

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Кафедра общих проблем управления

**ОБ АСИМПТОТИКЕ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА В ОКРЕСТНОСТИ
ОСОБОЙ ТРАЕКТОРИИ В ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ
С ДВУМЕРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ**

Студент:	Мырикова В.А.
Руководитель:	Локуцкий Л.В.
Группа:	608

Москва
2017

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Принцип максимума Понтрягина	3
3	Оптимальные траектории задачи с многоугольником	4
4	Приближение траекторий задачи с управлением из сильно выпуклого множества с гладкой границей траекториями последовательности задач с многоугольником	18
5	Функция и уравнение Беллмана	25
6	Равномерная сходимость сопряженных функций	28
7	Вид оптимальных траекторий для сильно выпуклого множества с гладкой границей	34
7.1	Оптимальные траектории с постоянным управлением	35
7.2	Построение последовательности аппроксимирующих многоугольников .	37
7.3	Свойства оптимального синтеза	38

1 Постановка задачи

В данной работе изучается вид оптимального синтеза следующей двумерной задачи оптимального управления:

$$\begin{cases} \int_0^\infty x^2(t)dt \rightarrow \inf, x \in \mathbb{R}^2; \\ \dot{x}(t) = u, u \in \Omega; \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

Где Ω — выпуклое компактное множество, содержащее начало координат во внутренности.

Основой для анализа послужили результаты Л.В. Локуциевского касательно задач такого типа, опубликованные в работе: “ Особые режимы в управляемых системах с многомерным управлением из многогранника” (см. [2]). Сформулируем основные результаты работы [2], на которые будем ссылаться в дальнейшем:

Теорема 1. *В условиях задачи (1) верны следующие утверждения:*

- *Существует и единственная оптимальная траектория $\hat{x}(t, x_0)$. Сопряженная функция $\hat{p}(t, x_0)$ также единственна.*
- *Найдется такой момент времени $T(x_0) \geq 0$, что $\hat{x}(t, x_0) = 0$ и $\hat{p}(t, x_0) = 0$ при $t \geq T(x_0)$. Причем, $T(x_0) \leq C(B(x_0))^{\frac{1}{3}}$, где $B(x)$ — функция Беллмана задачи (1).*
- *Отображение $x_0 \rightarrow \hat{p}(0, x_0) = -\frac{1}{2}dB(x_0)$ является локально липшицевым и биективным.*

Опираясь на данные результаты, получим ряд следствий:

- Явное описание оптимального синтеза в случае, когда Ω - многоугольник;
- Доказательство равномерного приближения на компакте траектории задачи (1) траекториями последовательности задач с управлением из многоугольников Ω_n при $\Omega_n \rightarrow \Omega$;
- Описание вида оптимального синтеза для сильно выпуклого Ω с гладкой границей.

2 Принцип максимума Понтрягина

Применим принцип максимума к задаче (1). Гамильтониан имеет вид: $H(x, \lambda_0, p, u) = -\lambda_0 x^2 + \langle p, u \rangle$. Получаем систему, которой должно удовлетворять решение задачи (1):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \frac{\partial \hat{H}}{\partial p} = \hat{u}; \\ \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial x} = -2\lambda_0 \hat{x}; \\ \hat{x}(0) = x_0; \\ \langle \hat{p}, \hat{u} \rangle = \max_{v \in \Omega} \langle \hat{p}, v \rangle. \end{cases} \quad (2)$$

Если предположить, что $\lambda_0 = 0$, получим, что $\hat{p}(t)$ есть константа, отличная от нуля. Из свойств Ω получаем, что $\max_{v \in \Omega} \langle \hat{p}, v \rangle$ достигается либо при единственном $v_0 \in \partial\Omega$, либо, в случае нестрого выпуклого множества, на некотором конечном линейном куске $I \subset \partial\Omega$. Тогда $\hat{x}(s) = \int_0^s \hat{u}(t) dt \geq \int_0^s \min_{v \in I} \langle \hat{p}, v \rangle dt = s \times \min_{v \in I} \langle \hat{p}, v \rangle$ (покомпонентно). Причем, $0 \notin I$. Тогда $\hat{x}^2(s) \geq s^2 C, C > 0$ при $s > 0$, что приводит к расхождению интеграла задачи.

Положим $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}; \\ \dot{\hat{p}}(t) = \hat{x}; \\ \hat{x}(0) = x_0; \\ \langle \hat{p}, \hat{u} \rangle = \max_{v \in \Omega} \langle \hat{p}, v \rangle. \end{cases} \quad (3)$$

Найдем особую траекторию. Пусть $p(t) \equiv 0$ при $t \in (t_1, t_2)$. Тогда $\dot{p}(t) \equiv 0$ при $t \in (t_1, t_2)$, следовательно, $x(t) \equiv 0$ при $t \in (t_1, t_2)$, следовательно, $\dot{x}(t) \equiv 0$ при $t \in (t_1, t_2)$. Таким образом, $u(t) \equiv 0$ при $t \in (t_1, t_2)$. Получаем особую нулевую траекторию системы.

Заметим, что принцип максимума будет и достаточным условием для траекторий задачи (1), что следует из выпуклости подынтегральной функции x^2 . Действительно, пусть $\hat{x}, \hat{u}, \hat{p}$ удовлетворяют системе (4). Покажем, что тогда для любой допустимой пары $(x(t), u(t))$ выполнено: $\int_0^\infty x^2(t) dt - \int_0^\infty \hat{x}^2(t) dt \geq 0$.

Пусть $f(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ - выпуклая функция. Тогда $\langle df(x_2), x_1 - x_2 \rangle \leq f(x_1) - f(x_2)$. Тогда $\int_0^\infty (f(x(t)) - f(\hat{x}(t))) dt \geq \int_0^\infty \langle df(\hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle dt$. В нашем случае $f(x) = x^2$ и $df(\hat{x}) = 2\hat{p}$. Тогда имеем: $\int_0^\infty x^2(t) dt - \int_0^\infty \hat{x}^2(t) dt \geq \int_0^\infty \langle 2\hat{p}(t), x(t) - \hat{x}(t) \rangle dt =$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle 2\hat{p}(t), x(t) - \hat{x}(t) \rangle - \langle 2\hat{p}(0), x(0) - \hat{x}(0) \rangle - \int_0^\infty \langle 2\hat{p}(t), \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \rangle dt = \int_0^\infty \langle 2\hat{p}(t), \hat{u}(t) - u(t) \rangle dt \geq 0$. Последнее неравенство верно, т.к. $\langle \hat{p}, v \rangle$ достигает максимума на управлении \hat{u} .

