МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико–математический факультет
кафедра Общих проблем управления

О ПЕРЕВЕРНУТОМ ДВУЗВЕННОМ МАЯТНИКЕ

Дипломная работа
студентки 512 группы
Ронжиной Марии Игоревны

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
профессор
М.И. Зеликин

Москва - 2014

Введение

В данной работе изучается плоское движение двойного перевернутого математического маятника с подвижной точкой подвеса – тележкой. Управление маятником осуществляется при помощи силы, приложенной к тележке. Сила ограничена по абсолютной величине единицей.

Цель данной работы - построение синтеза управления, минимизирующего среднеквадратичное отклонение по углам от неустойчивого положения равновесия.

В работе доказано существование локально оптимального особого режима; доказано утверждение о том, что оптимальное управление испытывает бесконечное число учащающихся переключений за конечный период времени. С теорией четтеринг-режимов (режимов с учащающимися переключениями) можно познакомиться в трудах М. И. Зеликина и В. Ф. Борисова [2, 3, 4].

Трудность управления двойным маятником с подвижной точкой подвеса заключается в том, что он содержит три степени свободы и его движение описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. Среди работ, посвященных двойному перевернутому маятнику, можно выделить работы А. М. Формальского, в которых рассматривается маятник с неподвижной точкой подвеса с управляющим моментом в одном из шарниров. В работах [5, 6] были изучены задачи локальной и глобальной стабилизации неустойчивого состояния равновесия. В совместной работе Ю. Г. Мартыненко и А. М. Формальского [7] была рассмотрена задача стабилизации многозвенного плоского перевернутого маятника на колесе с управляющим моментом в шарнире, соединяющем первое звено с центром колеса, а также приведено полное решение для маятника с одним звеном.

Механическая интерпретация. Уравнения движения.

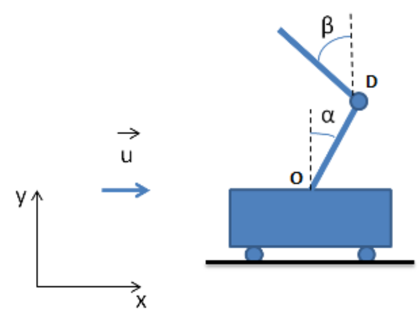

Рис. 1: Двойной перевернутый маятник на тележке.

Рассмотрим задачу управления плоским двойным маятником, прикрепленным к движущейся тележке. Мы предполагаем, что тележка может перемещаться вдоль оси Ox (Рис. 1).

Трение в шарнирах не учитывается. Звенья маятника считаем абсолютно твердыми телами. Центр масс первого звена расположен на отрезке OD. Центр масс второго звена расположен на втором отрезке, начинающемся в точке D. На тележку действует горизонтальная управляющая сила u, $|u| \leqslant 1$.

Пусть α - отсчитываемый по часовой стрелке угол отклонения первого звена от вертикали, β - угол отклонения второго звена от вертикали, отсчитываемый против часовой стрелки. M — масса тележки, m_1, m_2 — соответственно массы первого и второго звена; r_1, r_2 — расстояния до центра масс; I_1, I_2 — моменты инерции относительно центра масс соответственно первого и второго стержня; g — ускорение свободного падения; l — длина первого стержня.

Кинетическую энергию T и силовую функцию U маятника представим в виде

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}[a_{11}\ddot{x} + a_{12}\dot{x}\dot{\alpha}\cos\alpha + a_{14}\dot{x}\dot{\beta}\cos\beta + a_{22}\dot{\alpha}^2 + a_{23}\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha+\beta) + a_{33}\dot{\beta}^2]; \\ U = -b_1\cos\alpha - b_2\cos\beta, \\ \text{где} \quad a_{11} = M + m_1 + m_2; \quad a_{12} = 2m_1r_1 + 2m_2r_2; \quad a_{13} = -2m_2r_2; \\ a_{22} = m_1r_1^2 + m_2l^2 + I_1; \quad a_{23} = -2m_2lr_2; \quad a_{33} = m_2r_2^2 + I_2; \\ b_1 = m_1gr_1 + m_2gr_2; \quad b_2 = m_2gr_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Запишем уравнения Эйлера - Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i, i = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Здесь $L = T + U$, q_i — обобщенные координаты, f_i — действующие на систему силы.
Учитывая (1), получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[a_{12}\ddot{x}\cos\alpha + 2a_{22}\ddot{\alpha} + a_{23}\ddot{\beta}\cos(\alpha+\beta) - a_{23}\dot{\beta}^2\sin(\alpha+\beta)] - b_1\sin\alpha = 0;\\
&\frac{1}{2}[a_{13}\ddot{x}\cos\beta + a_{23}\ddot{\alpha}\cos(\alpha+\beta) + 2a_{33}\ddot{\beta} - a_{23}\dot{\alpha}^2\sin(\alpha+\beta)] - b_2\sin\beta = 0;\\
&\frac{1}{2}[2a_{11}\ddot{x} + a_{12}\ddot{\alpha}\cos\alpha + a_{13}\ddot{\beta}\cos\beta - a_{12}\dot{\alpha}^2\sin\alpha - a_{13}\dot{\beta}^2\sin\beta] = u.
\end{aligned} \tag{3}$$

При $u = 0$ система уравнений (3) имеет тривиальное решение

$$x = \dot{x} = \alpha = \dot{\alpha} = \beta = \dot{\beta} \equiv 0,$$

которое отвечает неустойчивому положению равновесия.

Цель данной работы — синтез управления, минимизирующего среднеквадратичное отклонение по углам от неустойчивого положения равновесия.

$$\int\limits_0^\infty (\alpha^2(t) + \beta^2(t))\,dt \to min \tag{4}$$

Т.е. мы рассматриваем положение

$$\alpha = \dot{\alpha} = \beta = \dot{\beta} \equiv 0. \tag{5}$$

Считаем, что в начальный момент времени система находится в достаточно малой окрестности верхнего неустойчивого положения равновесия (5).

