ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА Общих проблем управления

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО СБОРА РЕСУРСА, РАСПРЕДЕЛЕННОГО НА ОКРУЖНОСТИ

Выполнил студент 632 группы
Хасанов Рафаэль Ильгизович

____________

подпись студента

Научный руководитель:
Профессор Локуциевский Л.В.

____________

подпись научного руководителя

Москва
2019

# Содержание

## 1. Введение

Рассмотрение задач оптимального сбора ресурса имеет долгую историю. Фундаментальные работы [1] и [2] для случая ловли рыбы были написаны уже более 60 лет назад. В настоящее время большой интерес представляют модели оптимальной добычи пространственно распределенного возобновляемого ресурса. В статье [3] рассматривается случай равномерного сбора ресурса при движении с постоянной скоростью. В данной работе были получены условия оптимальности в задаче сбора возобновляемого ресурса для максимизации прибыли, получаемой от его продажи. Первоначально ресурс распределен на окружности $S^1$ по закону $\psi(0, x)$, $x \in S^1$ По окружности движется собирающее устройство со скоростью $v(t) = 1$ течении времени $T$. При этом оно совершает несколько кругов. Предполагается, что естественный прирост ресурса задаётся экспоненциальным законом

$$\psi(t, x) = \alpha\psi(t, x), \alpha \in \mathbf{R}$$

Устройство в каждый момент времени $t$ собирает долю $u(t) \in [0, 1]$ ресурса в точке, в которой оно находится. Ставится задача выбора управления $u(t)$, которое максимизирует функционал

$$I(u(t)) = \int_0^T f(t, v(t), x(t), \psi(t, x(t)), u(t))dt \tag{1.1}$$

общей прибыли, получаемой от продажи собранного ресурса. Класс возможных состояний системы в задаче бесконечномерен, и, следовательно, классический принцип максимума Понтрягина не может быть применён.

В ряде работ (см [3] и ссылки там) были сделаны попытки получения необходимого условия оптимальности в такого рода задачах. Однако довести эти попытки до конечного ответа удалось лишь в очень частных случаях.

## 2. Постановка задачи сбора ресурса на окружности

В начальный момент времени на окружности $S^1$ (длины 1) распределен некоторый ресурс по заданному закону

$$\psi_0(x) \geqslant 0,\ x \in S^1,$$

По этой окружности с заданной положительной скоростью $v(t) \in C^\infty,\ v(t) > 0$ движется собирающее устройство, которое в любой момент времени $t$ собирает некоторую долю $u(t) \in [0;1]$ ресурса. Через $x(t)$ будем обозначать положение устройства в момент времени $t$. Если в точке $x(t)$ было $\psi(t-0, x(t))$ ресурса, то после прохождения устройства остаётся $\psi(t+0, x(t)) = [1-u(t)]\psi(t-0, x(t))$, а часть ресурса $u(t)\psi(t-0, x(t))$, продаётся с заданным доходом $f(t, x(t), \psi(t-0, x(t)), u(t), v(t)),\ f \in C^\infty$. Таким образом, если $\psi(t, x(t))$ - количество ресурса в момент времени $t$ в точке $x(t)$, то:

$$\psi(t+0, x(t)) = (1-u(t))(\psi(t-0, x(t))$$

Всюду в дальнейшем мы будем писать сокращенно $\psi(t, x(t))$, имея в виду $\psi(t-0, x(t))$. Для удобства будем считать, что устройство начинает двигаться в момент времени $t = 0$, движется время $T$ проходит за это время $n$ кругов, т. е. $\int\limits_0^T v(t)dt = n$. Это условие не принципиально и введено для упрощения изложения.

Требуется найти оптимальную функцию сбора ресурса $u(t)$, которая обеспечит максимальный доход. То есть, ставится задача максимизации функционала

$$I(u(t)) = \int\limits_0^T f(t, v(t), x(t), \psi(t, x(t)), u(t))dt \to max$$

за счёт выбора управления $u(t) \in [0;1]$. Как обычно, $u(t)$ измеримая функция.