Замечание 1. $(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t))$ - решение системы (3) для начальной точки x_0 эквивалентно тому, что $(\lambda\hat{x}(\frac{t}{\lambda}), \hat{u}(\frac{t}{\lambda}), \lambda^2\hat{p}(\frac{t}{\lambda}))$ - решение системы (3) для начальной точки λx_0 . Из чего следует, что $\hat{u}(0, x_0) = \hat{u}(0, \lambda x_0)$, $\lambda \neq 0$.

3 Оптимальные траектории задачи с многоугольником

Вид оптимального синтеза в задаче (1), где Ω - многоугольник, определяется расположением оснований перпендикуляров из начала координат к граням Ω . Поэтому для начала необходимо изучить данный вопрос.

Пусть Ω - компактный выпуклый многоугольник. Пусть O - некоторая точка, лежащая во внутреннейности Ω .

Определение 1. Введем следующие определения:

- Вершины, лежащие строго между перпендикулярами к граням, ее образующим, будем называть экстремальными вершинами многоугольника Ω относительно $t. O$;
- Перпендикуляры из точки O к некоторой грани Ω , основания которых попадают строго внутрь грани будем называть экстремальными перпендикулярами многоугольника Ω относительно $t. O$;
- Перпендикуляры из точки O к некоторой грани Ω , основания которых попадают в вершину грани будем называть вырожденными перпендикулярами (вершинами) многоугольника Ω относительно $t. O$.

Пример объектов из определения 1 можно увидеть на рисунке 1.

Утверждение 1. Верны следующие утверждения:

- Существует хотя бы один экстремальный перпендикуляр Ω относительно точки O ;

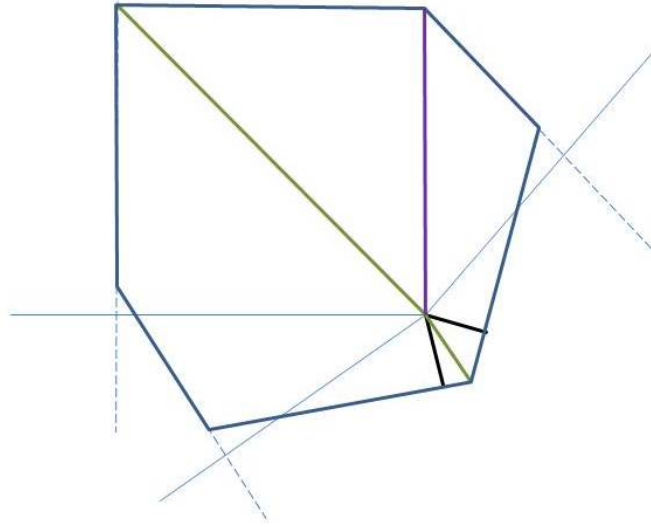


Рис. 1. Экстремальные и вырожденные перпендикуляры и экстремальные вершины

- Существует хотя бы одна экстремальная вершина Ω относительно точки O ;
- Экстремальных перпендикуляров и вершин равное число, и они чередуются;
- Существует многоугольник ровно с одним экстремальным перпендикуляром и одной экстремальной вершиной.

Доказательство. Действительно, рассмотрим функцию расстояния от O до границы Ω .

Рассмотрим экстремумы данной функции. В силу выпуклости, локальный минимум не может достигаться в вершине многоугольника, следовательно, достигается в некоторой точке строго внутри некоторой грани, следовательно является перпендикуляром к ней. Аналогично локальный максимум расстояния не может достигаться на внутренней точке грани, следовательно достигается в некоторой вершине, следовательно она обязана будет лежать между перпендикуляров к сторонам, ее содержащим. Тогда ясно существование хотя бы одного экстремального перпендикуляра и экстремальной вершины, так как в силу компактности существуют глобальные минимум и максимум. Ясно, что два локальных минимума нашей функции не могут не содержать между собой локального максимума, как и наоборот. Значит, их всегда равное число, и они чередуются.

Пример многоугольника с одним экстремальным перпендикуляром и одной экстремальной вершиной можно пронаблюдать на рисунке 2.

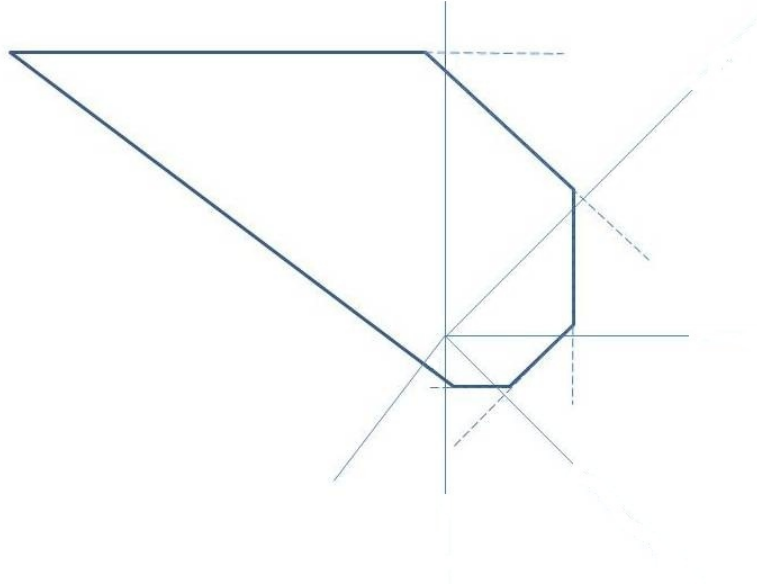


Рис. 2. Пример многоугольника с одним экстремальным перпендикуляром и одной экстремальной вершиной

■

Утверждение 1 объясняет название экстремальных перпендикуляров и вершин: на первых достигается локальный минимум функции расстояния от O до Ω , а на вторых - локальный максимум. Вырожденные же перпендикуляры не являются экстремумами этой функции, однако, как будет видно далее, играют аналогичную роль, объединяя в себе свойства экстремальных и перпендикуляров, и вершин.

Утверждение 2. Пусть Q - экстремальный или вырожденный перпендикуляр или экстремальная вершина Ω относительно начала координат. Тогда при $x_0 = -\mu Q$, $\mu > 0$ следующая траектория является оптимальной для задачи (1):

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} Q(t - \mu), t \in [0, \mu]; \\ 0, t > \mu. \end{cases} \quad (4)$$

Причем это единственные траектории с постоянным управлением.