При линеаризации уравнения (3) в окрестности положения (5), получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
a_{11}\ddot{x} + \frac{1}{2}a_{12}\ddot{\alpha} + \frac{1}{2}a_{13}\ddot{\beta} &= u;\\
\frac{1}{2}a_{12}\ddot{x} + a_{22}\ddot{\alpha} + \frac{1}{2}a_{23}\ddot{\beta} - b_1\alpha &= 0;\\
\frac{1}{2}a_{13}\ddot{x} + \frac{1}{2}a_{23}\ddot{\alpha} + a_{33}\ddot{\beta} - b_2\beta &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Выразим $\ddot{x}$ из первого уравнения системы (6) и подставим в остальные два. Получим:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{1}{a_{11}} - \frac{1}{2a_{11}}a_{12}\ddot{\alpha} - \frac{1}{2a_{11}}a_{13}\ddot{\beta};\\
(a_{22} - \frac{1}{4a_{11}}a_{12}^2)\ddot{\alpha} + (\frac{1}{2}a_{23} - \frac{1}{4a_{11}}a_{12}a_{13})\ddot{\beta} - b_1\alpha &= -\frac{a_{12}}{4a_{11}}u;\\
(\frac{1}{2}a_{23} - \frac{1}{4a_{11}}a_{12}a_{13})\ddot{\alpha} + (a_{33} - \frac{1}{4a_{11}}a_{13}^2)\ddot{\beta} - b_2\beta &= -\frac{a_{13}}{4a_{11}}u;
\end{aligned} \tag{7}$$

Далее рассматриваем только второе и третье уравнения системы (7). Их можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
A_{11}\ddot{\alpha} + A_{12}\ddot{\beta} - b_1\alpha &= c_1 u;\\
A_{12}\ddot{\alpha} + A_{22}\ddot{\beta} - b_2\beta &= c_2 u.
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь

$$A_{11} = a_{22} - \frac{1}{4a_{11}}a_{12}^2;\ A_{12} = \frac{1}{2}a_{23} - \frac{1}{4a_{11}}a_{12}a_{13};$$
$$A_{22} = a_{33} - \frac{1}{4a_{11}}a_{13}^2;\ c_1 = -\frac{a_{12}}{4a_{11}};\ c_2 = -\frac{a_{13}}{4a_{11}}.$$

Покажем, что систему (8) можно привести к виду

$$\ddot{x} - \Lambda x = du, \text{ где } \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ – диагональная матрица.} \tag{9}$$

Рассмотрим невырожденное преобразование $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, где К определим ниже.

Перепишем систему (8) в векторном виде:

$$A\ddot{\gamma} + B\gamma = cu, \text{ где } A = (A_{ij})\, \gamma = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \, B = \begin{pmatrix} -b_1 & 0 \\ 0 & -b_2 \end{pmatrix}, \, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $det(A) > 0$ (доказано ниже), поэтому существует обратная матрица A^{-1}.

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma} + A^{-1}B\gamma &= A^{-1}cu, \\ K\ddot{x} + A^{-1}BKx &= A^{-1}cu, \\ \ddot{x} + K^{-1}A^{-1}BKx &= A^{-1}cu. \end{aligned}$$

Т.е. преобразование К выбираем так, чтобы столбцы матрицы преобразования были линейно независимыми собственными векторами матрицы $A^{-1}B$. Заметим, что корни характеристического уравнения для системы (8) совпадают с собственными числами матрицы $A^{-1}B$.

Утверждение 1 *Корни характеристического уравнения для системы (8) - положительные действительные числа, не равные друг другу:* $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

Доказательство утверждения 1.

Решим характеристическое уравнение для системы (8)

$$\begin{vmatrix} A_{11}\lambda - b_1 & A_{12}\lambda \\ A_{12}\lambda & A_{22}\lambda - b_2 \end{vmatrix} = 0$$
$$(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)\lambda^2 - (b_1A_{22} + b_2A_{11})\lambda + b_1b_2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{b_1A_{22} + b_2A_{11} \pm \sqrt{(b_1A_{22} - b_2A_{11})^2 + 4b_1b_2A_{12}^2}}{2(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)} \tag{10}$$

Из (10) следует, что λ_1, λ_2 – действительные числа.

Т.к. кинетическая энергия T в окрестности положения равновесия - положительно определенная функция, то матрица $a = (a_{ij})$ - симметричная, положительно определенная.

Матрицу $A = (A_{ij})$ мы получили следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}a_{12} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2}a_{13} & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}a_{12}/a_{11} & \frac{1}{2}a_{13}/a_{11} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \frac{1}{2}a_{23} \\ \frac{1}{2}a_{13} & \frac{1}{2}a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}a_{12}/a_{11} & \frac{1}{2}a_{13}/a_{11} \\ 0 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{11}$$

В левой части (11) стоит произведение матриц с положительными определителями, следовательно, у $\hat{A}$ определитель больше нуля. Значит, и $det(A) > 0$. В силу положительной определенности $a = (a_{ij})$, $A_{11} = a_{22} - \frac{1}{4a_{11}}a_{12}^2 > 0$. Из этих соображений следует, что матрица $A = (A_{ij})$-симметричная, положительно определенная. Поэтому, $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0$.

Сравним

$$\begin{aligned} b_1A_{22}+b_2A_{11} &\quad\vee\quad \sqrt{(b_1A_{22}-b_2A_{11})^2+4b_1b_2A_{12}^2}, \\ (b_1A_{22}+b_2A_{11})^2 &\quad\vee\quad (b_1A_{22}-b_2A_{11})^2+4b_1b_2A_{12}^2, \\ 4b_1b_2A_{22}A_{11} &\quad\vee\quad 4b_1b_2A_{12}^2, \end{aligned}$$

т.к. $A_{11}A_{22}-A_{12}^2>0$, то

$$b_1A_{22}+b_2A_{11} \quad > \quad \sqrt{(b_1A_{22}-b_2A_{11})^2+4b_1b_2A_{12}^2}.$$

Следовательно, выполнено $\lambda_1>\lambda_2>0$. ■

Таким образом, при помощи невырожденного преобразования (столбцы которого – собственные векторы матрицы $A^{-1}B$, соответствующие собственным значениям λ_1,λ_2)

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}, \text{ где } \quad K=\begin{pmatrix}\frac{A_{11}b_2-\lambda_1(A_{11}A_{22}-A_{12}^2)}{A_{12}b_1} & \frac{A_{11}b_2-\lambda_2(A_{11}A_{22}-A_{12}^2)}{A_{12}b_1}\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \tag{12}$$

система (8) может быть приведена к виду (9).

$$\begin{aligned} d=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix}=K^{-1}A^{-1}c=\frac{1}{(A_{11}A_{22}-A_{12}^2)^2(\lambda_1-\lambda_2)}\times \\ \times\begin{pmatrix}A_{12}A_{22}(b_1-2b_2)-A_{12}\lambda_1 & A_{12}^2b_1-2A_{11}A_{22}b_2+\lambda_1A_{11}\\ -A_{12}A_{22}(b_1-2b_2)+A_{12}\lambda_2 & -A_{12}^2b_1+2A_{11}A_{22}b_2-\lambda_2A_{11}\end{pmatrix}c. \end{aligned}$$

Если $d_1=0$ или $d_2=0$, то система будет неуправляемой. В дальнейшем будем предполагать, что $d_1d_2\neq 0$.