В статье "Принцип максимума для одного класса задач оптимального сбора ресурса"Скопинцева С.В., Локуциевского Л.В. и Зеликина М.И. была доказаны следующие теоремы:

**Теорема 1 1.** *Предположим, что в задаче 1.1 существует оптимальное управление $\hat{u}(t)$. Рассмотрим произвольную точку на окружности $x_0 \in S^1$ и обозначим через $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ моменты времени, в которые устройство проходит $x_0$, то есть $x(t_k) = x_0\ \forall k = 1, \ldots, n$. Тогда если функция $\psi_0(x)$ непрерывна в точке $x_0$, а функция $u(t)$ непрерывна в каждый момент времени $t_k, k = 1, \ldots, n$, то для произвольного набора чисел $\omega_k \in [0;1], k = 1, \ldots, n$, выполняется равенство:*

$$\sum_{i=1}^n (f(t_i, x_0, \psi_{i-1}(x_0), \hat{u}(t_i)) - f(t_i, x_0, W_{i-1}, \omega_i)) \geq 0,$$

*где $\psi_i(x_0) = \psi(t_i - 0, x_0)$, и $W_0 = \psi_0(x_0), W_i = (1-\omega_{i-1})W_{i-1}, 1 \leq i \leq n-1$.*

**Теорема 2 1.** *Предположим, в задаче 1.1 функция $f$ имеет вид*

$$f(t, v, x, \psi(t, x), u(t)) = g(t, x)u(t)\psi(t, x),$$

*где функция $v(t) = 1, g(t, x)$ - не зависит от собранного ресурса $u(t)\psi(t, x)$, и в точке $x_0$ выполнены условия Теоремы 1. Тогда если в момент времени $\tilde{t}$ прохождения точки $x_0$ значение $g(\tilde{t}, x_0) < \underset{t:x(t)=x_0}{max}(g(t, x_0))$ или $g(\tilde{t}, x_0) < 0$, то собирать ресурс в точке $x_0$ на соответствующем круге неоптимально, то есть $\hat{u}(\tilde{t}) = 0$. При этом, если $\underset{t:x(t)=x_0}{max}(g(t, x_0)) > 0$, то в точке $x_0$ необходимо собрать весь ресурс.*

Иными словами, оптимально подбирать ресурс в точке $x_0$ только в те моменты времени $\tilde{t} : x(\tilde{t}) = x_0$, в которых функция $g(t, x_0)$ положительна и достигает своего максимума в точке $x_0$.

То есть, если функция $g(t, x_0)$ всегда отрицательна при прохождении точки $x_0$, то отрицательна и функция $f(t, v, x, \psi(t, x), u(t))$, и сбор ресурса в этой точке всегда несёт убыток.

В дипломной работе с помощью этих теорем найдены оптимальные стратегии в серии различных задач.

# 3. Примеры

**Задача 1**

*Собирающее устройство, двигаясь с постоянной скоростью* $v(t) = 1$ *по окружности* $S^1$ *совершает два круга. Ресурс распределен равномерно:* $\psi_0(x) = 1,\ \forall x \in S^1$ *и* $\dot{\psi} = 0$*. Прибыль от собранного ресурса задается формулой* $f(t, \psi(x,t), u(t)) = u(4t^2 - 3t + 1)\psi$*. Требуется найти оптимальное управление* $\hat{u}$*, максимизирующее функционал*

$I(u(t)) = \int\limits_0^2 f(t, \psi(x,t), u(t))dt \to max$

Для удобства обозначим $\psi_i(x)$ - количество ресурса, оставшегося в точке $x$ после $i$-го прохождения, при управлении $u$. То есть $\psi_0 = \psi_0, \psi_1 = \psi_0(1-u_1), \psi_i = \psi_{i-1}(1-u_i) = \psi_0(1-u_0)(1-u_1)\dots(1-u_i), 1 \le i \le n-1$.

Пусть $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ - оптимальное управление на 1-ом и 2-ом круге соответственно и $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ - произвольное управление на 1-ом и 2-ом круге.

