ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА Общих проблем управления

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

ПОВЕДЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧЕ С ГЛАДКИМ ВЫПУКЛЫМ РЕШЕНИЕМ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛЕЖАНДРА-ЮНГА-ФЕНХЕЛЯ

Выполнила студентка 606 группы
Тюрина Татьяна Игоревна

____
подпись студента

Научный руководитель:
Профессор Локуциевский Л.В.

____
подпись научного руководителя

Москва
2019

Содержание

1 Введение

В рамках данной работы будет рассмотрена простейшая задача вариационного исчисления с гладким выпуклым решением. При помощи преобразования Лежандра-Юнга-Фенхеля будет получена сопряженная задача. Мы будем сравнивать классические объекты вариационного исчисления в исходной и спорояженной задаче, а именно: уравнение Эйлера, условие Лежандра, уравнение Якоби и условие Вейерштрасса.

2 Формулировка задачи

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} f(t,x,\dot{x})dt \longrightarrow min, \\ x(t_0) = x_0, \\ x(t_1) = x_1. \end{cases}$$

Где $[t_0, t_1]$ - отрезок числовой прямой. $f\colon G \to \mathcal{R}$ - непрерывная функция трех переменных (обозначаемых t, x и $\dot{x}$), где G - открытое подмножество $\mathcal{R}^3$. $x_i \in \mathcal{R}, i = 0, 1$.

Пусть $\hat{x}$ - решение задачи. Мы предполагаем, что $\hat{x}$:

- выпуклая функция (то есть $\ddot{\hat{x}} > 0$),

- непрерывно дифференцируема на $[t_0, t_1]$,

- непрерывна вместе со своими частными производными по x и $\dot{x}$ в окрестности $\Gamma(\hat{x}(\cdot)) = \{(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) | t \in [t_0, t_1]\}$.

В дальнейшем мы будем работать на решении $\hat{x}$, однако для упрощения записей опустим значок "крышки".

Применим преобразование Лежандра-Юнга-Фенхеля к $x(t)$:

$y(s) = \sup_t\{ts - x(t)\}$

Продифференцируем это выражение по t и по s. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} s = \dot{x}(t), \\ y(s) = ts - x(t) \end{cases} \quad \begin{cases} t = y'(s), \\ x(t) = ts - y(s) \end{cases}$$

Тогда $\int_{t_0}^{t_1} f(t,x,\dot{x})dt = \int_{s_0}^{s_1} f(y', y's - y, s)dy'$.

Введем обозначение: $g(s, y, y')$ - такая функция, что $g_{y'} \equiv f(y', y's - y, s)$

Тогда

$$dg = g_s ds + g_y dy + g_{y'} dy' = g_s ds + g_y dy + f(y', y's - y, s)dy'$$

$$\Rightarrow f(y', y's - y, s)dy' = dg - g_s ds - g_y dy$$

Имеем:

$$\int_{s_0}^{s_1} f(y', y's - y, s)dy' = \int_{s_0}^{s_1} (dg - g_s ds - g_y dy) = g\Big|_{s_0}^{s_1} - \int_{s_0}^{s_1} \Big(g_s ds + g_y dy\Big) =$$

$$= g(s_1, y(s_1), y'(s_1)) - g(s_0, y(s_0), y'(s_0)) - \int_{s_0}^{s_1} \Big(g_s + g_y y'\Big) ds$$

Таким образом сопряженная задача выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} -\int_{s_0}^{s_1}\Big(g_s + g_y y'\Big)ds + g(s_1, y(s_1), y'(s_1)) - g(s_0, y(s_0), y'(s_0)) \longrightarrow min, \\ y(s_0) = y_0, \\ y(s_1) = y_1, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} y(s_0) = y_0 = t_0 s_0 - x_0, \\ y(s_1) = y_1 = t_1 s_1 - x_1. \end{cases}$$

3 Классические объекты вариационного исчисления

Сравним классические объекты вариационного исчисления в исходной задаче и в сопряженной, которую мы получили при помощи преобразования Лежандра-Юнга-Фенхеля.