Рассмотрим матрицу $\tilde{K}=(K^{-1})^TK^{-1}$; она симметричная, положительно определенная. Тогда при помощи преобразования (12) квадратичная форма в целевой формуле (4) примет вид:
$\alpha^2+\beta^2=<\tilde{K}x,x>=k_{11}x_1^2+2k_{12}x_1x_2+k_{22}x_2^2$, где $k_{ij}, 1\leqslant i\leqslant j\leqslant 2$ – элементы матрицы $\tilde{K}$.

Таким образом, мы будем исследовать решения следующей задачи (13).

Задача оптимального управления

Минимизировать следующий функционал:

$$\begin{gathered} \int\limits_0^\infty <\tilde{K}x,x>\ dt\to min \\ \ddot{x}-\mathit{\Lambda} x=du,\ \mathit{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \\ |u|\leqslant 1. \end{gathered} \tag{13}$$

Будем предполагать, что $k_{11}>0, k_{22}>0, k_{11}k_{22}-k_{12}^2>0,\ \lambda_1>\lambda_2>0,\ d_1d_2\neq 0$.

Перепишем систему из (13) в следующем виде:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = y_1; \\
\dot{y}_1 = \lambda_1 x_1 + d_1 u; \\
\dot{x}_2 = y_2; \\
\dot{y}_2 = \lambda_2 x_2 + d_2 u.
\end{cases}
\tag{14}
$$

Запишем функцию Понтрягина [1]:

$$
H(x, y, \phi, \psi) = -\frac{1}{2} < \tilde{K}x, x > + < y, \phi > + < x, \Lambda\psi > + < d, \psi > u = H_0 + uH_1,
$$

где ϕ, ψ – сопряженные переменные, удовлетворяющие следующей системе:

$$
\begin{cases}
\dot{\phi}_1 = k_{11}x_1 + k_{12}x_2 - \lambda_1\psi_1, \\
\dot{\psi}_1 = -\phi_1, \\
\dot{\phi}_2 = k_{22}x_2 + k_{12}x_1 - \lambda_2\psi_2, \\
\dot{\psi}_2 = -\phi_2.
\end{cases}
\tag{15}
$$

Управление u определяется из условия максимума:

$$
u = \underset{|u| \leqslant 1}{argmax H} = \begin{cases}
1, \quad H_1(t) > 0; \\
-1, \quad H_1(t) < 0; \\
\text{особое}, \ H_1(t) = 0, \quad t \in (t_1, t_2), \ t_1 \neq t_2.
\end{cases}
$$

Поскольку время T не фиксировано, оптимальные траектории принадлежат нулевой поверхности уровня гамильтониана

$H(x(t), y(t), \phi(t), \psi(t)) = H_0(x(t), y(t), \phi(t), \psi(t)) + uH_1(x(t), y(t), \phi(t), \psi(t)) = 0.$

Отдельный интерес в данной задаче представляет случай особого управления, т.е. когда $H_1(t) = 0$, $t \in (t_1, t_2)$, $t_1 \neq t_2$.

Ниже предлагается необходимый минимум по данной теории.

Введение в теорию траекторий с учащающимися переключениями в окрестности многообразия особых траекторий второго порядка [2]-[4].

Рассмотрим задачу.

Минимизировать интеграл:

$$
\int_0^T f_0(x) + uf_1(x)\, dt \to inf \tag{16}
$$

на траекториях управляемой системы

$$
\dot{x} = \phi_0(x) + u\phi_1(x), \tag{17}
$$

аффинно порожденной скалярным управлением $|u| \leqslant 1$.

Здесь $x \in \mathbb{R}^n, f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \phi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, i = 0, 1$. Функции f_i, ϕ_i предполагаются достаточно гладкими. Задача (16) - (17) определяется выбором начального состояния x_0 и гладкого многообразия цели $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$. Допустимые управления - измеримые функции, допустимые траектории абсолютно непрерывны.

Если многообразие цели зафиксировать, а начальные условия выбирать из некоторой открытой окрестности U многообразия $\mathcal{M}$, то получим задачу построения в области U оптимального синтеза, когда оптимальное управление рассматривается, как функция фазового состояния.

Система уравнений принципа максимума Понтрягина для задачи (16) - (17) может быть записана в виде

$$\dot{y} = Igrad(H_0(y) + uH_1(y)),\ u = sgnH_1(y). \tag{18}$$

Здесь $y = (\psi, x) \in \mathbb{R}^{2n}$, $I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, E – единичная $(n \times n)$-матрица;
$H_i = \psi\phi_i(x) - \lambda_0 f_i(x), \quad i = 0, 1.$

Поскольку время T в задаче (16) - (17) не фиксировано, оптимальные траектории принадлежат нулевой поверхности уровня гамильтониана $H_0(y(t)) + uH_1(y(t)) = 0$.

Определение 1 *Назовем $y(t)$ системы (18) особой на участке (t_0, t_1), если $H_1(y(t)) = 0$ при $t \in (t_0, t_1)$.*

Число q назовем порядком особой траектории, если

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^k}{dt^k}\bigg|_{(18)} H_1(y) = 0, k = 0, 1, \ldots, 2q-1, \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^{2q}}{dt^{2q}}\bigg|_{(18)} H_1(y) \neq 0 \tag{20}$$

для всех y, принадлежащих некоторой открытой окрестности траектории $y(t)$.

Если соотношения (19), (20) имеют место только в точках самой траектории $y(t)$, то q называют локальным порядком особой траектории. Известно, что q - целое число.

Известно необходимое условие оптимальности особых траекторий (условие Келли):

$$K(y(t)) = (-1)^q\ \frac{\partial}{\partial u}\frac{d^{2q}}{dt^{2q}}\bigg|_{(18)} H_1(y(t)) \leqslant 0.$$

Теорема 1 (Келли, Копп, Мойер) *Пусть особая траектория $y(t)$ системы (18) при $t \in (t_0, t_1)$ имеет второй порядок и выполнено условие Келли в строгой форме $K(y(t)) < 0$. Если управление $u(t)$ на траектории $y(t)$ является C^∞ – гладкой функцией, то траектория $y(t)$ не может сопрягаться с неособой кусочно-гладкой траекторией системы (18), если управление разрывно в точке сопряжения особого и неособого участков.*

Следовательно, если такое соединение происходит, то неособый участок должен содержать бесконечное число точек переключения управления $u = sgnH_1$.

