Кафедра Общих Проблем Управления

Основной курс по специализации «математические методы экономики»

Выпуклый анализ

½ года, экзамен.

Лекторы: Локуциевский Л.В., Васильева А.Н., Протасов В.Ю., Галеев Э.М.

В последние годы выпуклый анализ получил очень большое развитие. Методы выпуклого анализа представляют серьезную альтернативу классическим методам математического анализа. Выпуклые объекты ведут себя во многом лучше чем гладкие. Поэтому если участвующие в некоторой математической задаче объекты оказались выпуклыми, то это обычно сразу дает множество сильных удобных следствий.

Программа

1. Выпуклые операции (сумма по Минковскому, замыкание, относительная внутренность, выпуклая оболочка). Доказательство формулы $\mathrm{C}=\mathrm{conv}\ \mathrm{C}$ для выпуклого множества C.
2. Размерность выпуклого множества. Непустота относительной внутренности. Доказательство формул $\mathrm{C}\subset \mathrm{cl}\,\mathrm{ri}\,C$ и $(\mathrm{int}\ \mathrm{C}=\emptyset) \Rightarrow (\dim \mathrm{aff}\, C < d)$ для выпуклого множества $\mathrm{C}\subset \mathbb{R}^d$. Доказательство того, что сумма относительно открытых выпуклых множеств относительно открыта (без использования теоремы отделимости).
3. Теорема Каратеодори. Выпуклая оболочка компактного подмножества R^d. Существование компактно-выпуклого исчерпания у любого выпуклого открытого множества.
4. Вторая теоремы отделимости (в конечномерном случае).
5. Первая теорема отделимости (в конечномерном случае).
6. Четыре эквивалентных определения выпуклой функции. Неравенство Йенсена. Доказательство того, что если выпуклая функция $\mathrm{f}{:}\mathrm{R}^d \to \bar{R}$ обращается в $-\infty$ в одной точке, то она обращается в $-\infty$ в любой точке из $\mathrm{ri}\,\mathrm{dom}\ \mathrm{f}$.
7. Непрерывность собственных выпуклых функций.
8. Формула для относительной внутренности надграфика выпуклой функции. Замкнутые выпуклые функции. Пример замкнутой, ограниченной, не непрерывной выпуклой функции.
9. Опорные гиперплоскости. Их связь с субдифференциалом функции. Локализация субдифференциала.
10. Монотонность, выпуклость и замкнутость субдифференциала. Непустота субдифференциала в точках относительной внутренности эффективной области. Ограниченность и неограниченность субдифференциала.
11. Дифференцируемость выпуклых функций: два критерия существования

производной выпуклой функции в точке.

12. Критерий непрерывной дифференцируемости выпуклой функции на множестве.
13. Критерий разрешимости системы выпуклых неравенств.
14. Теорема Каруша-Куна-Таккера. Условие Слейтера.
15. Базовые выпуклые функции (индикаторная, опорная и функция Минковского) и их свойства (выпуклость, замкнутость и др.).
16. Критерий выпуклости C^1-функций. Критерий выпуклости C^2-функций.
17. Выпуклые операции: func, conv и cl, и их свойства.
18. Выпуклые операции: $+$, infconv, $\wedge$, $\vee$, унарные линейные преобразования и их свойства.
19. Выпуклая двойственность: теорема о геометрически выпуклой двойственности и теорема Фенхеля-Моро.
20. Теорема о биполяре, теорема о втором сопряженном конусе.
21. Неравенство Юнга. Связь субдифференциалов функции и ее сопряженной. Формулы для субдифференциалов унарных линейных операций.
22. Теорема Моро-Рокафеллара о субдифференциале суммы. Субдифференциал инфимальной конволюции.
23. Теорема Дубовицкого-Милютина о субдифференциале максимума.
24. Теорема о двойственности понятий строгой выпуклости и гладкости.
25. Двойственная выпуклая задача. Теорема о связи прямой и двойственной задач. Двойственная задача линейного программирования.
26. Теорема о гомеоморфности выпуклых компактных множеств. Теорема Брауэра.
27. Теоремы Радона и Хелли.
28. Теорема Минковского (Крейна-Мильмана). Два эквивалентных определения выпуклого многогранника.