Для начала запишем формулы дифференцирования для функции $f(t, x, \dot{x})$:

$\frac{d}{dt} f(t, x, \dot{x}) = f_t + f_x \dot{x} + f_{\dot{x}} \ddot{x}$

$f(t, x, \dot{x}) = f(y', y's - y, s)$

$$\begin{cases} f_{y'} = f_t + f_x \dot{x}, \\ f_y = -f_x, \\ f_s = f_x t + f_{\dot{x}}, \end{cases}$$

3.1 Уравнение Эйлера

В простейшей задаче вариационного исчисления уравнение Эйлера выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} - L_x = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Запишем его для исходной задачи:

$$\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} - f_x = 0$$

$$\boxed{f_{\dot{x}\dot{x}} \ddot{x} + f_{\dot{x}t} + f_{\dot{x}x} \dot{x} - f_x = 0}$$

Для сопряженной задачи уравнение Эйлера будет выглядеть так:

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}_{y'} - \mathcal{L}_y = 0$$

$\mathcal{L}_y = -(g_{sy} + g_{yy} y')$

$\mathcal{L}_{y'} = -(g_{sy'} + g_{yy'} y' + g_y)$

$$\boxed{-\frac{d}{ds}\left(g_{sy'} + g_{yy'} y' + g_y\right) + g_{sy} + g_{yy} y' = 0}$$

Продифференцируем каждое слагаемое в скобках:
$\frac{d}{ds}g_{sy'} = g_{sy's} + g_{sy'y}y' + g_{sy'y'}y''$
$\frac{d}{ds}\left(g_{yy'}y'\right) = \frac{d}{ds}\left(g_{yy'}\right)y' + g_{yy'}\frac{d}{ds}y' = (g_{yy's} + g_{yy'y}y' + g_{yy'y'}y'')y' + g_{yy'}y''$
$\frac{d}{ds}g_y = g_{ys} + g_{yy}y' + g_{yy'}y''$
Подставим полученные выражения в уравнение Эйлера:

$$-(g_{sy's}+\underline{g_{sy'y}y'}+g_{sy'y'}y''+\underline{g_{yy's}y'}+g_{yy'y}(y')^2+g_{yy'y'}y'y''+\underline{g_{yy'}y''}+\underline{g_{ys}}+\underline{g_{yy}y'}+\underline{g_{yy'}y''})+\underline{g_{sy}}+\underline{g_{yy}y'}=0$$

После приведения подобных слагаемых получаем:

$$g_{sy's} + 2g_{sy'y}y' + g_{sy'y'}y'' + g_{yy'y}(y')^2 + g_{yy'y'}y'y'' + 2g_{yy'}y'' = 0$$

Перейдем к выражению на f, воспользовавшись формулой $g_{y'} = f$:

$$f_{ss} + 2f_{sy}y' + f_{sy'}y'' + f_{yy}(y')^2 + f_{yy'}y'y'' + 2f_y y'' = 0$$

В каждом слагаемом перейдем к исходным переменным $t, x, \dot{x}$:
$f_{ss} = (f_x t + f_{\dot{x}})_s = (f_x t + f_{\dot{x}})_x t + (f_x t + f_{\dot{x}})_{\dot{x}} = f_{xx}t^2 + 2f_{x\dot{x}}t + f_{\dot{x}\dot{x}}$
$f_{sy} = (f_x t + f_{\dot{x}})_y = -(f_x t + f_{\dot{x}})_x = -(f_{xx}t + f_{\dot{x}x})$
$f_{sy'} = (f_x t + f_{\dot{x}})_{y'} = (f_x t + f_{\dot{x}})_t + (f_x t + f_{\dot{x}})_x \dot{x} = f_{xt}t + f_x + f_{\dot{x}t} + f_{xx}t\dot{x} + f_{\dot{x}x}\dot{x}$
$f_y = -f_x,$
$f_{yy} = -(f_y)_x = -(-f_x)_x = f_{xx}$
$f_{yy'} = (-f_x)_{y'} = (-f_x)_t + (-f_x)_x\dot{x} = -(f_{xt} + f_{xx}\dot{x})$
Подставим полученные выражения и воспользуемя формулами $y' = t$ и $y'' = t'_s$:

$$\underline{f_{xx}t^2}+\underline{2f_{x\dot{x}}t}+f_{\dot{x}\dot{x}}-\underline{2t(f_{xx}t}+\underline{f_{\dot{x}x}})+(\underline{f_{xt}t}+\underline{f_x}+f_{\dot{x}t}+\underline{f_{xx}t\dot{x}}+f_{\dot{x}x}\dot{x})t'_s+\underline{f_{xx}t^2}-(\underline{f_{xt}}+\underline{f_{xx}\dot{x})tt'_s}-\underline{2f_x t'_s}=0$$