Тогда количества ресурса соотвественно записывается $\hat{\psi}_1 = \psi_0(1-\hat{u}_1)$, $\hat{\psi}_2 = \hat{\psi}_1(1-\hat{u}_2)$ $\tilde{\psi}_1 = \psi_0(1-\tilde{u}_1)$, $\tilde{\psi}_2 = \tilde{\psi}_1(1-\tilde{u}_2)$

Таким образом, по 1.1 для $\forall \tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ должно выполняться

$$(4t^2 - 3t + 1)(\hat{u}_1 - \tilde{u}_1) + (4t^2 + 5t + 2)(\hat{u}_2 - \tilde{u}_2 - \hat{u}_1\hat{u}_2 + \tilde{u}_1\tilde{u}_2) \ge 0$$

Возьмем $\tilde{u}_2 = 1$ и $\tilde{u}_1 = \hat{u}_1$:

$$(4t^2 - 3t + 1)(\hat{u}_1 - \hat{u}_1) + (4t^2 + 5t + 2)(\hat{u}_2 - 1 - \hat{u}_1\hat{u}_2 + \hat{u}_1) \ge 0$$
$$(4t^2 + 5t + 2)(\hat{u}_2 - 1 - \hat{u}_1\hat{u}_2 + \hat{u}_1) \ge 0$$

Где $4t^2 + 5t + 2 > 0$ и $\hat{u}_2 - 1 - \hat{u}_1\hat{u}_2 + \hat{u}_1 = (\hat{u}_2 - 1)(1 - \hat{u}_1) \ge 0$

1) $\hat{u}_1 = 1$, проверим оптимальность на паре $\tilde{u}_1 = 0, \tilde{u}_2 = 1$:

$$(4t^2 - 3t + 1)(\hat{u}_1 - \tilde{u}_1) + (4t^2 + 5t + 2)(\hat{u}_2 - \tilde{u}_2 - \hat{u}_1\hat{u}_2 + \tilde{u}_1\tilde{u}_2) \ge 0$$
$$(4t^2 - 3t + 1) + (4t^2 + 5t + 2)(-1) \ge 0$$
$$-8t - 1 \ge 0, 0 \le t \le 1$$

То есть для $\forall$ $\hat{u}_2$ при $\hat{u}_1 = 1$, $\hat{u}$ - не оптимальное управление.

2) $\hat{u}_2 = 1$, проверим оптимальность на паре $\tilde{u}_1 = 0, \tilde{u}_2 = 1$:

$$(4t^2 - 3t + 1)(\hat{u}_1 - \tilde{u}_1) + (4t^2 + 5t + 2)(\hat{u}_2 - \tilde{u}_2 - \hat{u}_1\hat{u}_2 + \tilde{u}_1\tilde{u}_2) \ge 0$$
$$(4t^2 - 3t + 1)\hat{u}_1 + (4t^2 + 5t + 2)(-\hat{u}_1) \ge 0$$
$$\hat{u}_1(-8t - 1) \ge 0, 0 \le t \le 1$$

То есть $\hat{u}_1 = 0$.

Таким образом мы получаем оптимальное управление $\hat{u}$:

$$\hat{u}_1 = 0, \hat{u}_2 = 1$$

**Задача 2**

*Собирающее устройство, двигаясь с постоянной скоростью $v(t) = 1$ по окружности $S^1$ совершает $n$ кругов. Ресурс распределен равномерно: $\psi_0(x) = 1,\ \forall x \in S^1$ и $\dot{\psi} = 0$. Прибыль от собранного ресурса задается формулой $f(t, \psi(x,t), u(t)) = \sqrt{u\psi}$. Требуется найти оптимальное управление $\hat{u}$, максимизирующее функционал*

$I(u(t)) = \int\limits_0^n f(t, \psi(x,t), u(t))dt \to max$

Так как функция монотонно возрастает, то на последнем круге нам необходимо собрать весь оставшийся ресурс, то есть $\hat{u} = 1$.

Найдем оптимальное управление на предпоследнем круге, что эквивалентно решению задачи для $T = 2$:

Воспользуемся теоремой 1.1:

$$\sqrt{\hat{u}_1\psi} - \sqrt{\tilde{u}_1\psi} + \sqrt{1(1-\hat{u}_1)\psi} - \sqrt{1(1-\tilde{u}_1)\psi} \geq 0$$
$$\sqrt{\hat{u}_1} + \sqrt{1-\hat{u}_1} \geq \sqrt{\tilde{u}_1} + \sqrt{1-\tilde{u}_1}$$
$$\sqrt{\hat{u}_1} + \sqrt{1-\hat{u}_1} \to max$$

