ричардсона). Первый важный вопрос: существует ли область с данным рядом моментов и единственна ли она. Следовательно, нам нужно уметь по данной последовательности моментов восстанавливать форму пятна $\Omega(t)$. Однако, необходимо отметить, что единственность формы пятна в произвольном случае отсутствует. Контрпример ниже это показывает.

3.1 Контрпример различных областей с одинаковой последовательностью моментов Ричардсона

Данный пример был приведен М. Sakai (см. [8]) в 1977 году. Введем следующие обозначения:

$$R_1 = \{z \mid 3 < |z + 1| < \sqrt{10}\}, \quad R_2 = \{z \mid 3 < |z - 1| < \sqrt{10}\},$$

$$\begin{aligned}
E &= R_1 \cap R_2 \cap \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}, \\
F &= [\{\Delta_3(-1) \cap \Delta_3(1)\} \setminus \{\Delta_1(-1) \cup \Delta_1(1)\}] \cap \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}, \\
D_1 &= \{R_1 \cup \Delta_1(1) \cup \bar{F}\}^\circ - \bar{E}, \\
D_2 &= \{R_2 \cup \Delta_1(-1) \cup \bar{F}\}^\circ - \bar{E},
\end{aligned}$$

где $\Delta_r(c)$ обозначает открытый диск с центром в точке c и радиусом r . \bar{F} есть замыкание F , A° есть внутренность A (рис. 4, D_2 получено из D_1 симметричным отражением относительно мнимой оси).

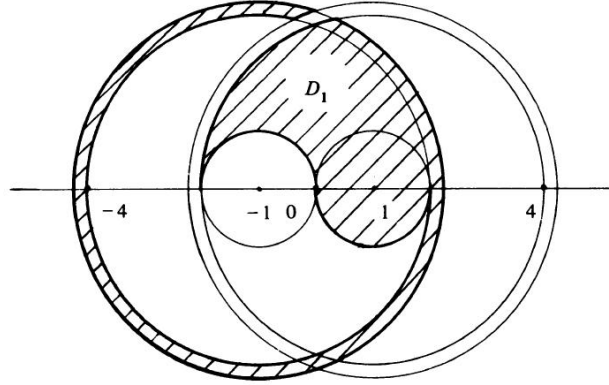


Рис. 4.

Для начала посчитаем следующий интеграл:

$$\begin{aligned}
\int_{R_1} z^n dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_3^{\sqrt{10}} r(e^{i\varphi} - 1)^n dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_3^{\sqrt{10}} r \left(\sum_{k=0}^n C_n^k (r e^{i\varphi})^k (-1)^{n-k} \right) dr d\varphi \\
\int_0^{2\pi} e^{i\varphi k} d\varphi &= \frac{1}{ik} (e^{2\pi ik} - 1) = \begin{cases} 2\pi & \text{при } k = 0 \\ 0 & \text{при } k \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{R_1} z^n dx dy = \int_0^{2\pi} \int_3^{\sqrt{10}} r C_n^0 (-1)^n dr d\varphi = \pi (-1)^n.$$

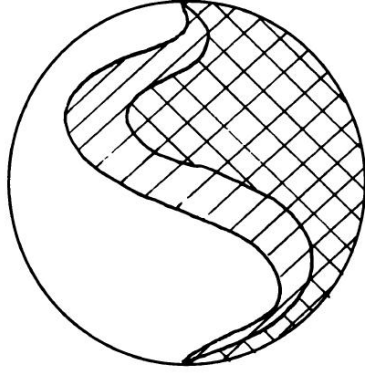
Аналогичным образом считая остальные интегралы, мы получаем:

$$\int \int_{R_1 \cup \Delta_1(1)} z^n dx dy = \pi \{(-1)^n + 1^n\} = \int \int_{R_1 \cup \Delta_1(-1)} z^n dx dy.$$

Таким образом, для двух различных жордановых областей D_1 и D_2 мы имеем:

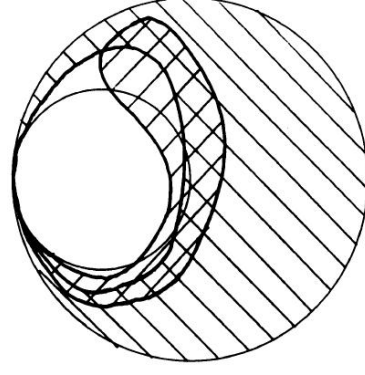
$$\int \int_{D_1} z^n dx dy = \int \int_{D_2} z^n dx dy,$$

для любого неотрицательного целого n .