После приведения подобных слагаемых получаем:

$$\boxed{f_{\dot{x}\dot{x}} + t'_s(-f_x + f_{\dot{x}t} + f_{\dot{x}x}\dot{x}) = 0}$$

Можно заметить, что уравнение Эйлера в исходной и споряженной задаче совпадают. При этом $t'_s = \frac{1}{\ddot{x}}$

3.2 Условие Лежандра

В общем виде условие Лежандра на функцию $x(\cdot)$ выглядит следующим образом:

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Для простейшей задачи вариационного исчисления оно выглядит следующим образом:

$$\boxed{f_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geq 0} \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Запишем условие Лежандра для сопряженной задачи:

$$\mathcal{L}_{y'y'}(s) \geq 0 \quad \forall s \in [s_0, s_1]$$

$\mathcal{L}_{y'y'} = -(g_{sy'} + g_{yy'}y' + g_y)_{y'} = -(g_{sy'y'} + g_{yy'y'}y' + 2g_{yy'}) = |g_{y'} = f| = -(f_{sy'} + f_{yy'}y' + 2f_y)$
Запишем каждое слагаемое через переменные $t, x, \dot{x}$:
$f_{sy'} = f_{xt}t + f_x + f_{\dot{x}t} + f_{xx}t\dot{x} + f_{\dot{x}x}\dot{x}$
$f_y = -f_x,$
$f_{yy'} = -(f_{xt} + f_{xx}\dot{x})$
Подставим полученные выражения:
$\mathcal{L}_{y'y'} = -(\underline{f_{xt}t} + \underline{f_x} + f_{\dot{x}t} + \underline{f_{xx}t\dot{x}} + f_{\dot{x}x}\dot{x} - \underline{t(f_{xt}} + \underline{f_{xx}\dot{x}}) - \underline{2f_x}) = -(-f_x + f_{\dot{x}t} + f_{\dot{x}x}\dot{x})$
Из уравнения Эйлера $-f_x + f_{\dot{x}t} + f_{\dot{x}x}\dot{x} = -f_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}$
Тогда $\mathcal{L}_{y'y'} = f_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} \geq 0$.
Поскольку в силу выпуклости оптимального решения $\ddot{x} \geq 0$, оно не влияет на знак $\mathcal{L}_{y'y'}$. Поэтому данное условие равносильно тому, что $\boxed{f_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} \geq 0}$
То есть условие Лежандра в исходной и сопряженной задаче совпадают.

3.3 Связь между $\frac{d}{dt}$ и $\frac{d}{ds}$

Прежде чем приступить к рассмотрению остальных объектов вариационного исчисления, надем зависимость между $\frac{d}{dt}$ и $\frac{d}{ds}$.
$\frac{d}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{dt}{dt} = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt} = \frac{\frac{d}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$
$s = \dot{x}(t) \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \ddot{x}$
$t = y'(s) \Rightarrow \frac{dt}{ds} = y''$
Поэтому

$$\frac{d}{dt} = \ddot{x}\frac{d}{ds}$$
$$\frac{d}{ds} = y''\frac{d}{dt}$$
$$\ddot{x} = \frac{1}{y''}$$

3.4 Уравнение Якоби

В общем виде уравнение Якоби выглядит следующим образом:

$$-\frac{d}{dt}\Big(L_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + L_{\dot{x}x}(t)h(t)\Big) + L_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + L_{xx}(t)h(t) = 0$$

Где $h(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathcal{R}^n), h(t_0) = h(t_1) = 0$
Запишем уравнение Якоби для исходной задачи:

$$\boxed{-\frac{d}{dt}\Big(f_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + f_{\dot{x}x}(t)h(t)\Big) + f_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + f_{xx}(t)h(t) = 0}$$