Доказательство. Пусть $\hat{u}(t) = Q \in \Omega$ - некоторое постоянное управление. Тогда из ПМП следует, что $\dot{\hat{x}}(t) = Q \Rightarrow \hat{x}(t) = Qt + x_0$. Так как траектория обязана прийти в

ноль за конечное время, получаем, что возможен лишь случай $x_0 = -\mu Q, \mu > 0$. Тогда траектория имеет вид $\hat{x}(t) = Q(t - \mu), t \in [0, \mu]$. Тогда сопряженная функция имеет вид $\hat{p}(t) = \frac{1}{2}Q(t - \mu)^2 + p_0$. Так как $\hat{x}(t) = 0, t \geq \mu$, то $\dot{\hat{p}}(t) = \hat{x}(t) = 0, t > \mu$, значит, $\hat{p}(t) = p_0, t > \mu$. Тогда ясно, что $p_0 = 0$, т.к. иначе траектория не придет в ноль. Осталось проверить, при каких условиях выполнен принцип максимума: $\langle \hat{p}(t), Q \rangle = \max_{v \in \Omega} \langle \hat{p}(t), v \rangle$.

Пусть $\langle Q, v \rangle$ достигает максимума на $u_0 \in \Omega$. Ясно, что u_0 должно лежать на границе, т.к., увеличив модуль и оставив без изменения угол, мы увеличим скалярное произведение. Итак, $u_0 \in \partial\Omega$. Рассмотрим множество $L = \{u : \langle Q, u \rangle = \langle Q, u_0 \rangle\}$ - это прямая, ортогональная Q и проходящая через u_0 . Для любого v из одной полуплоскости, ограниченной L , $\langle Q, v \rangle > \langle Q, u_0 \rangle$, а для другой $\langle Q, v \rangle < \langle Q, u_0 \rangle$. Значит, Ω обязано лежать в одной полуплоскости от L

Пусть Q - перпендикуляр, попадающий на грань F многоугольника Ω . Пусть максимум $\langle Q, v \rangle$ достигается на $u_0 \in \partial\Omega$. Тогда получим, что L должна совпасть с прямой, содержащей грань F , иначе Ω не будет лежать по одну сторону от нее. Тогда получаем, что максимум достигается на всем ребре F , в том числе и на самом Q .

Пусть Q - экстремальная вершина, лежащая между перпендикулярами. Пусть максимум $\langle Q, v \rangle$ достигается на $u_0 \in \partial\Omega$. Тогда получим, что L должна проходить через точку $Q \in \partial\Omega$, иначе Ω не будет лежать по одну сторону от нее. Тогда получаем, что $u_0 = Q$.

Пусть Q - иная точка Ω . Тогда, как несложно видеть, любая прямая ортогональная Q и проходящая через конец вектора Q не будет удовлетворять нужным требованиям: Ω будет лежать в обеих полуплоскостях. Значит, принцип максимума для такой траектории выполнен не будет, и она не будет оптимальной.

■

В произвольном многоугольнике Ω проведем все экстремальные перпендикуляры и экстремальные вершины. Как мы уже знаем, они чередуются. Между ними могут находиться вырожденные перпендикуляры. Таким образом, мы получим разбиение на секторы. Причем, в каждом секторе будет строгое возрастание (или убывание) функции расстояния от начала координат до границы многоугольника. Рассмотрим произвольный сектор и выберем обход от наименьшего расстояния к наибольшему. Тогда произвольный сектор будет заключен между A и V , где $|A| < |V|$, A - либо экстремальный либо вырожденный перпендикуляр (причем в случае вырожденности

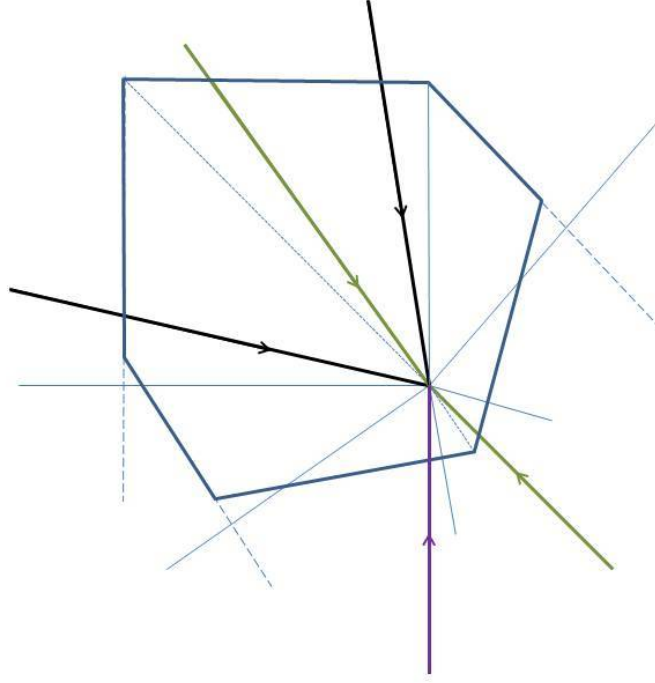


Рис. 3. Траектории с постоянным управлением для многоугольника

в секторе находится ребро, ортогональное A). V - либо экстремальная вершина, либо вырожденный перпендикуляр (причем в случае вырожденности в секторе находится ребро, составляющее с V острый угол).

Мы знаем оптимальные траектории для начальных точек, лежащих на полупрямых, содержащих $-A$ и $-V$. Опишем, как устроен оптимальный синтез задачи (1) внутри данного сектора.

Вычислять оптимальную траекторию будет удобнее в обратном времени. Пусть x_0 некоторая точка нашего сектора и $T = T(x_0)$ - момент попадания оптимальной траектории в ноль. Если мы найдем тройку $\{x(t), u(t), p(t)\}$, что при п.в. $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t); \\ \dot{p}(t) = x(t); \\ \langle p(t), u(t) \rangle = \max_{v \in \Omega} \langle p(t), v \rangle; \\ x(0) = 0; \\ p(0) = 0; \\ x(T) = -x_0. \end{cases} \quad (5)$$

То получим, что тройка $\{\hat{x}(t) = -x(T - t), \hat{u}(t) = u(T - t), \hat{p}(t) = p(T - t)\}$ будет

удовлетворять системе из ПМП при $t \in [0, T]$, значит будет оптимальной для начальной точки x_0 . Не будем забывать, что найденная нами траектория $x(t)$ будет симметрична настоящей $\hat{x}(t)$ относительно нуля и иметь обратное течение времени. Во избежание путаницы на всех последующих картинках для произвольного сектора приведены настоящие оптимальные траектории $\hat{x}(t)$.

Обозначим наблюдаемый сектор за I . Занумеруем вершины сектора I от A до V (в направлении увеличения расстояния) и обозначим их $A_0 \dots A_n$, где $A_0 = A$, $A_n = V$. В силу нашей замены оптимальные траектории, соответствующие A_0 и A_n также отразятся относительно нуля. Обозначим за $F_k = A_{k+1} - A_k$ и за G_k основания перпендикуляров из начала координат к F_k . Ясно, что в нашем секторе при $k = 1, \dots, n - 1$ все G_k не попадают на грань F_k , и A_k лежат строго между G_k и A_{k+1} .