Обозначим $ad_{H_0}H_1 = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\partial H_0}{\partial \psi_i}\frac{\partial H_1}{\partial x_i} - \frac{\partial H_0}{\partial x_i}\frac{\partial H_1}{\partial \psi_i}$ скобку Пуассона функций H_0, H_1. Предположим, что система (18) имеет особую траекторию $y(t)$ второго порядка, в окрестности которой функции $z_i = ad_{H_0}^{i-1}H_1, i = 1, 2, 3, 4$, независимы. Дополним $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ функциями $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{2n-4})$ так, чтобы $det(D(z, \omega)/D(y))|_{y(t)} \neq 0$. В результате замены $y \to (z, \omega)$ система (18) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1 = z_2, && \dot{z}_4 = \alpha(z, \omega) + u\beta(z, \omega), \\ &\dot{z}_2 = z_3, && \dot{\omega} = \gamma(z, \omega, u), \\ &\dot{z}_3 = z_4, && u = sgnz_1. \end{aligned}$$

Из определения порядка особой траектории следует, что $\beta(y(t)) \neq 0$. Предположим, что в окрестности $y(t)$ выполнено условие Келли в строгой форме: $\beta < 0$. Для того, чтобы движение по особой траектории удовлетворяло ограничению $|u| \leqslant 1$, потребуем, чтобы $|\alpha| < -\beta$.

Теорема 2 (М.И. Зеликин, В.Ф. Борисов [2], [4]) *Пусть в окрестности особого решения второго порядка система (18) записана в виде*

$$\dot z_1 = z_2 + f_1(z,\omega,u); \qquad \dot z_4 = a(z,\omega) + ub(z,\omega) + f_4(z,\omega,u);$$
$$\dot z_2 = z_3 + f_2(z,\omega,u); \qquad \dot\omega = F(z,\omega,u);$$
$$\dot z_3 = z_4 + f_3(z,\omega,u); \qquad u = sgn(z_1);$$

тогда, если выполнены неравенства

$$b(0,\omega_0) < 0, \quad |a(0,\omega_0)| < -b(0,\omega_0),$$

то существует открытая окрестность $\mathcal{O}$ точки ω_0 в $\mathbb{R}^{2n-4}$ такая, что для любого $\omega \in \mathcal{O}$ через точку $(0,\omega)$ проходит некоторое однопараметрическое семейство решений системы. Траектории этого семейства заполняют двумерное многообразие $\mathcal{R}^+_\omega$, гомеоморфное $\mathbb{R}^2$. Каждая траектория внутри $\mathcal{R}^+_\omega$ приходит в точку $(0,\omega_0)$ за конечное время после счетного числа пересечений с поверхностью разрыва $z_1 = 0$.

Другое семейство $\mathcal{R}^-_\omega$ решений выходит из точки $(0,\omega_0)$, имея также счетное число переключений на конечном интервале времени.

Точки переключения $\mathcal{R}^\pm_\omega$ заполняют две кусочно-гладкие кривые $\Gamma^\pm_\omega$. Объединение $\bigcup\limits_{\omega\in\mathcal{O}}\mathcal{R}^\pm_\omega$ всех подмногообразий наделено структурой расслоения с базой $\mathcal{O}$ и двумерными кусочно-гладкими слоями.

Особые режимы.

Вернемся к задаче (13).

Пусть $H_1(t) =< d,\psi >= 0$ на некотором непустом интервале времени, $t \in (t_1,t_2)$, $t_1 \neq t_2$.

Найдем особые экстремали задачи (13). Для этого продифференцируем функцию $H_1 = d_1\psi_1 + d_2\psi_2$ в силу уравнений принципа максимума Понтрягина:

$$\begin{cases} \frac{dH_1}{dt} = -d_1\phi_1 - d_2\phi_2; \\ \frac{d^2H_1}{dt^2} = -(d_1k_{11} + d_2k_{12})x_1 + d_1\lambda_1\psi_1 - (d_2k_{22} + d_1k_{12})x_2 + d_2\lambda_2\psi_2; \\ \frac{d^3H_1}{dt^3} = -(d_1k_{11} + d_2k_{12})y_1 - d_1\lambda_1\phi_1 - (d_2k_{22} + d_1k_{12})y_2 - d_2\lambda_2\phi_2; \\ \frac{d^4H_1}{dt^4} = -(2d_1k_{11}\lambda_1 + d_2k_{12}(\lambda_1+\lambda_2))x_1 - (2d_2k_{22}\lambda_2 + d_2k_{12}(\lambda_1+\lambda_2))x_2 + \\ +d_1\lambda_1^2\psi_1 + d_2\lambda_2^2\psi_2 - (d_1^2k_{11} + 2d_1d_2k_{12} + k_{22}d_2^2)u. \end{cases} \tag{21}$$

Параметр u появился на четвертом шаге дифференцирования.

$-(d_1^2k_{11} + 2d_1d_2k_{12} + k_{22}d_2^2) = -<\tilde K d, d>< 0$, значит, выполнено условие Келли - необходимое условие оптимальности особых траекторий. Поэтому верно следующее утверждение.

Утверждение 2 *Особая траектория системы (15) имеет второй существенный порядок.*

Решим систему:

$$\begin{cases} d_1\psi_1 + d_2\psi_2 = 0; \\ -d_1\phi_1 - d_2\phi_2 = 0; \\ -(d_1k_{11} + d_2k_{12})x_1 + d_1\lambda_1\psi_1 - (d_2k_{22} + d_1k_{12})x_2 + d_2\lambda_2\psi_2 = 0; \\ -(d_1k_{11} + d_2k_{12})y_1 - d_1\lambda_1\phi_1 - (d_2k_{22} + d_1k_{12})y_2 - d_2\lambda_2\phi_2 = 0; \\ -(2d_1k_{11}\lambda_1 + d_2k_{12}(\lambda_1+\lambda_2))x_1 - (2d_2k_{22}\lambda_2 + d_2k_{12}(\lambda_1+\lambda_2))x_2 + \\ +d_1\lambda_1^2\psi_1 + d_2\lambda_2^2\psi_2 - (d_1^2k_{11} + 2d_1d_2k_{12} + k_{22}d_2^2)u = 0. \end{cases}$$

Эти уравнения задают особую четырехмерную поверхность в восьмимерном расширенном пространстве:

$$\psi_1 = \frac{< \tilde{K}d, x >}{d_1(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad \psi_2 = -\frac{< \tilde{K}d, x >}{d_2(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad \phi_1 = -\frac{< \tilde{K}d, y >}{d_1(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad \phi_2 = \frac{< \tilde{K}d, y >}{d_2(\lambda_1 - \lambda_2)}. \tag{22}$$

Управление найдем как функцию фазовых переменных:

$$\begin{aligned}\hat{u} = -\frac{-(2d_1k_{11}\lambda_1 + d_2k_{12}(\lambda_1+\lambda_2))x_1 - (2d_2k_{22}\lambda_2 + d_2k_{12}(\lambda_1+\lambda_2))x_2 + d_1\lambda_1^2\psi_1 + d_2\lambda_2^2\psi_2}{< \tilde{K}d, d >} = \\ = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(d_2k_{22}x_2 - d_1k_{11}x_1)}{< \tilde{K}d, d >}, \ |\hat{u}| \leqslant 1.\end{aligned} \tag{23}$$