Для сопряженной задачи оно будет выглядеть следующим образом:

$$-\frac{d}{ds}\Big(\mathcal{L}_{y'y'}(s)k'(s) + \mathcal{L}_{y'y}(s)k(s)\Big) + \mathcal{L}_{yy'}(s)k'(s) + \mathcal{L}_{yy}(s)k(s) = 0$$

$\mathcal{L}_{y'y'} = f_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}$

$\mathcal{L}_{yy'} = -(g_{sy} + g_{yy}y')_{y'} = -(g_{syy'} + g_{yyy'}y' + g_{yy}) = |g_{y'} = f| = -(f_{sy} + f_{yy}y' + g_{yy})$

$$\begin{cases} f_{sy} = -(f_{xx}t + f_{\dot{x}x}) \\ f_{yy} = f_{xx} \\ y' = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}_{yy'} = -(-\underline{f_{xx}t} - f_{\dot{x}x} + \underline{f_{xx}t} + g_{yy}) = f_{\dot{x}x} - g_{yy}$$

$\mathcal{L}_{yy} = -(g_{sy} + g_{yy}y')_y = -(g_{syy} + g_{yyy}y')$

Подставим полученные выражения:

$$-\frac{d}{ds}\Big(f_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}k'(s) + (f_{\dot{x}x} - g_{yy})k(s)\Big) + (f_{\dot{x}x} - g_{yy})k'(s) - (g_{syy} + g_{yyy}y')k(s) =$$

$$= -\frac{d}{ds}\Big(f_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}k'(s) + f_{\dot{x}x}k(s)\Big) + \frac{d}{ds}\Big(g_{yy}k(s)\Big) + f_{\dot{x}x}k'(s) - g_{yy}k'(s) - (g_{syy} + g_{yyy}y')k(s) =$$

$$= -\frac{d}{ds}\Big(f_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}k'(s) + f_{\dot{x}x}k(s)\Big) + (\underline{g_{yys}} + \underline{g_{yyy}y'} + \underbrace{g_{yyy'}y''}_{\frac{f_{xx}}{\ddot{x}}})k(s) + \underline{g_{yy}k'(s)} + f_{\dot{x}x}k'(s) - \underline{g_{yy}k'(s)} - (\underline{g_{syy}} + \underline{g_{yyy}y'})k(s) =$$

$$= -\frac{d}{ds}\Big(f_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}k'(s) + f_{\dot{x}x}k(s)\Big) + f_{\dot{x}x}k'(s) + \frac{f_{xx}}{\ddot{x}}k(s) =$$

$$= -\frac{\frac{d}{dt}\Big(f_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}k'(s) + f_{\dot{x}x}k(s)\Big)}{\ddot{x}} + f_{\dot{x}x}k'(s) + \frac{f_{xx}}{\ddot{x}}k(s)$$

Домножим выражение на $\ddot{x}$

$$-\frac{d}{dt}\Big(f_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}k'(s) + f_{\dot{x}x}k(s)\Big) + f_{\dot{x}x}\ddot{x}k'(s) + f_{xx}k(s) = 0$$

$h(t) = k(s)$

$\dot{h}(t) = k(s)s'(t) = k(s)\ddot{x}$

Подставим полученные значения:

$$\boxed{-\frac{d}{dt}\Big(f_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + f_{\dot{x}x}(t)h(t)\Big) + f_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + f_{xx}(t)h(t) = 0}$$

То есть уравнение Якоби совпадает в исходной и сопряженной задаче.

3.5 Условие Вейерштрасса

В общем виде условие Вейерштрасса на экстремали x выглядит следующим образом

$$\mathcal{E}(t,x,\dot{x},u) = L(t,x,u) - L(t,x,\dot{x}) - L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})(u-\dot{x}) \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{R}^n \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Запишем условие Вейерштрасса для исходной задачи

$$\boxed{f(t,x,u) - f(t,x,\dot{x}) - f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})(u-\dot{x}) \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{R}^n \quad \forall t \in [t_0, t_1]}$$