 : D_2  : $\Delta - D_1$

Рис. 5



 : D_2  : $\Delta - D_1$

Рис. 6

Замечание. Деформируя F , можно получить другие контрпримеры областей D_1 и D_2 с одинаковой последовательностью моментов (см. рис. 5 и рис. 6).

Таким образом, данный пример показывает, что единственность восстановления области по ее моментам не гарантирована.

4 О полиномиальных решениях

В данном разделе мы будем рассматривать общий полиномиальный вид отображения f :

$$f(\xi, t) = \sum_{k=1}^n a_k(t)\xi^k, \quad a_1(0) \neq 0, \quad a_k(0) \in \mathbb{R} \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

На данном этапе очень важно иметь в виду следующую теорему.

Теорема 1 Если в условиях, описанных выше, $f(\xi, 0)$ многочлен степени n ($f(\xi, 0) = \sum_{k=1}^n a_k(0)\xi^k$), тогда и $f(\xi, t)$ многочлен той же степени, то есть $f(\xi, t) = \sum_{k=1}^n a_k(t)\xi^k$ для любого t , пока существует соответствующее решение уравнения Полубариновой-Галлина (2).

Доказательство. Рассмотрим уравнение $\operatorname{Re}(f(\xi, t)\overline{\xi f'_\xi}) = -\omega'_\xi \xi$, $|\xi| = 1$. Подставив в него $a_l(0) = 0$ для любого $l > n$, мы получим $\dot{a}_l(t) = 0$ для любого $l > n$. По теореме существования и единственности решения задачи Коши мы имеем, что $a_l(t) \equiv 0$ для любого $l > n$, и, следовательно, $f(\xi, t) = \sum_{k=1}^n a_k(t)\xi^k$. □

В данном случае моменты Ричардсона имеют следующий специальный вид:

$$M_k(t) = \pi \sum m a_m a_n \dots a_r a_{m+n+\dots+r},$$

где имеются $n + 1$ индексов, m, n, \dots, r , и суммирование ведется по каждому из этих индексов от 1 до n .

Благодаря этому специальному виду моментов, мы можем вывести следующее свойство.

Предложение 1 *Если в условиях, описанных выше, $M_k(t) = 0$, $k = 1, \dots, n-1$, для некоторого t , тогда $\Omega(t)$ есть круг.*

Доказательство. $M_{n-1}(t)$ может быть записано в следующем виде:

$$M_{n-1}(t) = \underbrace{a_1 \dots a_1}_n a_n.$$

Поэтому, если $M_{n-1}(t) = 0$, то мы получаем, что $a_n(t) = 0$, так как $a_1(t) \neq 0$, согласно принятым предположениям.

$$M_{n-2}(t) = \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-1} a_{n-1} + C \cdot a_2 \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-2} a_n = \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-1} a_{n-1} \equiv 0$$

Следовательно, $a_{n-1}(t) = 0$. Продолжая данный процесс, мы получаем, что $a_k(t) \equiv 0$, $k = 2, \dots, n$. В итоге, $f(\xi, t) = a_1(t)\xi$, которое как раз отображает единичный круг в круг с радиусом $a_1(t)$. Это и доказывает, что $\Omega(t)$ есть круг.

□

5 Оптимальное управление

Как нам уже известно, образование каспа характерно для всех полиномиальных решений, и это обычно происходит до того момента, когда граница области достигает стока. Это означает, что жидкость в данном случае не может быть полностью удалена. Однако, что если мы поместим не один источник/сток в начало координат, а несколько? Сможем ли мы выкачать полностью всю жидкость в этом случае? С этого момента мы будем рассматривать проблему выкачивания жидкости.