Поверхность особых траекторий в фазовом пространстве

Используя (22) - (23), перепишем систему (14). Получим:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1; \\ \dot{y}_1 = \frac{\lambda_1k_{22}d_2^2 + 2\lambda_1k_{12}d_1d_2 + \lambda_2k_{11}d_1^2}{<\tilde{K}d,d>}x_1 + \frac{(\lambda_1-\lambda_2)d_2d_1k_{22}}{<\tilde{K}d,d>}x_2; \\ \dot{x}_2 = y_2; \\ \dot{y}_2 = -\frac{(\lambda_1-\lambda_2)d_2d_1k_{11}}{<\tilde{K}d,d>}x_1 + \frac{\lambda_1k_{22}d_2^2 + 2\lambda_2k_{12}d_1d_2 + \lambda_2k_{11}d_1^2}{<\tilde{K}d,d>}x_2. \end{cases} \tag{24}$$

Получили систему линейных дифференциальных уравнений. Матрица системы:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_1k_{22}d_2^2 + 2\lambda_1k_{12}d_1d_2 + \lambda_2k_{11}d_1^2}{<\tilde{K}d,d>} & 0 & \frac{(\lambda_1-\lambda_2)d_2d_1k_{22}}{<\tilde{K}d,d>} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(\lambda_1-\lambda_2)d_2d_1k_{11}}{<\tilde{K}d,d>} & 0 & \frac{\lambda_1k_{22}d_2^2 + 2\lambda_2k_{12}d_1d_2 + \lambda_2k_{11}d_1^2}{<\tilde{K}d,d>} & 0 \end{pmatrix}$$

Решим характеристическое уравнение $det|J - \mu E| = 0$, где E - единичная матрица.

$$\begin{aligned}\mu^4 - 2\mu^2\frac{\lambda_1k_{22}d_2^2 + k_{12}d_1d_2(\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_2d_1^2}{< \tilde{K}d, d >} + \frac{\lambda_2^2k_{11}^2d_1^4 + (\lambda_1^2+\lambda_2^2)d_1^2d_2^2k_{11}k_{22} + \lambda_1^2k_{22}^2d_2^4}{< \tilde{K}d, d >^2} + \\ + \frac{2\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)k_{11}k_{12}d_1^3d_2 + 4\lambda_1\lambda_2k_{12}^2d_1^2d_2^2 + 2\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)k_{22}k_{12}d_2^3d_1}{< \tilde{K}d, d >^2} = 0\end{aligned}$$

$$\mu_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{\lambda_1k_{22}d_2^2 + k_{12}d_1d_2(\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_2d_1^2}{< \tilde{K}d, d >} \pm i\frac{(\lambda_1-\lambda_2)|d_2d_1|\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}}{< \tilde{K}d, d >}}$$

Пусть $\gamma = \frac{\lambda_1k_{22}d_2^2 + k_{12}d_1d_2(\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_2d_1^2}{\sqrt{< \tilde{K}d, d >< \tilde{K}d_\lambda, d_\lambda >}}, |\gamma| < 1, \quad \beta = (\frac{< \tilde{K}d_\lambda, d_\lambda >}{< \tilde{K}d, d >})^{\frac{1}{4}}, \quad d_\lambda = \begin{pmatrix} d_1\lambda_2 \\ d_2\lambda_1 \end{pmatrix}$

тогда
$$\begin{aligned}\mu_1 &= -\frac{\beta}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+\gamma} - i\sqrt{1-\gamma}), \\ \mu_2 &= \frac{\beta}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+\gamma} - i\sqrt{1-\gamma}), \\ \mu_3 &= -\frac{\beta}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+\gamma} + i\sqrt{1-\gamma}), \\ \mu_4 &= \frac{\beta}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+\gamma} + i\sqrt{1-\gamma}).\end{aligned}$$

Нам нужны только устойчивые решения. Поэтому будем рассматривать только те собственные значения, которым соответствуют устойчивые решения, т.е. с отрицательной вещественной частью.

Собственный вектор для значения μ_3 есть

$$h_3 = (-\frac{k_{12} + isgn(d_1 d_2)\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}}{k_{11}\mu_3}, \frac{-isgn(d_1 d_2)\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} - k_{12}}{k_{11}}, \frac{1}{\mu_3}, 1).$$

Пусть $w = \beta\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}, \quad v = \beta\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}$, тогда $\mu_3 = -w - iv$.

Частное решение системы, отвечающее устойчивому усу, будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{-tw} \begin{pmatrix} \frac{\cos(tv)}{k_{11}\beta^2}\left(sgn(d_1d_2)\sqrt{k_{11}k_{22}-k_{12}^2}v + k_{12}w\right) + \frac{\sin(tv)}{k_{11}\beta^2}\left(sgn(d_1d_2)\sqrt{k_{11}k_{22}-k_{12}^2}w - k_{12}v\right) \\ -\frac{k_{12}}{k_{11}}\cos(tv) - \sin(tv)\frac{sgn(d_1d_2)}{k_{11}}\sqrt{k_{11}k_{22}-k_{12}^2} \\ -\frac{w}{\beta^2}\cos(tv) + \frac{v}{\beta^2}\sin(tv) \\ \cos(tv) \end{pmatrix} +$$
$$+ iC_2 e^{-tw} \begin{pmatrix} \frac{\cos(tv)}{k_{11}\beta^2}\left(sgn(d_1d_2)\sqrt{k_{11}k_{22}-k_{12}^2}w - k_{12}v\right) - \frac{\sin(tv)}{k_{11}\beta^2}\left(sgn(d_1d_2)\sqrt{k_{11}k_{22}-k_{12}^2}v + k_{12}w\right) \\ -\cos(tv)\frac{sgn(d_1d_2)}{k_{11}}\sqrt{k_{11}k_{22}-k_{12}^2} + \frac{k_{12}}{k_{11}}\sin(tv) \\ \frac{v}{\beta^2}\cos(tv) + \frac{w}{\beta^2}\sin(tv) \\ -\sin(tv) \end{pmatrix} \tag{25}$$