Находим значение $\hat{u}_1$ при котором выражение достигает максимума:

$$\frac{1}{2\sqrt{\hat{u}_1}} - \frac{1}{2\sqrt{1-\hat{u}_1}} = 0$$

Получаем $\hat{u}_1 = \frac{1}{2}$

3) По аналогии рассмотрим ситуацию с тремя кругами, учитывая известное оптимальное управление на последнем и предпоследнем круге:

$$\hat{u}_1 -?,\ \hat{u}_2 = \frac{1}{2},\ \hat{u}_3 = 1$$

$$\sqrt{\hat{u}_1\psi} - \sqrt{\tilde{u}_1\psi} + \sqrt{\frac{1}{2}(1-\hat{u}_1)\psi} - \sqrt{\frac{1}{2}(1-\tilde{u}_1)\psi} + \sqrt{1(1-\frac{1}{2})(1-\hat{u}_1)\psi} - \sqrt{1(1-\frac{1}{2})(1-\tilde{u}_1)\psi} \geq 0$$

$$\sqrt{\hat{u}_1} + \sqrt{\frac{1}{2}(1-\hat{u}_1)} + \sqrt{1(1-\frac{1}{2})(1-\hat{u}_1)} \geq \sqrt{\tilde{u}_1} + \sqrt{\frac{1}{2}(1-\tilde{u}_1)} + \sqrt{1(1-\frac{1}{2})(1-\tilde{u}_1)}$$

$$\sqrt{\hat{u}_1} + \sqrt{2(1-\hat{u}_1)} \to max$$

Находим значение $\hat{u}_1$ при котором выражение достигает максимума:

$$\frac{1}{2\sqrt{\hat{u}_1}} - \frac{2}{2\sqrt{2-2\hat{u}_1}} = 0$$

То есть $\hat{u}_1 = \frac{1}{3}$

4) Рассмотрим случай $T = N+1$, считая известным управление на предыдущих кругах, а именно $\hat{u}_k = \frac{1}{N-k+1}$:

$$\sqrt{\hat{u}_1} - \sqrt{\tilde{u}_1} + \sqrt{\frac{1}{N}(1-\hat{u}_1)} - \sqrt{\frac{1}{N}(1-\tilde{u}_1)} + \dots$$
$$\dots + \sqrt{1(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\dots(1-\frac{1}{N})(1-\hat{u}_1)} - \sqrt{1(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\dots(1-\frac{1}{N})(1-\tilde{u}_1)} \geq 0$$

Где

$$\frac{1}{N-1}(1-\frac{1}{N}) = \frac{1}{N}$$
$$\frac{1}{N-2}(1-\frac{1}{N-1})(1-\frac{1}{N}) = \frac{1}{N}$$
$$1(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\dots(1-\frac{1}{N}) = \frac{1}{N}$$

И выражение принимает вид:

$$\sqrt{\hat{u}_1} + N\sqrt{\frac{1}{N}(1-\hat{u}_1)} - \sqrt{\tilde{u}_1} - N\sqrt{\frac{1}{N}(1-\tilde{u}_1)} \geq 0$$
$$\sqrt{\hat{u}_1} + \sqrt{N(1-\hat{u}_1)} \to max$$

То есть $\hat{u}_1 = \frac{1}{N+1}$ и

$$\hat{u} = \begin{cases} \frac{1}{N+1}, & \text{на первом круге;} \\ \frac{1}{N}, & \text{на втором круге;} \\ \vdots & \\ 1, & \text{на последнем круге.} \end{cases}$$

То есть оптимально собирать ресурс одинаковыми частями на каждом из циклов.

# 4. Возобновляемость ресурса

Формально в статье "Принцип максимума для одного класса задач оптимального сбора ресурса"Теорема 1 доказана для случая, когда ресурс не возобновляем, т.е. $\dot{\psi} = 0$. Однако по аналогии несложно доказать, что эта теорема верна и для случая $\dot{\psi}(t) = f(\psi(t))$, так как необходимо только для каждого $\psi_i$ добавить то, что "наросло"за круг.

**Задача 3**

*Собирающее устройство, двигаясь с постоянной скоростью $v(t) = 1$ по окружности $S^1$ совершает два круга. Ресурс распределен равномерно: $\psi_0(x) = 1,\ \forall x \in S^1$ и $\dot{\psi} = t$. Прибыль от собранного ресурса задается формулой $f(t, \psi(x,t), u(t)) = (2-t)tu\psi$.*

$\psi = \frac{t^2}{2} + 1,\ \psi_i = \frac{t_i^2 - t_{i-1}^2}{2} + \psi_{i-1}$

По аналогии с задачей 2, так как функция монотонно возрастает, то на последнем круге нам необходимо собрать весь оставшийся ресурс, то есть $\hat{u} = 1$.