Для начала рассмотрим случай диполя. Случай мультиполя будет построен аналогичным способом (см. [2]). Пусть у нас теперь имеются один источник в точке a , работающий со скоростью $\frac{1}{\varepsilon}$, и один сток в точке b , работающий со скоростью $\frac{1}{\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$). Таким образом, мы получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \Delta p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \delta_0(z - b) - \frac{1}{\varepsilon} \delta_0(z - a) & \text{на } \Omega(t) \\ p_\varepsilon(z, t) = 0 & \text{на } \partial\Omega(t) \end{cases} \quad (4)$$

Расстояние между точками a и b равно ε ($b = a + \varepsilon$) и стремится к нулю. Перейдем к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ в системе и получим:

$$\begin{cases} \Delta p = \delta'_0(z) & \text{на } \Omega(t) \\ p(z, t) = 0 & \text{на } \partial\Omega(t) \end{cases} \quad (5)$$

Если мы теперь поместим N стоков и N источников на небольшое расстояние от центра, которое стремится к нулю, то система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta p = \delta_0(z) + Q_1 \delta_0'(z) + \dots + Q_{N-1} \delta_0^{(N-1)}(z) & \text{на } \Omega(t) \\ p(z, t) = 0 & \text{на } \partial\Omega(t) \end{cases} \quad (6)$$

где $\delta_0^{(k)}(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(k)} \delta_0(z)$.

Из Теоремы 1 мы получаем значения производных комплексных моментов для данной задачи:

$$\dot{M}_k(t) = (-1)^{k+1} k! Q_k, \quad k \leq N - 1,$$

$$\dot{M}_k(t) = 0, \quad k \geq N.$$

5.1 Оптимальный синтез

Рассмотрим следующую модифицированную задачу Хеле-Шоу:

$$\begin{cases} \Delta p = \delta_0(z) + Q_{N-1} \delta_0^{(N-1)}(z) & \text{на } \Omega(t) \\ p(z, t) = 0 & \text{на } \partial\Omega(t) \end{cases} \quad (7)$$

Мы имеем отображение единичного круга U на область $\Omega(t)$ в виде $f(\xi, t) = a_1(t)\xi + a_N(t)\xi^N$. Нашим альтернативным подходом к решению данной задачи являются применение инструментов теории оптимального управления и построение оптимального синтеза.

В этом случае мы имеем $\dot{M}_0 = -1$ and $\dot{M}_{N-1} = (-1)^N (N-1)! Q_{N-1}$. Поскольку $a_k(t) \equiv 0$, $k = 2, \dots, N-1$, мы имеем $M_k \equiv 0$, $k = 1, \dots, N-2$. По значению \dot{M}_{N-1} мы видим, что \dot{M}_{N-1} отвечает за скорость Q_{N-1} , с которой работает наш механизм выкачивания. Следовательно, будет целесообразным взять эту скорость за управление. Чтобы выкачать жидкость полностью, мы бы хотели сначала превратить исходную область в круг, а затем тривиальным образом удалить всю жидкость. В качестве одного из подходов мы можем выбрать задачу минимизации функционала:

$$\int_0^T M_{N-1}^2(t) dt \rightarrow \min$$

согласно управляемой системе:

$$\begin{cases} \dot{M}_0(t) = -1 \\ \dot{M}_{N-1}(t) = u \end{cases} \quad (8)$$

где u является управлением и $u \in [-1, 1]$.

Функция Понтрягина \mathcal{H} принимает вид:

$$\mathcal{H}(M, p, u) = -p_1 + p_2 u - M_{N-1}^2,$$

где p_1 и p_2 сопряженные переменные, удовлетворяющие следующей системе:

$$\begin{cases} -\dot{p}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M_0} = 0 \\ -\dot{p}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M_{N-1}} = -2M_{N-1} \end{cases}$$

Применим принцип максимума Понтрягина. Так как функция \mathcal{H} линейная по $u \in [-1; 1]$, то если $p_2 \neq 0$, максимум по u достигается на концах отрезка, то есть в точках $u = 1$ или $u = -1$, а точнее:

$$\begin{cases} \hat{u} = 1 & \text{при } p_2 > 0 \\ \hat{u} = -1 & \text{при } p_2 < 0 \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $p_2 = 0$. Если обозначить за $H_0 = -p_1 - M_{N-1}^2$ и $H_1 = p_2$, то функция Понтрягина будет иметь вид:

$$\mathcal{H}(M, p, u) = H_0 + H_1 u,$$

а условие $p_2 = 0$ будет эквивалентно условию $H_1 = 0$. Так как $p_2 = 0$, то из системы для сопряженных переменных мы получаем, что $M_{N-1} = 0$. Теперь найдем особое управление для нашей задачи:

$$\hat{u} = -\frac{\{H_0, \{H_0, H_1\}\}}{\{H_1, \{H_0, H_1\}\}},$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ обозначает скобку Пуассона.

