

КАФЕДРА ОБЩИХ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Специальный курс по выбору кафедры

«Теория приближений и приложения»

1 год, экзамен

Лектор: доцент К.С. Рютин

В курсе излагаются основы теории приближений функций. Дается обзор различных результатов и методов, начиная от классических, восходящих к Гауссу, Вейерштрассу и Чебышеву, и вплоть до совсем современных результатов по приближениям классов функций (теория поперечников). В курсе затрагиваются и некоторые прикладные вопросы.

Программа курса

1. Основные классы функций и пространства. Постановки задач
 2. Элемент наилучшего приближения; его существование, единственность. Примеры.
 3. Метрическая проекция, чебышевское множество. Примеры.
 4. Теорема Стоуна--Вейерштрасса.
 5. Теорема Рунге. Примеры применения.
 6. Интерполяция. Многочлен Лагранжа.
 7. Пример Рунге
 8. Условие Хаара, характеристика чебышевских подпространств в $C(K)$
 9. Теорема Мэйрхьюбера
 10. Критерий Колмогорова. Теорема об альтернансе.
 11. Многочлены Чебышева. Их свойства.
 12. Существование и единственность э.н.п. из подпространства.
- Примеры
13. Неравенства Сегё и Бернштейна.
 14. Неравенство Маркова. Неравенство Ремеза.
 15. Модули непрерывности.
 16. Прямая теорема (Джексона) для тригонометрических полиномов и обратная теорема (Бернштейна)
 17. Приближение в L_p . Критерий э.н.п. для подпространств.
 18. Приближение подпространствами в L_1, L_2
 19. Теорема Мюнтца
 20. Тригонометрические приближения. Приближение операторами Фурье, Фейера.
 21. Приближение операторами Валле—Пуссена. Насыщение
 22. Определения поперечников. Простейшие свойства. Примеры

23. Теорема о поперечнике шара
24. Следствия. Поперечники октаэдра и эллипсоидов.
25. Выпуклые множества. Концентрация меры.
26. Теоремы об оценке поперечников Соболевских классов
27. Приближения случайными подпространствами.
28. Задачи сжатых измерений. Связь с поперечниками
29. RIP свойство. Случайные матрицы
30. Некоторые задачи нелинейных приближений и геометрической теории приближений.
31. Энтропия множеств. Теорема о суперпозициях
32. Некоторые факты и задачи гармонического анализа

Типичные задачи для зачёта, экзамена.

- Пример неединственности э.н.п подпространством
- Единственность э.н.п рациональными дробями в $C[0;1]$
- Доказать, что полиномы плотны в C^k
- Предъявить пример функции с заданными н.п. триг полиномами
- Найти э.н.п тригонометрическими полиномами для $a \cos nx + b \sin nx$
- Доказать, что малочлены образуют чебышевскую систему
- Доказать выпуклость чебышевского множества в конечномерном евклидовом пространстве
- Обоснование примера Рунге в теории интерполяции
- Найти среднее значение l_p нормы на сфере
- Найти поперечники 3-мерного октаэдра в евклидовой метрике
- Найти поперечники эллипсоида в 3мерном пространстве
- Докажите, что не любая аналитическая функция 2х переменных представима заданной суперпозицией бесконечно—дифференцируемых функций 1 переменной и операции сложения