Для сопряженной задачи оно будет выглядеть следующим образом

$$\mathcal{L}(s,y,v)-\mathcal{L}(s,y,y')-\mathcal{L}_{y'}(s,y,y')(v-y')\geq 0 \quad \forall v\in\mathcal{R}^n \quad \forall s\in[s_0,s_1]$$

$\mathcal{L}(s,y,v)=-(g_s(s,y,v)+g_y(s,y,v)v)$
$\mathcal{L}(s,y,y')=-(g_s(s,y,y')+g_y(s,y,y')y')$
$\mathcal{L}_{y'}(s,y,y')=-(g_{sy'}(s,y,y')+g_{yy'}(s,y,y')y'+g_y(s,y,y'))$
Подставим эти значения в выражение

$$-(g_s(s,y,v)+g_y(s,y,v)v)+g_s(s,y,y')+\underline{g_y(s,y,y')y'}+(g_{sy'}(s,y,y')+g_{yy'}(s,y,y')y'+\underline{g_y(s,y,y')})(v-y')=$$

Поскольку $g_{y'}(s,y,y')=f(t,x,\dot{x})$:
$g_{sy'}(s,y,y')=f_s(t,x,\dot{x})=f_x(t,x,\dot{x})t+f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})$
$g_{yy'}(s,y,y')=f_y(t,x,\dot{x})=-f_x(t,x,\dot{x})$
Тогда имеем

$$=g_s(s,y,y')-g_s(s,y,v)+(g_y(s,y,y')-g_y(s,y,v))v+(\underline{f_x(t,x,\dot{x})t}+f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})-\underline{f_x(t,x,\dot{x})t})(v-t)=$$

$$=g_s(s,y,y')-g_s(s,y,v)+(g_y(s,y,y')-g_y(s,y,v))v+f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})(v-t)$$

В рамках данной работы привести это выражение к виду, записанному для исходной задачи, не получилось. Поэтому выше приведен лишь промежуточный результат.

4 Пример

4.1 Исходная задача

В качестве примера применения данного подхода рассмотрим обобщение классической аэродинамической задачи Ньютона, так как в числителе вместо t стоитt^2.

$$\begin{cases} \int_0^1 \frac{t^2dt}{1+u^2}\longrightarrow min, \\ \dot{x}=u, \\ x(0)=0, \\ x(1)=x_1, \\ u\geq 0 \end{cases}$$

Сначала решим задачу с помощью принципа максимума Понтрягина.

$$\mathcal{L}=\int_0^1(\frac{\lambda_0 t^2}{1+u^2}+p(\dot{x}-u))dt+\mu_0x(0)+\mu_1(x(1)-x_1)$$

1. Уравнение Эйлера:

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}-L_x=0\Rightarrow\dot{p}=0\Rightarrow p(t)\equiv const=p_0$$

2. Условия трансверсальности:

$$\begin{cases} p(0)=\mu_0, \\ p(1)=-\mu_1 \end{cases}\Rightarrow p_0=\mu_0=-\mu_1$$

3. Условие минимальности по u:

$$\min_{u\in\Re_+}(\frac{\lambda_0 t^2}{1+u^2}-p_0u)=\frac{\hat{\lambda}_0 t^2}{1+\hat{u}^2(t)}-p_0\hat{u}(t)$$

4. Пусть $\hat{\lambda}_0=0$.
Положим $p_0=0$. Тогда $\hat{\lambda}_0=p_0=\mu_0=\mu_1=0$, но все множители Лагранжа не могут обратиться в нуль одновременно. Значит, $p_0\neq 0$. Из условия минимальности получаем, что $\hat{u}(t)\equiv 0\Rightarrow \hat{x}(t)=\int_0^1\hat{u}(t)dt\equiv 0$. Значит $\hat{\lambda}_0\neq 0$.
5. Положим $\hat{\lambda}_0=1$.
Рассмотрим случай, когда $p_0>0$. При таких значениях p_0 функция $\frac{\lambda_0 t^2}{1+u^2}-p_0u$ монотонно убывает, и условие минимальности по u не выполняется при $u>\hat{u}(t)$. То есть $p_0<0$.
Итак, при $t\to 0$ имеем:

$$\min_{u\in\Re_+}(\frac{t^2}{1+u^2}-p_0u)=-p_0\hat{u}(t)\Rightarrow \hat{u}(t)=0$$