Условие $\{H_0, H_1\} = 2M_{N-1} = 0$ выполнено автоматически. Путем прямых вычислений мы получаем, что $\{H_1, \{H_0, H_1\}\} = 2 \neq 0$ и $\{H_0, \{H_0, H_1\}\} = 0$, следовательно, $\hat{u} = 0$ особое управление.

Дополнительным условием на коэффициенты отображения f является отсутствие корней у производной отображения в единичном круге, то есть:

$$f'_\xi = a_1 + Na_N \xi^{N-1} = 0 \Rightarrow \left| -\frac{a_1}{Na_N} \right| > 1 \Leftrightarrow M_{N-1}^2 < \pi N^N \left(\frac{M_0}{\pi(N^2 + N)} \right)^{N+1} (*).$$

Найдем все траектории, удовлетворяющие полученным следствиям из принципа максимума Понтрягина. Если $u = 1$, то $\dot{M}_0 = -1$ и $\dot{M}_{N-1} = 1$ или $\dot{M}_0 = -\dot{M}_{N-1}$, следовательно, $M_0 = -M_{N-1} + C$, при этом, в соответствии с (6), движение по этим прямым происходит снизу вверх (M_{N-1} растет). Если $u = -1$, то $\dot{M}_0 = -1$ и $\dot{M}_{N-1} = -1$ или $\dot{M}_0 = \dot{M}_{N-1}$, следовательно, $M_0 = M_{N-1} + C$, при этом, в соответствии с (6), движение по этим прямым происходит сверху вниз (M_{N-1} убывает). Также напоминаем, что $M_0 \geq 0$, так как это площадь области.

Для того, чтобы найти экстремали, ведущие из произвольной точки x_0 в начало координат, удобно строить их с конца, то есть с момента попадания в начало координат. Здесь необходимо рассмотреть два случая. В обоих случаях мы получаем, что за завершающий участок экстремали отвечает $u = 0$, он обязан лежать на прямой $M_{N-1} = 0$ (в силу условия однолиственности отображения). Предшествующий участок экстремали должен соответствовать $u = 1$ или $u = -1$ в зависимости от того, в какой полуплоскости лежит точка x_0 .

Необходимо отметить, что не для всех точек x_0 мы можем построить траекторию, ведущую в начало координат. Для точек, которые находятся выше касательных $M_{N-1} = \pm M_0 + C_{1,2}$ к графику условия (*), мы не сможем построить такую траекторию.

$$C_{1,2} = \widetilde{M}_{N-1} \mp \widetilde{M}_0, \text{ где}$$

$$\widetilde{M}_0 = \left(\frac{(\pi(N^2 + N))^{N+1}}{\pi N^N \cdot \frac{N+1}{2}} \right)^{\frac{2}{N-1}}, \quad \widetilde{M}_{N-1} = \pi N^N \left(\frac{\widetilde{M}_0}{\pi(N^2 + N)} \right)^{\frac{N+1}{2}}.$$

В таком случае нам не удастся избежать особенности, или иначе, образования каспа. В остальных случаях, когда траектория существует, то мы можем выкачать жидкость полностью, превратив сначала наше пятно в диск. В результате мы имеем следующую картину (рис. 5).