Учащающиеся переключения

В окрестности особого решения второго порядка система (14), (15) может быть приведена к полуканонической форме [2]. Введем следующие переменные:

$$\begin{aligned}
z_1 &= d_1\psi_1 + d_2\psi_2; \\
z_2 &= -d_1\phi_1 - d_2\phi_2; \\
z_3 &= -(d_1k_{11} + d_2k_{12})x_1 - (d_2k_{22} + d_1k_{12})x_2 + d_1\lambda_1\psi_1 + d_2\lambda_2\psi_2; \\
z_4 &= -(d_1k_{11} + d_2k_{12})y_1 - (d_2k_{22} + d_1k_{12})y_2 + d_1\lambda_1\phi_1 + d_2\lambda_2\phi_2; \\
\omega_1 &= d_1\lambda_1^2\psi_1 + d_2\lambda_2^2\psi_2; \\
\omega_2 &= -d_1\lambda_1^2\phi_1 - d_2\lambda_2^2\phi_2; \\
\omega_3 &= -(2d_1k_{11}\lambda_1 + d_2k_{12}(\lambda_1+\lambda_2))x_1 - (2d_2k_{22}\lambda_2 + d_2k_{12}(\lambda_1+\lambda_2))x_2; \\
\omega_4 &= -(2d_1k_{11}\lambda_1 + d_2k_{12}(\lambda_1+\lambda_2))y_1 - (2d_2k_{22}\lambda_2 + d_2k_{12}(\lambda_1+\lambda_2))y_2.
\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}
L_{11} &= d_1k_{11} + d_2k_{12}; \\
L_{12} &= d_2k_{22} + d_1k_{12}; \\
L_{21} &= 2d_1k_{11}\lambda_1 + d_2k_{12}(\lambda_1+\lambda_2); \\
L_{22} &= 2d_2k_{22}\lambda_2 + d_2k_{12}(\lambda_1+\lambda_2),
\end{aligned}$$

тогда

$$
\begin{aligned}
&z_1 = d_1\psi_1 + d_2\psi_2;\\
&z_2 = -d_1\phi_1 - d_2\phi_2;\\
&z_3 = -L_{11}x_1 - L_{12}x_2 + d_1\lambda_1\psi_1 + d_2\lambda_2\psi_2;\\
&z_4 = -L_{11}y_1 - L_{12}y_2 + d_1\lambda_1\phi_1 + d_2\lambda_2\phi_2;\\
&\omega_1 = d_1\lambda_1^2\psi_1 + d_2\lambda_2^2\psi_2;\\
&\omega_2 = -d_1\lambda_1^2\phi_1 - d_2\lambda_2^2\phi_2;\\
&\omega_3 = -L_{21}x_1 - L_{22}x_2;\\
&\omega_4 = -L_{21}y_1 - L_{22}y_2.
\end{aligned}
$$

Предполагается, что функции $z_i, i = 1,2,3,4.$ функционально независимы в окрестности особого решения второго порядка. Здесь $z_i = \frac{d^{i-1}H_1}{dt^{i-1}}$ (в силу системы (15)), а ω_i дополняют z_i, $i = 1,2,3,4$ так, чтобы матрица Якоби отображения $(x_1, y_1, x_2, y_2, \phi_1, \psi_1, \phi_2, \psi_2) \to (z_1, z_2, z_3, z_4, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ была невырожденной.

В координатах (z, ω) система (14), (15) перепишется в виде:

$$
\begin{aligned}
&\dot z_1 = z_2; \quad \dot z_2 = z_3; \quad \dot z_3 = z_4;\\
&\dot z_4 = \omega_3 + \omega_1 - < \tilde K d, d > u; \quad \dot\omega_1 = \omega_2;\\
&\dot\omega_2 = c_1 z_1 + c_2 z_3 + c_3\omega_1 + c_4\omega_2 + c_5\omega_3; \quad \dot\omega_3 = \omega_4;\\
&\dot\omega_4 = c_6 z_1 + c_7 z_3 + c_8\omega_2 + c_9\omega_3 - (d_1L_{21} + d_2L_{22})u;\\
&u = sgn(z_1).
\end{aligned}
$$

Здесь $c_1 \dots c_9$ – числа:

$$
\begin{aligned}
&c_1 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{(d_1\lambda_1^2k_{11} + d_2\lambda_2^2k_{12})L_{22} + (d_1\lambda_1^2k_{12} + d_2\lambda_2^2k_{22})L_{21}}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}} + \lambda_1\lambda_2\right);\\
&c_2 = -\frac{(d_1\lambda_1^2k_{11} + d_2\lambda_2^2k_{12})L_{22} + (d_1\lambda_1^2k_{12} + d_2\lambda_2^2k_{22})L_{21}}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}};\\
&c_3 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2}{\lambda_1+\lambda_2};\\
&c_4 = \frac{(d_1\lambda_1^2k_{11} + d_2\lambda_2^2k_{12})L_{22} + (d_1\lambda_1^2k_{12} + d_2\lambda_2^2k_{22})L_{21}}{(\lambda_1+\lambda_2)(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21})};\\
&c_5 = \frac{(d_1\lambda_1^2k_{11} + d_2\lambda_2^2k_{12})L_{12} + (d_1\lambda_1^2k_{12} + d_2\lambda_2^2k_{22})L_{11}}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}};\\
&c_6 = \frac{L_{21}L_{22}(\lambda_1+\lambda_2)}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}}; \quad c_7 = \frac{L_{21}L_{22}\lambda_1\lambda_2}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}};\\
&c_8 = \frac{L_{21}L_{22}}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}}; \quad c_9 = \frac{L_{21}\lambda_1L_{12} + L_{11}\lambda_2L_{22}}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}}.
\end{aligned}
$$

Применим теорему 2 к системе (14), (15).

Обозначим $\Sigma^\pm = \bigcup\limits_{\omega\in\mathcal{O}} \mathcal{R}^\pm_\omega$. Пусть $\pi : \Sigma^\pm \to \mathcal{O}$ обозначает естественную проекцию расслоения на базу, сопоставляющую всем точкам двумерного слоя $\mathcal{R}^\pm_\omega$ точку $(0, \omega)$.

В нашем случае $b(0, \omega_0) = - < \tilde K d, d >< 0$ и $|a(0, \omega_0)| << \tilde K d, d >$ при ω_0 достаточно близком к нулю. Значит выполнены условия теоремы 2. Следовательно, в окрестности начала координат особого многообразия существует устойчивое расслоение Σ^+ траекторий с накоплением переключений.

Локальная оптимальность

Определение 2 *Траекторию $\hat{x}(\cdot), \hat{x}(\hat{T}) \in \mathcal{M}$, назовем локально оптимальной в задаче (16) - (17), если найдется такая окрестность U траектории $\hat{x}(\cdot)$, что*

$$\int_0^{\hat{T}} f(\hat{x}(t))\,dt \leqslant \int_0^{T} f(x(t))\,dt$$

для любой допустимой в задаче (16) - (17) траектории $x(t)$, принадлежащей окрестности $U(x(0) = \hat{x}(0), x(T) \in \mathcal{M})$. Здесь через $f(x)$ обозначена функция $f_0(x) + uf_1(x)$.