То есть до некоторого момента оптимальное управление равняется нулю. Затем $\hat{u}(t)$ ищется из уравнения $L_u=0$:

$$-\frac{t^2 2u}{(1+u^2)^2}-p_0=0\Rightarrow -p_0=\frac{2ut^2}{(1+u^2)^2}$$

Момент переключения τ определяется тем, что функция $u\to\frac{\tau^2}{1+u^2}-p_0u$ имеет два равных минимума: в нуле и в точке, определяемой из уравнения $-p_0=\frac{2ut^2}{(1+u^2)^2}$ при $t=\tau$. Иначе говоря, в момент переключения должны удовлетворяться следующие соотношения:

$$\begin{cases}\frac{\tau^2}{1+\hat{u}^2(t)}-p_0\hat{u}(t)=\tau^2,\\ -p_0=\frac{2\hat{u}(t)\tau^2}{(1+\hat{u}^2(t))^2}.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим p_0

$$p_0=-\frac{\hat{u}(t)\tau^2}{1+\hat{u}^2(t)}$$

И подставив во второе уравнение, получим значение для $\hat{u}(t)$:

$$\hat{u}(t)=1$$

Теперь мы можем найти момент переключения:

$$\tau=\sqrt{-2p_0}$$

После переключения оптимальное решение удовлетворяет соотношению

$$p_0=-\frac{2u(t)t^2}{(1+u^2(t))^2}$$

Из этого соотношения мы можем выразить t

$$t^2=-\frac{p_0(1+u^2(t))^2}{2u}=-\frac{p_0}{2}(\frac{1}{u}+2u+u^3)\Rightarrow t=\sqrt{-\frac{p_0}{2}(\frac{1}{u}+2u+u^3)}$$

Отлично, теперь будем искать оптимальную кривую $\hat{x}(t,p_0)$ при помощи следующего разложения:

$$\frac{dx}{du}=\frac{dx}{dt}\frac{dt}{du}=u\frac{dt}{du}=\sqrt{-\frac{p_0}{2}}\frac{1}{2}\frac{u(3u^2+2-\frac{1}{u^2})}{\sqrt{u^3+2u+\frac{1}{u}}}$$

Тогда имеем:

$$\hat{x}(t,p_0)=\sqrt{-\frac{p_0}{2}}\frac{1}{2}\int\frac{u(3u^2+2-\frac{1}{u^2})}{\sqrt{u^3+2u+\frac{1}{u}}}du$$

Приведём интеграл к более удобному виду

$$\int\frac{u(3u^2+2-\frac{1}{u^2})}{\sqrt{u^3+2u+\frac{1}{u}}}du=\frac{1}{2}\int\frac{(3u^2+2-\frac{1}{u^2})}{\sqrt{\frac{(1+u^2)^2}{u}}}du^2=|u^2=v|=\frac{1}{2}\int\frac{(3v+2-\frac{1}{v})}{(\frac{(1+v)^2}{\sqrt{v}})^{\frac{1}{2}}}dv=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(v+1)(v-\frac{1}{3})}{(v)^{\frac{3}{4}}(v+1)}dv=\frac{1}{2}\int(v-\frac{1}{3})v^{-\frac{3}{4}}dv$$

То есть

$$\begin{cases}\hat{x}(t,p_0)=\sqrt{-\frac{p_0}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int(v-}\frac{1}{3})v^{-\frac{3}{4}}dv,\\ t=\sqrt{-\frac{p_0}{2}(\frac{1}{u}+2u+u^3)}.\end{cases}$$

4.2 Сопряженная задача

Итак, мы решили обобщенную аэродинамическую задачу Ньютона с t^2 в числителе с помощью принципа максимума Понтрягина. Теперь проведем ее решение с помощью перехода к сопряженной задаче. Для этого воспользуемся преобразованием Лежандра-Юнга-Фенхеля.

$$\begin{cases}s=\dot{x}(t)=u,\\ y(s)=ts-x(t)\end{cases}\quad\begin{cases}t=y'(s),\\ x(t)=ts-y(s)\end{cases}$$