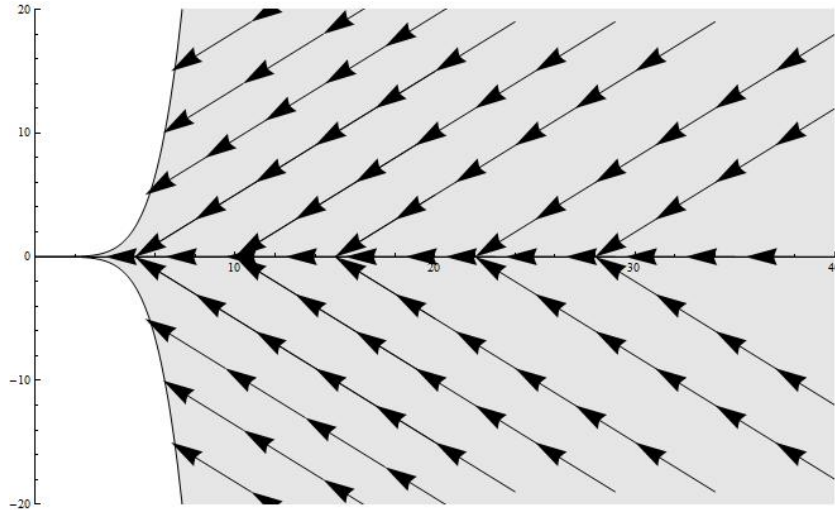


Рис. 5. Оптимальный синтез ($N = 10$).

Оптимальность построенного синтеза следует из теоремы, доказанной Л.Ф. Зеликиной (см. [11]). Теорема гарантирует гладкость функции Беллмана, если в конечную область осуществлен синтез экстремальных траекторий, содержащий гладкое универсальное многообразие M . В нашем случае универсальное многообразие есть прямая $M_{N-1} = 0$, и все траектории переходят на нее за конечное время. Из гладкости функции Беллмана следует оптимальность построенного синтеза (см. [9]).



6 Заключение

В данной работе был разобран частный случай модифицированной задачи Хеле-Шоу в случае мультиполя. Также была поставлена задача оптимального управления, для которой был получен оптимальный синтез. С помощью оптимального синтеза мы смогли показать, что в большинстве случаев даже при полиномиальном отображении можно выкачать жидкость полностью.

Несомненно, аппарат, используемый в данной работе, может быть использован для решения других более сложных проблем в случае мультиполя. Теория оптимального управления может найти свое применение в задачах угловых потоков, пальцев Саффмана-Тэйлора и других. Более того, можно рассматривать не только полиномиальные отображения, но и рациональные и логарифмически-полиномиальные. Мы надеемся, что данная работа послужит толчком для дальнейшего широкого применения техники теории конечномерного оптимального управления в различных классах задач Хеле-Шоу.

Благодарности

Хочу выразить глубокую благодарность Локуциевскому Льву Вячеславовичу, моему научному руководителю, за его ценные советы, помощь и вдохновение.

Также хочется выразить благодарность моему коллеге и другу Артуру Евстфееву за его вклад в работу и поддержку.

Список литературы

- [1] Cummings, L.J., Howison, S.D., King, J.R. 2006 *Two-dimensional Stokes and Hele-Shaw flows with free surfaces*. Euro. Jnl of Applied Mathematics.
- [2] Entov, V.M., Kleinbok, Ya., Etingof, P.I. 1994 *Hele-Shaw flows with a free boundary produced by multipoles*. Plenum Publishing Corporation.
- [3] Galin, L.A. 1945 *Unsteady filtration with a free surface*. Dokl. Akad. Nauk USSR. Moscow, USSR.
- [4] Gustafsson, B. & Vasil'ev, A. 2004 *Conformal and Potential Analysis in Hele-Shaw cells*. Advances in Mathematical Fluid Mechanics. Stockholm-Valparaiso, Sweden.
- [5] Polubarinova-Kochina, P.Ya. 1945 *On a problem of the motion of the contour of a petroleum shell*. Dokl. Acad. Nauk USSR. Moscow, USSR.
- [6] Polubarinova-Kochina, P.Ya. 1945 *Concerning unsteady motion in the theory of filtration*. Prikl. Matem. Mech, USSR.
- [7] Richardson, S. 1972 *Hele Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel*. J. Fluid Mech. 56, 609-618.
- [8] Sakai, M. 1978 *A moment problem on Jordan domains*. Hiroshima, Japan.
- [9] Зеликин, М.И. 2004 *Оптимальное управление и вариационное исчисление*. УРСС, Москва.
- [10] Zelikin, M.I., Borisov, V.F. 1994 *Theory of Chattering Control with applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering*. Birkhauser, Boston, MA.
- [11] Зеликина, Л.Ф. 1982 *К вопросу о регулярном синтезе*. ДАН. Москва, СССР.