

КАФЕДРА ОБЩИХ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ  
Специальный курс по выбору кафедры  
**«Современные методы теории аппроксимации»**

1 год, экзамен

Лектор: доцент К.С. Рютин

Курс посвящен некоторым фактам и конструкциям гармонического анализа и их применениям в современной теории аппроксимации. Даются некоторые факты теории преобразований Фурье, интерполяционные теоремы, базовые факты и методы оценивания интегралов от быстро осциллирующих функций и разные приложения в теории приближений. Большая часть курса связана с нижними оценками в теории приближений.

Вторая часть курса же в основном связана с различными многомерными задачами. Обсуждаются вероятностный метод, оценки объёмов, задача о балансировке системы векторов и некоторые топологические результаты.

### **Программа курса**

#### **Осенний семестр.**

#### **Гармонический анализ в теории приближений**

0. Основные неравенства: Гёльдера, Минковского.
1. Интерполяционная теорема Рисса-Торина.
2. Действительная интерполяция. Теорема Марцинкевича.
3. Преобразование Фурье в  $L$ . Его свойства. Связь гладкости функции и свойств ее преобразования Фурье.
4. Пространства  $S, S'$ . Равенство Парсеваля. Преобразование Фурье в  $L^2$ . Формула обращения.
5. Свертка. Преобразование Фурье и свертка. Приложения к дифференциальным уравнениям. Соотношение неопределенностей Гейзенберга.

6. Следствие теорем интерполяции. Неравенство Хаусдорфа-Юнга. Точность показателей в неравенстве Хаусдорфа-Юнга. Неравенство Юнга для сверток.

7. Формула суммирования Пуассона. Формула Шеннона-Котельникова. Задача о числе целых точек в круге.

8. Асимптотика интегралов от осциллирующих функций. Метод стационарной фазы. Убытие преобразования Фурье поверхностных мер. Преобразование Фурье дуги окружности.

9. Нижние оценки погрешности приближений алгебраическими многочленами. Альтернанс Валле Пуссена. Алгоритм Ремеза. Теорема Коровкина о приближении положительными полиномиальными операторами.

10. Нижние оценки погрешности приближений тригонометрическими полиномами. "Обратная" теорема. Оценка L-нормы (неравенство Макги-Пиньо-Смита), следствие для тригонометрических проекторов.

11. Двойственность в теории приближений. Формула для расстояния до выпуклого множества, подпространства. Двойственность поперечников по Гельфанду и Колмогорову, следствие для поперечника куба в  $\mathbb{H}^1$ . Пример: оценка Белинского тригонометрического приближения ядра Бернулли.

### **Весенний семестр.**

#### **Вероятностные и геометрические методы в теории приближений**

1. Метод усреднений для получения нижних оценок. Приближения в метрике  $L^2$

2. Случайные проекции. Поперечник октаэдра в  $L^q$

3. Топологические теоремы Брауэра и Борсука.

4. Теоремы Тихомирова и Маковоза

5. Оценки объемов многомерных тел. Приложения.

6. Связь поперечников по Колмогорову и энтропийных чисел

7. Размерность Вапника-Червоненкиса. Некоторые примеры.

8. Задача о балансировке векторов. Применения в теории аппроксимации

9. Разложение Литтлвуда-Пэли. Применения в теории аппроксимации

10. Концентрация меры. Неравенство Талаграна.

11. Некоторые полезные результаты о решетках. Задачи целочисленной теории сжатых измерений.

### **Некоторые задачи для экзамена.**

Когда достигается равенство в соотношении неопределённостей Гейзенберга ?

Найти порядок  $L_p$  нормы ядра Дирихле

Предъявить пример функции с заданными н.п. тригонометрическими

Найти э.н.п тригонометрическими полиномами для  $a \cos nx + b \sin nx$

Оценить скорость убывания преобразования Фурье характеристической функции шара

Может ли быть тождественно нулевой свертка неотрицательных, положительных, финитных функций ?

Решить задачу Коши для волнового уравнения

Найти периодическую функцию с максимумом  $L_2$ -нормы на подотрезке

Оценить размерность Вапника-Червоненкиса класса рациональных функций степени  $n$