КАФЕДРА ОБЩИХ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Специальный курс по выбору кафедры

«**Выпуклая геометрия и задачи сжатых измерений**»

1 год, экзамен

Лектор: доцент К.С. Рютин

Курс посвящен теории выпуклых множеств и функций, конечномерной асимптотической геометрии и её приложениям к задачам сжатых измерений. Обсуждаются как классические вопросы выпуклого анализа и оптимизации, так и достаточно современные результаты, относящиеся к асимптотической выпуклой геометрии. Даны приложения к теории сжатых измерений.

Программа курса

Осенний семестр.

1. Выпуклые множества. Выпуклая оболочка. Теоремы Радона, Каратеодори, Хелли. Примеры применения. Теорема Тверберг.
2. Выпуклые функции. Критерии выпуклости. Выпуклая функция--максимум аффинных.
3. Теоремы отделимости. Теорема о существовании опорной плоскости в конечномерном случае. Примеры.
4. Крайние точки множеств. Теорема Страшевича. Теорема Крейна-Мильмана.
5. Непрерывность и гладкость выпуклых функций. Субдифференциал. Преобразование Лежандра-Юнга-Фенхеля.
6. Задачи выпуклой оптимизации. Двойственность. Теорема об альтернативе.
7. Метод эллипсоидов.

Весенний семестр.

1. Куб, октаэдр, шар. Объём шара, площадь сферы, распределение массы в шаре.
2. Приближение шара многогранником (почти--сферические сечения куба).
3. Теорема Джона об эллипсоиде.

4. Почти--сферические сечения октаэдра (Volume-ratio теорема).

5. Неравенство Брунна-Минковского. Изопериметрическое неравенство. Перенос массы. Теорема Бренье—МакКанн.

6. Концентрация меры на сфере. Теорема Леви. Концентрация липшицевых функций. Неравенство Хёффдинга

7. О compressed sensing'e. Достаточное условие в терминах RIP. RIP свойство гауссовских матриц.

8. Общая теорема Дворецкого.

9. Интегральная формула Пуанкаре--Крофтона. Формула Коши для средней площади проекции. Формула Штейнера (объём окрестности выпуклого тела).

Некоторые задачи для экзамена.

Доказать, что замкнутое выпуклое множество с выпуклым дополнением в R^n --- полупространство

Если точка лежит в выпуклой оболочке d+1 множества из R^d, то она лежит в некотором симплексе с вершинами из этих множеств.

Если R^n покрыто конечным числом открытых или замкнутых полупространств, то оно покрыто уже некоторыми n+1 из них

Доказать, что сумма наибольших k координат точки из R^n --- выпуклая функция

Доказать выпуклость ln(exp x_1+...+exp x_n)

Найти предел среднего значения расстояния между 2 случайными точками многомерной сферы

Найти порядок среднего значения p—нормы по сфере

Найти асимптотику радиуса шара, гауссовский объём которого ½

Найти порядок минимального отношения площади к объёму для тела лежащего в многомерном кубе

Найти порядок расстояния Банаха-Мазура для l_p и l_q норм.