Найдем оптимальное управление первом круге:

$$T = 2,\ \hat{u}_1 - ?,\ \hat{u}_2 = 1,\ \tilde{u}_2 = 1$$

Воспользуемся теоремой 1.1:

$$(2-t)(\frac{t^2}{2}+1)(\hat{u}_1 - \tilde{u}_1) + (1-t)((\frac{t^2}{2}+1)(1-\hat{u}_1) + \frac{(t+1)^2 - t^2}{2}) - (1-t)((\frac{t^2}{2}+1)(1-\tilde{u}_1) + \frac{(t+1)^2 - t^2}{2}) \geq 0$$

$$(2-t)(\frac{t^2}{2}+1)(\hat{u}_1 - \tilde{u}_1) + (1-t)(\frac{t^2}{2}+1)(\tilde{u}_1 - \hat{u}_1) \geq 0$$

$$(\frac{t^2}{2}+1)(\hat{u}_1 - \tilde{u}_1) \geq 0$$

$$\hat{u}_1 = 1$$

Получается, в данных условиях правильным решением будет "собирать"ресурс по максимуму оба круга.

**Задача 4**

*Собирающее устройство, двигаясь с постоянной скоростью $v(t) = 1$ по окружности $S^1$ совершает два круга. Ресурс распределен равномерно: $\psi_0(x) = 1,\ \forall x \in S^1$ и $\dot{\psi} = \psi$. Прибыль от собранного ресурса задается формулой $f(t, \psi(x,t), u(t)) = (2-t)tu\psi$.*

$\psi = \psi_0 e^t,\ \psi_i = \psi_{i-1} e^t$

Так как $f$ монотонно возрастает, то на последнем круге - $\hat{u}_2 = 1$

Воспользуемся 1.1 для $\tilde{u}_1 - \forall,\ \tilde{u}_2 = \hat{u}_2$:

$$\hat{u}_1 e^t (2-t)t - \tilde{u}_1 e^t (2-t)t + \hat{u}_2 (1-t^2) e^{t+1} (1-\hat{u}_1) - \tilde{u}_2 (1-t^2) e^{t+1} (1-\tilde{u}_1) \geq 0$$

$$(\hat{u}_1 - \tilde{u}_1) e^t (2-t)t + (1-t^2) e^{t+1} (\tilde{u}_1 - \hat{u}_1) \geq 0$$

$$e^t (\hat{u}_1 - \tilde{u}_0)(2t - t^2 + et^2 - e) \geq 0$$

Рассмотрим $(2t - t^2 + et^2 - e)$:

$$2t - t^2 + et^2 - e = 0$$
$$t^2(e-1) + 2t - e = 0$$
$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{e^2 - e + 1}}{1 - e}$$
$$t_2 = \frac{1 - \sqrt{e^2 - e + 1}}{1 - e}$$

То есть это парабола, с ветвями верх и корнем $t_1 < 0$, и корнем $0 < t_2 < 1$.

Таким образом, оптимальное управление $\hat{u}$:

$$\hat{u} = \begin{cases} 0, & \text{если } t < \frac{1-\sqrt{e^2-e+1}}{1-e}; \\ 1, & \text{если } t \geqslant \frac{1-\sqrt{e^2-e+1}}{1-e}. \end{cases}$$

**Задача 5**

*Собирающее устройство, двигаясь с постоянной скоростью $v(t) = 1$ по окружности $S^1$ совершает два круга. Ресурс распределен равномерно: $\psi_0(x) = 1,\ \forall x \in S^1$ и $\dot{\psi} = \psi$. Прибыль от собранного ресурса задается формулой $f(t, \psi(x,t), u(t)) = (2-t)tu(1-u)\psi$.*

$\psi = \psi_0 e^t,\ \psi_i = \psi_{i-1} e^t$

Оптимальным управлением на последнем круге выбираем $\hat{u} = \frac{1}{2}$, так как это позволяет максимизировать значение функционала.