Тогда исходный интеграл примет следующий вид (пределы интегрирования сохранились, поскольку минимизация имеет смысл только на промежутке от 0 до 1):

$$\int_0^1\frac{t^2dt}{1+u^2}=\int_0^1\frac{y'^2(s)dy'}{1+s^2}$$

Преобразуем полученный интеграл к более удобному виду:

$$\int_0^1\frac{y'^2dy'}{1+s^2}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{dy'^3}{1+s^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{y'^3}{1+s^2}\bigg|_0^1-\int_0^1 y'^3d(1+s^2)^{-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{y'^3(1)}{2}-y'^3(0)\right)+\frac{2}{3}\int_0^1\frac{y'^3s}{(1+s^2)^2}ds$$

Таким образом мы получили следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{v^3 s}{(1+s^2)^2} ds + \frac{1}{3}\left(\frac{v^3(1)}{2} - v^3(0)\right) \longrightarrow min, \\ y' = v, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = y_1, \end{cases}$$

Решим полученную задачу.

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \left(\lambda_0 \frac{2}{3}\frac{v^3 s}{(1+s^2)^2} + q(y'-v)\right) ds + \lambda_0 \frac{1}{3}\left(\frac{v^3(1)}{2} - v^3(0)\right) + \lambda_1 y(0) + \lambda_2(y(1) - y_1)$$

Уравнение Эйлера:

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}_{y'} - \mathcal{L}_y = 0$$

$$\mathcal{L}_y = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\mathcal{L}_{y'} = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{y'} = const \Rightarrow q = const$$

Условия трансверсальности:

$$\begin{cases} q(0) = \lambda_0, \\ q(1) = -\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow q_0 = \lambda_0 = -\lambda_1$$

Условие минимальности по v:

$$\min_{v \in \Re_+} (\lambda_0 \frac{2}{3}\frac{v^3 s}{(1+s^2)^2} - qv) = (\lambda_0 \frac{2}{3}\frac{\hat{v}^3 s}{(1+s^2)^2} - q\hat{v})$$

Положим $\lambda_0 = 1$. Найдем оптимальное управление из уравнения $\mathcal{L}_v = 0$

$$\mathcal{L}_v = \frac{2v^2 s}{(1+s^2)^2} - q_0 = 0$$

$$\Rightarrow y' = \sqrt{\frac{q_0(1+s^2)^2}{2s}} = \sqrt{\frac{q_0}{2}(\frac{1}{s} + 2s + s^3)}$$

Если произвести обратную замену переменных, то мы получим в точности такое же выражение на t, как в исходной задаче:

$$\begin{cases} y' = t, \\ s = \dot{x} = u, \\ q_0 = -p_0 \end{cases} \Rightarrow t = \sqrt{-\frac{p_0}{2}(\frac{1}{u} + 2u + u^3)}$$

Чтобы найти $y(s)$ в явном виде, проинтегрируем по s выражение для y'

$$y' = \frac{dy}{ds} = \sqrt{\frac{q_0(1+s^2)^2}{2s}}$$

$$y(q_0,s) = \sqrt{\frac{q_0}{2}} \int \sqrt{\frac{(1+s^2)^2}{s}} ds = \sqrt{\frac{q_0}{2}} \int \frac{(1+s^2)}{\sqrt{s}} ds = \sqrt{\frac{q_0}{2}} \left(\int s^{\frac{1}{2}} ds + \int s^{\frac{3}{2}} ds \right) =$$
$$= \sqrt{\frac{q_0}{2}} \left(2\sqrt{s} + s^{\frac{5}{2}} \frac{2}{5} \right)$$

Для перехода к выражению на $x(t)$ достаточно будет воспользоваться формулой $x(t) = y'(s)s - y(s)$.

5 Заключение

В рамках данной работы была рассмотрена простейшая задача вариационного исчисления с гладким выпуклым решением и сопряженная к ней, полученная при помощи преобразования Лежандра-Юнга-Фенхеля. Было установлено, что следующие классические объекты вариационного исчисления совпадают в исходной и сопряженной задаче: уравнение Эйлера, условие Лежандра, уравнение Якоби. Условие Вейерштрасса сопряженной задачи привести к виду, записанному для исходной задачи, не удалось.

Список литературы

[1] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. Оптимальное управление.

[2] В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи.