Задачи по вариационному исчислению и оптимальному управлению (2011)

1. Приведите пример бесконечномерного банахова пространства и непрерывной коэрцитивной функции на нем, не достигающей минимума.

2. Докажите, что пространство $C^1[t_0, t_1]$ полно.

3. Приведите пример простейшей задачи классического вариационного исчисления

$$\int_{t_0}^{t_1} (x, \dot{x})dt \to \mathrm{extr},$$

для которой существует функция $x(\cdot)$, удовлетворяюшая уравнению интеграла энергии, но не являющаяся экстремалью.

4. Приведите пример непрерывного отображения замкнутого шара бесконечномерного банахова пространства в себя без неподвижных точек.

5. Докажите, что в задаче с подвижными концами

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})dt + \psi_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \mathrm{extr},$$

$$\psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

необходимо выполнение уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} = \hat{L}_x(t), \quad t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1].$$

6. Пусть $\tau_0 < \tau < \tau_1$, $x(\cdot) \in C^1[\tau_0, \tau)$, $x(\cdot) \in C^1(\tau, \tau_1]$, $\delta > 0$. Тогда найдется функция $y(\cdot) \in C^1[\tau_0, \tau)$ такая, что $y(t) = x(t)$ при $|t - \tau| \geq \delta$ и $\max_{t \in [\tau-\delta, \tau+\delta]} |\dot{y}(t)| \leq \max_{t \in [\tau-\delta, \tau+\delta]} |\dot{x}(t)|$.

7. Покажите, что если $\hat{x}$– допустимая экстремаль в простейшей задаче классического вариационного исчисления с интегрантом вида $L(t, \dot{x})$ и при этом выполнено условие Вейерштрасса, то экстремаль $\hat{x}$ доставляет сильный минимум.

8. Приведите пример простейшей задачи классического вариационного исчисления

$$\int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x})dt \to \min,$$

с гладким интегрантом такой, что на экстремали выполнено усиленное условие Лежандра, на $(t_0, t_1]$ нет сопряженных точек,

$$\mathcal{E}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), v) \geq 0$$

для любых v и $t \in [t_0, t_1]$, но при этом $\hat{x}$ не доставляет сильного минимума.

9. Привести примеры простейших задач классического вариационного исчисления

$$\int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x})dt \to \mathrm{extr}, \quad x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1,$$

и допустимых экстремалей $\hat{x}$ таких, что L дважды непрерывно дифференцируема, $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t > 0)$ на $[t_0, t_1]$ и при этом а) нет сопряженных точек на $[t_0, t_1)$, но $\hat{x}$ не доставляет слабого минимума;

б) t_1 является сопряженной точкой, а $\hat{x}$ доставляет слабый минимум.

10. Рассмотрим простейшую задачу классического вариационного исчисления с интегрантом $L = A_{00}(t)x^2(t) + A_{01}(t)x(t)\dot{x}(t) + A_{11}(t)\dot{x}^2(t) + A_0(t)x(t) + A_1(t)\dot{x}(t)$. Покажите, что слабы й минимум для такой задачи является и сильным минимумом.

11. Привести пример задачи оптимального управления, в которой функция p (функциональный множитель Лагранжа) не является непрерывно дифференцируемой.

12. Приведите пример задачи оптимального управления

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt \to \min, \quad x(t_0) = x_0,\, x(t_1) = x_1,$$

$$\dot{x} = u, \quad u(t) \in U,$$

такой, что при применении к ней принципа максимума Понтрягина необходимо брать $\lambda_0 = 0$.

13. Докажите, что для задачи оптимального управления

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt \to \min, \quad x(t_0) = x_0,\, x(t_1) = x_1,$$

$$\dot{x} = u, \quad u(t) \in \mathbb{R}^n,$$

при применении к ней принципа максимума Понтрягина мы имеем $\lambda_0 \neq 0$.

14. Докажите, что в теореме Филиппова условие выпуклости существенно.

15. Докажите, что в теореме Филиппова неравенство для скалярного произведения существенно.

В примере к задаче 15, написанном на лекции, должно быть $u \in [-1, 1]$.