Воспользуемся 1.1 для $\tilde{u}_1 - \forall,\ \tilde{u}_2 = \hat{u}_2$:

$$e^t(2-t)t(\hat{u}_1 - \hat{u}_1^2) - e^t(2-t)t(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_1^2) + \frac{1}{4}(1-t^2)e^{t+1}(1-\hat{u_1}) - \frac{1}{4}(1-t^2)e^{t+1}(1-\tilde{u_1}) \geq 0$$
$$(2-t)t(\hat{u}_1 - \hat{u}_1^2 - \tilde{u}_1 + \tilde{u}_1^2) + \frac{1}{4}(1-t^2)e(\tilde{u}_1 - \hat{u_1}) \geq 0$$
$$2t\hat{u}_1 - t^2\hat{u}_1 - 2t\hat{u}_1^2 + t^2\hat{u}_1^2 - \frac{e}{4}\hat{u}_1 + \frac{e}{4}t^2\hat{u}_1 - 2t\tilde{u}_1 + t^2\tilde{u}_1 + 2t\tilde{u}_1^2 - t^2\tilde{u}_1^2 + \frac{e}{4}\tilde{u}_1 - \frac{e}{4}t^2\tilde{u}_1 \geq 0$$
$$2t\hat{u}_1 - t^2\hat{u}_1 - 2t\hat{u}_1^2 + t^2\hat{u}_1^2 - \frac{e}{4}\hat{u}_1 + \frac{e}{4}t^2\hat{u}_1 \geq 2t\tilde{u}_1 - t^2\tilde{u}_1 - 2t\tilde{u}_1^2 + t^2\tilde{u}_1^2 - \frac{e}{4}\tilde{u}_1 + \frac{e}{4}t^2\tilde{u}_1$$

Найдем максимум выражения по $\hat{u}_1$ - $2t\hat{u}_1 - t^2\hat{u}_1 - 2t\hat{u}_1^2 + t^2\hat{u}_1^2 - \frac{e}{4}\hat{u}_1 + \frac{e}{4}t^2\hat{u}_1$ при $t \in [0;1]$:

$$2t\hat{u} - t^2\hat{u} - 2t\hat{u}^2 + t^2\hat{u}^2 - \frac{e}{4}\hat{u} + \frac{e}{4}t^2\hat{u} = 0$$
$$\hat{u}^2(t^2 - 2t) + \hat{u}(2t - t^2 - \frac{e}{4} + \frac{e}{4}t^2) = 0$$
$$\hat{u}_{01} = 0$$
$$\hat{u}_{02} = \frac{t^2 - 2t + \frac{e}{4} - \frac{e}{4}t^2}{t^2 - 2t}$$

Так как при $\hat{u}_1^2$ мы имеем отрицательный коэффициент, то получаем параболу с ветвями, направленными вниз, и максимумом будет являться $\hat{u}_{max} = \frac{\hat{u}_{01}+\hat{u}_{02}}{2}$.

Рассмотрим значение $\hat{u}_2 = \frac{t^2-2t+\frac{e}{4}-\frac{e}{4}t^2}{t^2-2t}$. При $t \in [0;1]$, $\hat{u}_2 \in (-\infty;1]$, с нулем в точке $t_1 = \frac{\sqrt{16-4e+e^2}-4}{e-4}$.

Так мы получаем

$$\hat{u} = \begin{cases} 0, & \text{если } t < \frac{\sqrt{16-4e+e^2}-4}{e-4}; \\ \frac{t^2-2t+\frac{e}{4}-\frac{e}{4}t^2}{2(t^2-2t)}, & \text{если } \frac{\sqrt{16-4e+e^2}-4}{e-4} \leqslant t \leqslant 1. \\ \frac{1}{2} & \text{если } t \geqslant 1 \end{cases}$$

В отличии от предыдущих задач, мы получили управление, зависящее от времени, что объясняется не линейностью $f$ по $u$.

## Список литературы


[1] Gordon H. S. Economic theory of a common property resource: The fishery // Journal of Political Economy - 1954. - p. 124-142, vol. 75.

[2] Scott A. D. The fishery: The objectives of sole ownership // Journal of Political Economy - 1955 - p. 116-124, vol. 63.

[3] Behringer S., Upmann T. Optimal Harvesting of a Spatial Renewable Resource // Journal of Economic Dynamics and Control - 2014 - p. 105-120, vol. 42.