Теорема 3 (М.И. Зеликин, В.Ф. Борисов [2], [4]) *Предположим, что имеется гладкое n-мерное интегральное подмногообразие $\mathcal{L}$ системы (18) с границей $\mathcal{M}$, обладающее следующими свойствами:*

1) траектория $(\psi(t), x(t))$ лежит на $\mathcal{L}$;

2) $\mathcal{L}$ принадлежит нулевой поверхности уровня гамильтониана $H(\psi, x) = 0$;

3) $\mathcal{L}$ регулярно проектируется на пространство x;

4) через каждую точку $\mathcal{M}$ проходит единственная траектория (18), при этом каждая траектория системы (18), принадлежащая $\mathcal{L}$, обязательно проходит через $\mathcal{M}$;

5) проекция $\mathcal{M}$ на пространство x содержит многообразие цели;

6) на границе $\mathcal{M}$ выполнено условие трансверсальности $\psi dx|_{\mathcal{M}} = 0$.

Тогда $(\psi(t), x(t))$ является локально оптимальной траекторией задачи (16) - (17).

Покажем, что экстремали с накоплением переключений и особые экстремали задачи (13) локально оптимальны. Для этого нужно доказать несколько вспомогательных утверждений.

Обозначим через N^* 2-мерное подмногообразие поверхности $\{z = 0\}$, заполненное особыми решениями задачи (13), которые приходят в начало координат в прямом времени.

Определение 3 *Назовем $\mathcal{M} \in \{H = 0\}$ лагранжевым (в широком смысле) многообразием, если*

$$\oint_\gamma \psi\,dx = 0$$

для любого кусочно-гладкого замкнутого контура $\gamma \in \mathcal{M}$.

Утверждение 3 *Многообразие N^* является лагранжевым.*

Доказательство утверждения 3. Гамильтонова система, отвечающая особому устойчивому решению, имеет вид:

$$\begin{cases}
\dot{\phi}_1 = k_{11}x_1 + k_{12}x_2 - \lambda_1\psi_1;\\
\dot{\psi}_1 = -\phi_1;\\
\dot{\phi}_2 = k_{22}x_2 + k_{12}x_1 - \lambda_2\psi_2;\\
\dot{\psi}_2 = -\phi_2;\\
\dot{x}_1 = y_1;\\
\dot{y}_1 = \frac{\lambda_1 k_{22}d_2^2 + 2\lambda_1 k_{12}d_1d_2 + \lambda_2 k_{11}d_1^2}{<\tilde{K}d,d>}x_1 + \frac{(\lambda_1-\lambda_2)d_2d_1k_{22}}{<\tilde{K}d,d>}x_2;\\
\dot{x}_2 = y_2;\\
\dot{y}_2 = -\frac{(\lambda_1-\lambda_2)d_2d_1k_{11}}{<\tilde{K}d,d>}x_1 + \frac{\lambda_1 k_{22}d_2^2 + 2\lambda_2 k_{12}d_1d_2 + \lambda_2 k_{11}d_1^2}{<\tilde{K}d,d>}x_2.
\end{cases} \tag{26}$$

Рассмотрим произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур $\gamma \in N^*$.

Покажем, что $\oint\limits_{\gamma} \psi\, dx = 0$. Будем переносить контур γ по траекториям гамильтоновой системы (26) на некоторое достаточно большое время T. Обозначим через γ_T образ контура γ при этом отображении. Согласно теореме об интегральном инварианте Пуанкаре-Картана [4], получим

$$\oint\limits_{\gamma} \Psi\, dX = \oint\limits_{\gamma_T} \Psi\, dX.$$

Здесь $X = (x_1, x_2, y_1, y_2)$, $\Psi = (\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2)$. Покажем, что подынтегральное выражение $\sum\limits_{n=1}^{4} \Psi_i \dot{X}_i$ стремится к нулю при $T \to \infty$.

$$\sum_{n=1}^{4} \Psi_i \dot{X}_i = \phi_1 \dot{x}_1 + \phi_2 \dot{x}_2 + \psi_1 \dot{y}_1 + \psi_2 \dot{y}_2 = \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \psi_1 (\frac{\lambda_1 k_{22} d_2^2 + 2\lambda_1 k_{12} d_1 d_2 + \lambda_2 k_{11} d_1^2}{< \tilde{K} d, d >} x_1 +$$
$$+ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) d_2 d_1 k_{22}}{< \tilde{K} d, d >} x_2) + \psi_2 (- \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) d_2 d_1 k_{11}}{< \tilde{K} d, d >} x_1 + \frac{\lambda_1 k_{22} d_2^2 + 2\lambda_2 k_{12} d_1 d_2 + \lambda_2 k_{11} d_1^2}{< \tilde{K} d, d >} x_2) =$$
$$= \frac{< \tilde{K} d, y >}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(-\frac{y_1}{d_1} + \frac{y_2}{d_2} \right) + \frac{< \tilde{K} d, x >}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 d_2 x_1 + \lambda_2 d_1 x_2).$$

Далее, учитывая (25), получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{4} \Psi_i \dot{X}_i$ стремится к нулю при $T \to \infty$. Следовательно, интеграл $\oint\limits_{\gamma_T} \Psi\, dX$ также стремится к нулю. Т.к. интеграл остается постоянным, то и $\oint\limits_{\gamma} \Psi\, dX = 0$. ■

Теорема 4 (о лагранжевых многообразиях [2], [4]) *Пусть $\mathcal{M}$ есть произвольное лагранжевое подмногообразие на поверхности $\Sigma_0 = \Sigma^+ \cap \{z = 0\}$ (т.е. на базе расслоения Σ^+). Тогда прообраз $\mathcal{M}$ в расслоении Σ^+, т.е. $\pi^{-1}(\mathcal{M})$, также является лагранжевым подмногообразием.*

Согласно теореме 4 о лагранжевых многообразиях, прообраз N^* в расслоении Σ^+, то есть $\pi^{-1}(N^*)$ является лагранжевым многообразием.

Определение 4 *Отображение $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ называется регулярным в точке $x^0 \in \mathbb{R}^m$, если матрица Якоби этого отображения имеет максимально возможный ранг в этой точке.*

Теорема 5 (о регулярной проекции [2], [4]) *Обозначим через $\pi^* : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n, \pi^*(\psi, x) = x$, естественную проекцию расширенного (ψ, x)-фазового пространства на x-пространство. Рассмотрим поверхность L, натянутую на вектор и векторы касательной плоскости к поверхности переключения.*

Предположим, что ограничение π^* на L регулярно. Тогда ограничение π^* на $\pi^{-1}(N^*)$ регулярно в точке $(0, \omega_0)$.

Рассмотрим $\pi^*(N^*)$ – подмногообразие $\mathbb{R}^n (n = 4)$, заполненное особыми экстремалями.

Следствие 1 (о регулярной проекции [4]) *Предположим, что $codim(\pi^*(N^*)) = 2$ и проекции векторов $\frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\partial}{\partial z_4}$ и $\frac{\partial}{\partial \omega'} = \left(\frac{\partial}{\partial \omega_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \omega_{n-2}} \right)$ на пространство x независимы в точке $(0, \omega_0)$. Тогда предположения теоремы о регулярной проекции $\pi^* L$ выполнены.*

Утверждение 4 *$\pi^{-1}(N^*)$ регулярно проектируется на пространство (x, y).*

Доказательство утверждения 4. В силу теоремы 5 и следствия 1 достаточно показать, что проекции векторов $\frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\partial}{\partial z_4}$ на пространство (x, y) вместе с базисом касательной плоскости определяют линейно-независимую систему. В качестве базиса этой касательной плоскости можно взять действительную и мнимую часть собственного вектора матрицы J, то есть векторы

$$h_1 = \begin{pmatrix} \frac{k_{12}w + sgn(d_1 d_2)\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}v}{k_{11}\beta^2} \\ -\frac{k_{12}}{k_{11}} \\ -\frac{w}{\beta^2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} \frac{-k_{12}v + sgn(d_1 d_2)\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}w}{k_{11}\beta^2} \\ \frac{-sgn(d_1 d_2)\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}}{k_{11}} \\ \frac{v}{\beta^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для нахождения проекций векторов $\frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\partial}{\partial z_4}$ на пространство (x, y) выразим переменные $(x_1, x_2, y_1, y_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2)$ через $(z_1, z_2, z_3, z_4, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-L_{22}(\lambda_1 + \lambda_2)z_3 + L_{22}\lambda_1\lambda_2 z_1 + L_{22}\omega_1 + L_{12}(\lambda_1 + \lambda_2)\omega_3}{(\lambda_1 + \lambda_2)(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21})}; \\ x_2 &= \frac{L_{21}(\lambda_1 + \lambda_2)z_3 - L_{21}\lambda_1\lambda_2 z_1 - L_{21}\omega_1 - L_{11}(\lambda_1 + \lambda_2)\omega_3}{(\lambda_1 + \lambda_2)(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21})}; \\ y_1 &= \frac{-L_{22}(\lambda_1 + \lambda_2)z_4 - L_{22}\lambda_1\lambda_2 z_2 - L_{22}\omega_2 + L_{12}(\lambda_1 + \lambda_2)\omega_4}{(\lambda_1 + \lambda_2)(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21})}; \\ y_2 &= \frac{L_{21}(\lambda_1 + \lambda_2)z_4 + L_{21}\lambda_1\lambda_2 z_2 + L_{21}\omega_2 - L_{11}(\lambda_1 + \lambda_2)\omega_4}{(\lambda_1 + \lambda_2)(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21})}; \\ \phi_1 &= \frac{\lambda_2^2 z_2 - \omega_2}{d_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad \phi_2 = \frac{\omega_2 - \lambda_1^2 z_2}{d_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \\ \psi_1 &= \frac{\omega_1 - \lambda_2^2 z_1}{d_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad \psi_2 = \frac{\lambda_1^2 z_1 - \omega_1}{d_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_3} &= -\frac{L_{22}}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{L_{21}}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}}\frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial}{\partial z_4} &= -\frac{L_{22}}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}}\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{L_{21}}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}}\frac{\partial}{\partial y_2}. \end{aligned}$$

Осталось показать, что векторы $h_1, h_2, \frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\partial}{\partial z_4}$ линейно независимы. Для этого рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{k_{12}u + sgn(d_1 d_2)\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}v}{k_{11}\beta^2} & \frac{-k_{12}v + sgn(d_1 d_2)\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}w}{k_{11}\beta^2} & \frac{-L_{22}}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}} & 0 \\ -\frac{k_{12}}{k_{11}} & \frac{-sgn(d_1 d_2)\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}}{k_{11}} & 0 & -\frac{L_{22}}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}} \\ -\frac{u}{\beta^2} & \frac{v}{\beta^2} & \frac{L_{21}}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{L_{21}}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}} \end{pmatrix}$$

при помощи элементарных преобразований приведем к виду

$$\begin{pmatrix} sgn(d_1 d_2)\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}L_{21}v & -k_{12}L_{21}v + k_{11}L_{22}v & 0 & 0 \\ -k_{12}L_{21} + k_{11}L_{22} & -sgn(d_1 d_2)\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}L_{21} & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\beta^2} & \frac{v}{\beta^2} & L_{21} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & L_{21} \end{pmatrix}$$

Определитель приведенной матрицы

$$Det = -L_{21}^2 v((k_{11}k_{22} - k_{12}^2)L_{21}^2 + (k_{12}L_{21} - k_{11}L_{22})^2) \neq 0.$$

Таким образом, выполнены достаточные условия регулярной проектируемости $\pi^{-1}(N^*)$ на пространство (x, y). ■

В силу утверждений 3, 4, выполнены предположения теоремы 3, следовательно, получаем итоговую теорему 6.

Теорема 6 *Экстремали с накоплением переключений и особые экстремали задачи (13) локально оптимальны.*

Заключение.

В данной работе был построен синтез управления, минимизирующего среднеквадратичное отклонение по углам от неустойчивого положения равновесия двойного перевернутого маятника на тележке. Было доказано существование локально оптимального особого режима, а также утверждение о том, что оптимальное управление испытывает бесконечное число учащающихся переключений за конечный период времени.

Список литературы

[1] М.И. Зеликин. Оптимальное управление и вариационное исчисление. // М.: Едиториал УРСС, 2004.

[2] М.И. Зеликин, В.Ф. Борисов. Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления. //Тр. Мат. ин-та АН СССР - 1991. - т.197, с.85-166.

[3] M. I. Zelikin, V. F. Borisov. Theory of chattering with applications to astronautics, robotics, economics and engineering. //Birkh$\ddot{a}$ser/ Boston-Basel-Berlin/ 1994.

[4] М.И.Зеликин, В.Ф. Борисов. Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики. //Современная математика и её приложения/ т.11 Оптимальное управление. -Тбилиси, 2003.

[5] А.М. Формальский. О стабилизации двойного перевернутого маятника при помощи одного управляющего момента.//Известия РАН/ Теория и системы управления/№3, 2006, с 5-12.

[6] А.М. Формальский. О глобальной стабилизации двойного перевернутого маятника с управлением в межзвенном шарнире.//Известия РАН/ МТТ/№5, 2008, с 3-14.

[7] Yu. G. Martynenko, A. M. Formal'skii. Controlled Pendulum on a Movable Base.// Izvestiya Akademii Nauk/ MTT/ №1, 2013, pp.9-23.