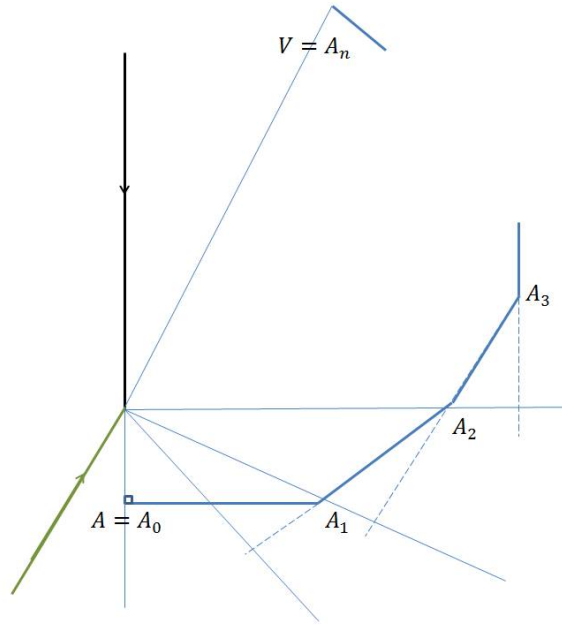


Рис. 4. Произвольный сектор: обозначения

Зафиксируем некоторое произвольное $\mu_0 > 0$. В дальнейшем будет видно, как μ_0 зависит от $x_0 \in I$. Будем двигаться, начиная с управления A_0 . По доказанному ранее имеем оптимальный кусок траектории при $t \in [0, \mu_0]$:

$$\begin{cases} x_0(t) = A_0 t; \\ u_0(t) = A_0; \\ p_0(t) = \frac{1}{2} A_0 t^2. \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что если p лежит между G_k и G_{k+1} , то максимум $\langle p, u \rangle$ достигается при $u = A_{k+1}$. Совершим первый шаг вычисления оптимальной траектории, а затем используем индуктивный переход.

Шаг 1. Если p лежит между $G_0 = A_0$ и G_1 , максимум достигается при $u = A_1$. Рассмотрим траекторию при $t > \mu_0$:

$$\begin{cases} x_1(t) = A_0\mu_0 + A_1(t - \mu_0); \\ u_1(t) = A_1; \\ p_1(t) = A_0\mu_0 t + \frac{1}{2}A_1(t - \mu_0)^2 + c_0^1. \end{cases} \quad (7)$$

Где $c_0^1 = -\frac{1}{2}A_0\mu_0^2$ - константа, которая находится из условия непрерывности сопряженной функции: $p_0(\mu_0) = p_1(\mu_0)$. Из явного уравнения видно, что при малом $t = \mu_0 + 0$ сопряженная функция $p_1(t)$ будет находиться в малой окрестности A_0 , а, значит, можно добиться его расположения между A_0 и G_1 , а следовательно, на этом промежутке времени траектория будет оптимальной. При увеличении t вектор $p_1(t)$ будет стремиться к вектору параллельному A_1 , а, значит, в некоторый момент пересечет G_1 , который лежит между A_0 и A_1 . Тогда данная траектория потеряет оптимальность, т.к. максимум скалярного произведения будет достигаться уже на A_2 . Найдем момент времени μ_1 , когда $p_1(t)$ станет параллелен G_1 .

Имеем: μ_1 есть решение квадратного уравнения: $f(t) = \langle p_1(t), F_2 \rangle = 0$. Причем коэффициент при t^2 равен $\frac{1}{2}\langle A_1, F_1 \rangle > 0$, т.к. A_1 между G_1 и A_2 . Покажем, что $f(\mu_0) < 0$, что будет означать наличие корней у данного уравнения, причем один строго меньше, а второй (подходящий нам) строго больше, чем μ_0 . Действительно, $f(\mu_0) = \langle p_1(\mu_0), F_1 \rangle = \langle p_0(\mu_0), F_1 \rangle = \langle G_0(\mu_0), F_1 \rangle$, что очевидно меньше нуля, т.к. все углы в нашем секторе тупые. Итак, можно явно выписать момент времени μ_1 :

$$\mu_1 = \mu_0\delta_1 = \mu_0\left(1 - \frac{\gamma_0^1}{\gamma_1^1} + \sqrt{\frac{\gamma_0^1}{\gamma_1^1}\left(\frac{\gamma_0^1}{\gamma_1^1} - 1\right)}\right), \text{ где } \gamma_j^1 = \langle A_j, F_1 \rangle.$$

Тогда получаем полупрямую переключения траектории в плоскости (x_1, x_2) с направляющим вектором: $L_1 = (A_0 + A_1(\delta_1 - 1))$. Причем, как легко видеть, $L_1 = \frac{1}{\mu_0(\mu_1 - \mu_0)}(p_1(\mu_1) - p_1(\mu_0)) = a_1G_1 - a_2A_0$, где константы $a_i > 0$. Тогда $\langle L_1, F_1 \rangle > 0$, что означает, что L_1 лежит между G_1 и A_1 .

Шаг $k < n$.

Пусть посчитаны все моменты времени $\mu_j = \delta_j\mu_0, \delta_{j+1} > \delta_j$ на шагах $j = 1 \dots k -$

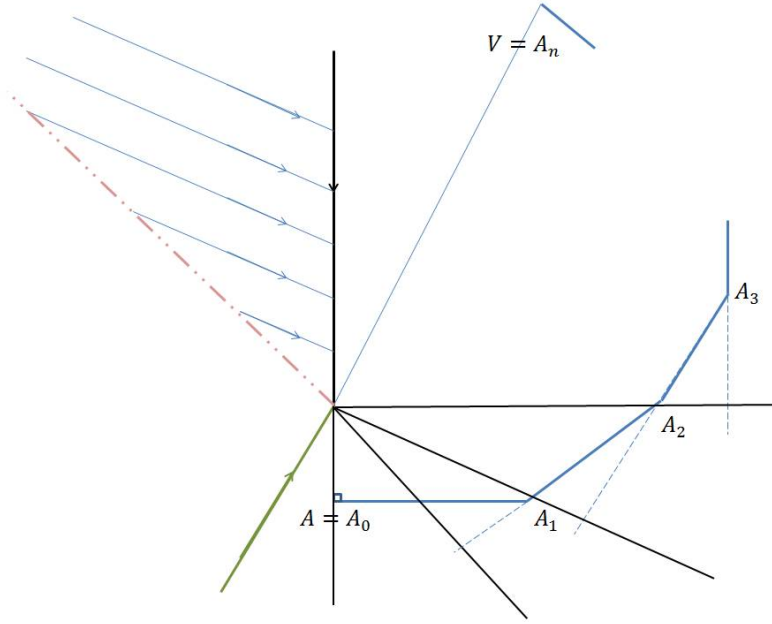


Рис. 5. Произвольный сектор: шаг 1

1. В момент времени μ_k функция $p_k(t)$ должна стать параллельна перпендикуляру G_k к грани $F_k = A_{k+1} - A_k$. Напишем явно траектории k -го шага (пологая $\mu_{-1} = \delta_{-1} = 0, \delta_0 = 1$):

$$\begin{cases} x_k(t) = \sum_{j=0}^{k-1} A_j(\mu_j - \mu_{j-1}) + A_k(t - \mu_{k-1}); \\ u_k(t) = A_k; \\ p_k(t) = \sum_{j=0}^{k-1} A_j(\mu_j - \mu_{j-1})t + \frac{1}{2}A_k(t - \mu_{k-1})^2 + c_0^k. \end{cases} \quad (8)$$

Где $c_0^k = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} A_j(\mu_j^2 - \mu_{j-1}^2)$ - константа, которая последовательно находится из условия непрерывности сопряженной функции: $p_{k-1}(\mu_{k-1}) = p_k(\mu_{k-1})$ и того, что $c_0^0 = 0$.

Для нахождения следующего момента времени μ_k , когда функция $p_k(t)$ должна стать параллельна перпендикуляру G_k к грани $F_k = A_{k+1} - A_k$, необходимо решить квадратное уравнение $f(t) = \langle p_k(t), F_k \rangle = 0$. Аналогично первому шагу, покажем что $f(\mu_{k-1}) < 0$. Действительно, $\langle p_k(\mu_{k-1}), F_k \rangle = \langle p_{k-1}(\mu_{k-1}), F_k \rangle = \langle G_{k-1}, F_k \rangle < 0$. Несложно явно выписать момент времени μ_k :

$$\begin{aligned} \mu_k = \mu_0 \delta_k = \mu_0 (\delta_{k-1} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\gamma_j^k}{\gamma_k^k} (\delta_j - \delta_{j-1})) + \\ + \sqrt{(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\gamma_j^k}{\gamma_k^k} (\delta_j - \delta_{j-1}))^2 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\gamma_j^k}{\gamma_k^k} (\delta_j - \delta_{j-1}) (2\delta_{k-1} - \delta_{j-1} - \delta_j)}, \text{ где: } \gamma_j^k = \langle A_j, F_k \rangle. \end{aligned}$$

Направляющий вектор полупрямой переключения имеет вид: $L_k = \sum_{j=0}^k A_j(\delta_j - \delta_{j-1})$.

Причем, как несложно видеть, $L_k = \frac{1}{\mu_0}(\frac{1}{\mu_k - \mu_{k-1}}p_k(\mu_k) - \frac{1}{\mu_k - \mu_{k-1}}p_k(\mu_{k-1}) + \frac{1}{2}A_k(\mu_k - \mu_{k-1})) = a_1G_k - a_2G_{k-1} + a_3A_k$, где константы $a_i > 0$. Отсюда, помня, что $\langle G_k, F_k \rangle = 0$, $\langle G_{k-1}, F_k \rangle < 0$, $\langle A_k, F_k \rangle > 0$, получаем, что $\langle L_k, F_k \rangle > 0$, значит, L_k лежит между G_k и A_k . Более ясного геометрического смысла прямых L_k , к сожалению, установить не удалось.

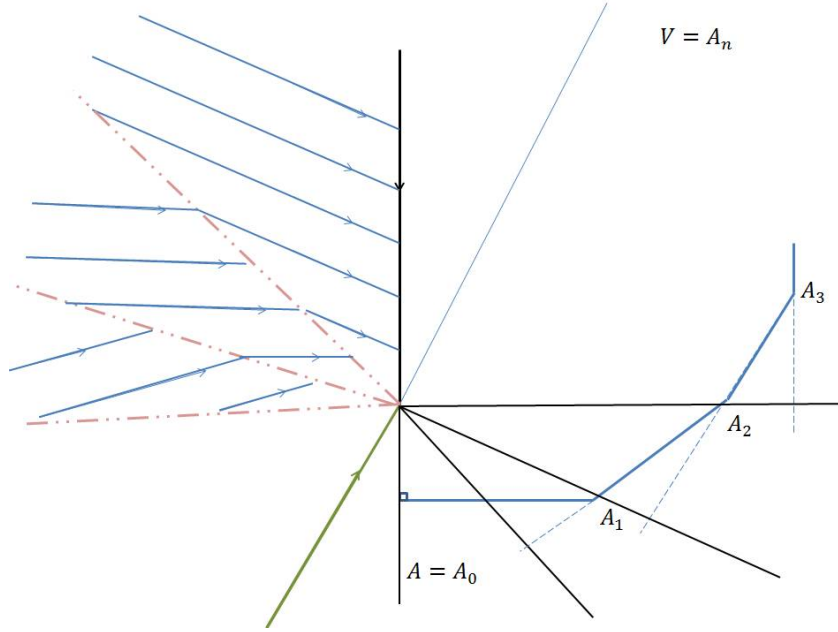


Рис. 6. Произвольный сектор: индуктивное вычисление

Шаг n .

На последнем n -ом шаге p окажется в секторе (и не будет выходить из него) между G_{n-1} и A_n , где максимум скалярного произведения достигается на A_n . Получаем оптимальную траекторию ($t > \mu_{n-1}$):

$$\begin{cases} x_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} A_j(\mu_j - \mu_{j-1}) + A_n(t - \mu_{n-1}); \\ u_n(t) = A_n; \\ p_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} A_j(\mu_j - \mu_{j-1})t + \frac{1}{2}A_n(t - \mu_{n-1})^2 + c_0^n. \end{cases} \quad (9)$$

Где $c_0^n = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} A_j(\mu_j^2 - \mu_{j-1}^2)$

Сделаем обратную замену для нахождения "настоящих" оптимальных траекто-

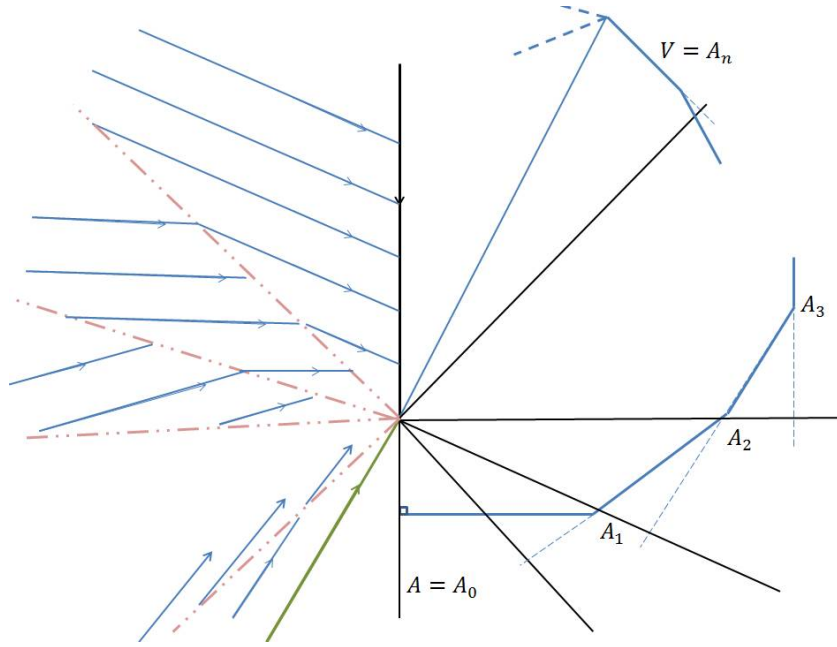


Рис. 7. Произвольный сектор: завершающий шаг

рий задачи (1) и сформулируем теорему:

Теорема 2. Пусть x_0 - некоторая точка на плоскости. Тогда:

1. Если $x_0 = 0$, то имеем особую оптимальную траекторию:

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = 0, t \geq 0; \\ \hat{u}(t) = 0, t \geq 0; \\ \hat{p}(t) = 0, t \geq 0. \end{cases} \quad (10)$$

2. Если $x_0 = -\mu Q$, где Q - экстремальный или вырожденный перпендикуляр или экстремальная вершина, $\mu > 0$, то имеем следующую оптимальную траекторию:

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \begin{cases} Q(t - \mu), t \in [0, \mu]; \\ 0, t > \mu. \end{cases} \\ \hat{u}(t) = \begin{cases} Q, t \in [0, \mu]; \\ 0, t > \mu. \end{cases} \\ \hat{p}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}Q(t - \mu)^2, t \in [0, \mu]; \\ 0, t > \mu. \end{cases} \end{cases} \quad (11)$$

3. Пусть $x_0 \in I$, где I - сектор между прямыми, содержащими $-A_0$ и $-A_n$, где $|A_0| < |A_n|$, A_0 - либо экстремальный либо вырожденный перпендикуляр, A_n - либо вырожденный перпендикуляр, либо экстремальная вершина. Пусть $-I$ (сектор между A_0 и A_n) содержит вершины многоугольника, обозначенные по порядку $A_1 \dots A_{n-1}$. Тогда сектор I разбивается на подсекторы, ограниченные прямыми с направляющими векторами $L_0 = -A_0, L_1, \dots, L_{n-1}, L_n = -A_n$, которые находятся независимо от x_0 . Пусть x_0 попадает в сектор между L_k и L_{k+1} , $0 \leq k \leq n$, или же лежит на одной из этих прямых при $0 < k < n$. Числа μ_0 и s_0 однозначно находятся из соотношения $L_k \mu_0 + A_{k+1} s_0 = x_0$. Тогда имеем следующую оптимальную траекторию:

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} \mu_0 L_k - A_{k+1}(s_0 - t), t \in [0, s_0]; \\ \mu_0 L_{k-1} - A_k(s_0 + \mu_k - \mu_{k-1} - t), t \in [s_0, s_0 + \mu_k - \mu_{k-1}]; \\ \dots \\ \mu_0 L_j - A_{j+1}(s_0 + \mu_k - \mu_j - t), t \in [s_0 + \mu_k - \mu_{j+1}, s_0 + \mu_k - \mu_j]; \\ \mu_0 L_{j-1} - A_j(s_0 + \mu_k - \mu_{j-1} - t), t \in [s_0 + \mu_k - \mu_j, s_0 + \mu_k - \mu_{j-1}]; \\ \dots \\ -A_0 \mu_0 - A_1(s_0 + \mu_k - \mu_0 - t), t \in [s_0 + \mu_k - \mu_1, s_0 + \mu_k - \mu_0]; \\ -A_0(s_0 + \mu_k - t), t \in [s_0 + \mu_k - \mu_0, s_0 + \mu_k]; \\ 0, t > s_0 + \mu_k. \end{cases}$$

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} A_{k+1}, t \in [0, s_0]; \\ A_k, t \in [s_0, s_0 + \mu_k - \mu_{k-1}]; \\ \dots \\ A_{j+1}, t \in [s_0 + \mu_k - \mu_{j+1}, s_0 + \mu_k - \mu_j]; \\ A_j, t \in [s_0 + \mu_k - \mu_j, s_0 + \mu_k - \mu_{j-1}]; \\ \dots \\ A_1, t \in [s_0 + \mu_k - \mu_1, s_0 + \mu_k - \mu_0]; \\ A_0, t \in [s_0 + \mu_k - \mu_0, s_0 + \mu_k]; \\ 0, t > s_0 + \mu_k. \end{cases}$$

$$\hat{p}(t) = \begin{cases} \mu_0 L_k(s_0 - t) + \frac{1}{2} A_{k+1}(s_0 - t)^2 + c_0^{k+1}, t \in [0, s_0]; \\ \mu_0 L_{k-1}(s_0 + \mu_k - \mu_{k-1} - t) + \frac{1}{2} A_k(s_0 + \mu_k - \mu_{k-1} - t)^2 + c_0^k, t \in [s_0, s_0 + \mu_k - \mu_{k-1}]; \\ \dots \\ \mu_0 L_j(s_0 + \mu_k - \mu_j - t) + \frac{1}{2} A_{j+1}(s_0 + \mu_k - \mu_j - t)^2 + c_0^{j+1}, \\ t \in [s_0 + \mu_k - \mu_{j+1}, s_0 + \mu_k - \mu_j]; \\ \mu_0 L_{j-1}(s_0 + \mu_k - \mu_{j-1} - t) + \frac{1}{2} A_j(s_0 + \mu_k - \mu_{j-1} - t)^2 + c_0^j, \\ t \in [s_0 + \mu_k - \mu_j, s_0 + \mu_k - \mu_{j-1}]; \\ \dots \\ A_0 \mu_0 (s_0 + \mu_k - \mu_0 - t) + \frac{1}{2} A_1 (s_0 + \mu_k - \mu_0 - t)^2 + c_0^1, t \in [s_0 + \mu_k - \mu_1, s_0 + \mu_k - \mu_0]; \\ \frac{1}{2} A_0 (s_0 + \mu_k - t)^2, t \in [s_0 + \mu_k - \mu_0, s_0 + \mu_k]; \\ 0, t > s_0 + \mu_k. \end{cases}$$

Где:

- $L_k = -\sum_{j=0}^k A_j (\delta_j - \delta_{j-1});$
- $\delta_0 = 1, \delta_{-1} = 0;$
- $\delta_k = (\delta_{k-1} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\gamma_j^k}{\gamma_k^k} (\delta_j - \delta_{j-1})) + \sqrt{(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\gamma_j^k}{\gamma_k^k} (\delta_j - \delta_{j-1}))^2 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\gamma_j^k}{\gamma_k^k} (\delta_j - \delta_{j-1}) (2\delta_{k-1} - \delta_{j-1} - \delta_j)}, k > 1$
- $\mu_j = \delta_j \mu_0;$
- $\gamma_j^k = \langle A_j, A_{k+1} - A_k \rangle;$
- $c_0^m = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{m-1} A_j (\mu_j^2 - \mu_{j-1}^2).$

Общая картина (без случаев вырождения) оптимального синтеза устроена следующим образом: оптимальные траектории движутся от траекторий, соответствующих локальным максимумам к траекториям локальных минимумов функции расстояния от начала координат. Экстремальные вершины порождают начало движения, никакие траектории не входят в траектории, им соответствующие. Все траектории в окрестности траектории экстремального перпендикуляра входят в нее и достигают нуля за конечное время. Вырожденные перпендикуляры играют промежуточную роль: траектории входят в соответствующую им оптимальную прямую лишь в одной полуплоскости, и новое движение порождается в другой.

Замечание 2. Из явного вида траекторий видно, что $\forall x_0 \langle x_0, \hat{u}(0, x_0) \rangle < 0$, т.е. модуль координаты строго убывает вдоль оптимальной траектории. Следовательно,

оптимальная траектория $\hat{x}(t, x_0)$ при $t \geq 0$ не покидает шар с центром в начале координат и радиуса $|x_0|$.

Пронаблюдаем полученные результаты на примерах.

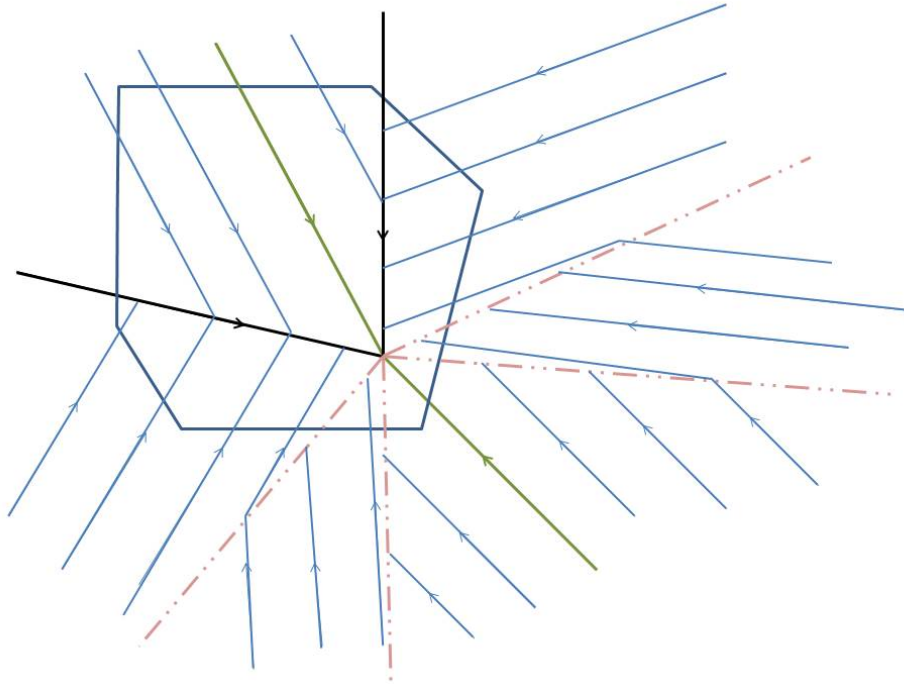


Рис. 8. Пример оптимального синтеза для многоугольника (случай без вырожденных перпендикуляров)

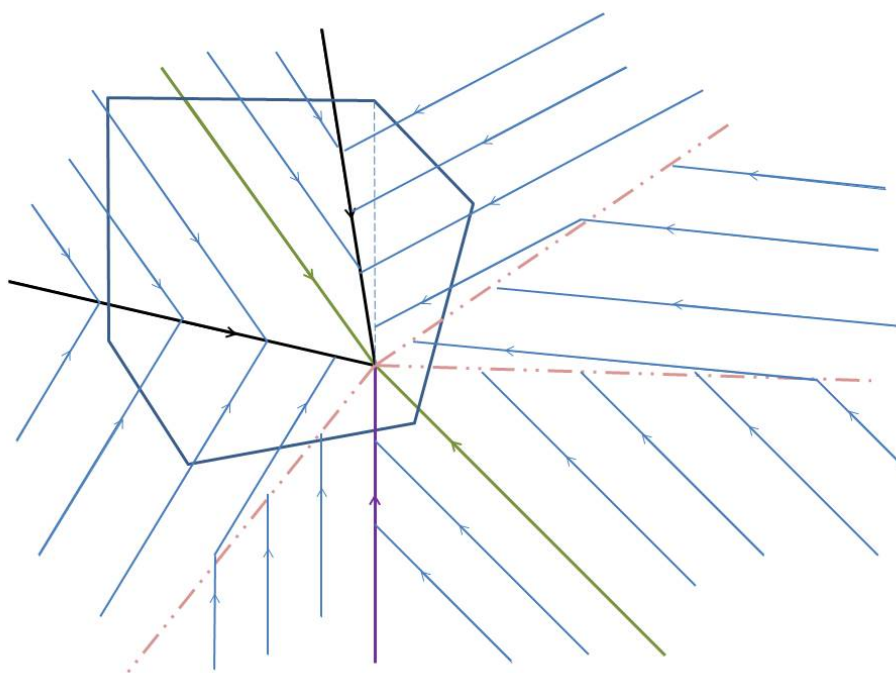


Рис. 9. Пример оптимального синтеза для многоугольника (случай с вырожденным перпендикуляром)

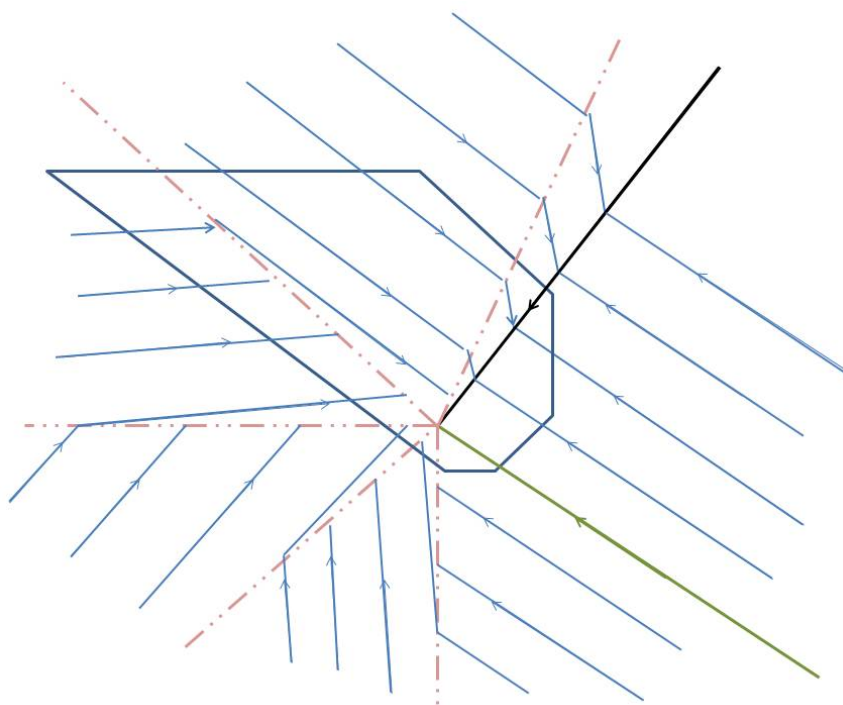


Рис. 10. Пример оптимального синтеза для многоугольника (случай с единственными экстремальными перпендикуляром и вершиной)

4 Приближение траекторий задачи с управлением из сильно выпуклого множества с гладкой границей траекториями последовательности задач с многоугольником

Рассмотрим задачу (1), где Ω - сильно выпуклое (выпуклое множество, кривизна границы которого нигде не обращается в ноль) компактное множество с гладкой границей и началом координат во внутренней.

Заметим, что граница сильно выпуклого множества не может содержать линейных кусков, откуда следует единственность $argmax_{v \in \Omega} \langle p, v \rangle$ при $p \neq 0$. Действительно, пусть существует хотя бы два вектора v, u , на которых достигается максимум. Так как $p \neq 0$, они лежат на границе Ω . В силу его выпуклости, весь отрезок $\{sv + (1 - s)u, 0 < s < 1\}$ содержится в Ω , причем на любом векторе из отрезка достигается то же самое максимальное значение, а, значит, весь отрезок лежит в $argmax_{v \in \Omega} \langle p, v \rangle$, а, следовательно есть часть границы Ω .

Пусть Ω_n - последовательность вписанных многоугольников в Ω , такая что $\rho(\Omega_n, \Omega) = sup_{v \in \Omega} \rho(\Omega_n, v) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Рассмотрим последовательность задач:

$$\begin{cases} \int_0^\infty x^2(t) dt \rightarrow inf, x \in \mathbb{R}^2; \\ \dot{x}(t) = u, u \in \Omega_n; \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1_n)$$

Итак, согласно ПМП, решения задач (1) и $(1)_n$ являются решениями следующих дифференциальных включений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in U(x(t)) = argmax_{v \in \Omega} \langle p(x), v \rangle \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (DI)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in U_n(x(t)) = argmax_{v \in \Omega_n} \langle p_n(x), v \rangle \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (DI_n)$$

Где $p(x) = \hat{p}(0, x)$, $p_n(x) = \hat{p}_n(0, x)$ - сопряженные функции из ПМП для задач (1) и $(1)_n$ соответственно.

Пусть $O_R(0) \in \mathbb{R}^2$ - замкнутый шар радиуса R и центром в нуле. Докажем, что решения $x_n(t, x_0)$ включений (DI_n) приближают решение $x(t, x_0)$ включения (DI) с увеличением n равномерно на любом шаре $O_R(0)$. А именно, верна следующая теорема:

Теорема 3. $\forall R > 0 \forall \varepsilon > 0 \exists N(R, \varepsilon) \forall n \geq N \forall x_0 \in O_R(0) \max_{0 \leq t < \infty} |x_n(t, x_0) - x(t, x_0)| \leq \varepsilon$.

Данное утверждение получается при применении к (DI) и $(DI)_n$ теоремы Филиппова о зависимости дифференциальных включений от начальных условий и правой части (см. [3, с. 68]). Для ее формулировки введем несколько определений.

Определение 2. Многозначная функция $F(t, x), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^m$ удовлетворяет в области G основным условиям, если:

- $\forall (t, x) \in G$ множество $F(t, x)$ непусто компактно и выпукло;
- F полунепрерывна сверху на G .

Пусть $F(t, x)$ - многозначная функция, определенная в ε - окрестности области G , $F^*(t, x)$ - многозначная функция, определенная в области G . Пусть $0 < \delta\sqrt{2} < \varepsilon$.

Обозначение 1. $d_G(F^*, F) \leq \delta \iff \forall (t, x) \in G : F^*(t, x) \subset (coF(t^\delta, x^\delta))^\delta$.

Теорема 4 (А. Ф. Филиппов). Пусть $F(t, x)$ удовлетворяет основным условиям в области G , $t_0 \in [a, b]$ и $(t_0, x_0) \in G$. Все решения следующей задачи:

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t, x); \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (12)$$

при $t \in [a, b]$ существуют, и их графики лежат в G . Тогда: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что $\forall t_0^* \in [a, b], \forall x_0^*, \forall F^*(t, x)$, таких что:

- $|t_0^* - t_0| \leq \delta$;
- $|x_0^* - x_0| \leq \delta$;
- $d_G(F^*, F) \leq \delta$;
- F^* удовлетворяет основным условиям;

выполнено: любое решение задачи

$$\begin{cases} \dot{x}^* \in F(t, x^*); \\ x^*(t_0^*) = x_0^*. \end{cases} \quad (13)$$

при $t \in [a, b]$ существует и отличается от некоторого решения предыдущей задачи не больше, чем на ε . Т.е. любое решение $x^*(t)$ или существует на $[a, b]$, или его можно продолжить на весь данный отрезок, и для него найдется некоторое решение $x(t)$, что $\max_{a \leq t \leq b} |x^*(t) - x(t)| \leq \varepsilon$.

Применим данную теорему к нашей задаче.

Утверждение 3. Пусть $f(x, v) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная функция, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - компакт. Тогда многозначная функция $U(x) = \operatorname{argmax}_{v \in \Omega} f(x, v)$ полунепрерывна сверху на \mathbb{R}^n .

Доказательство. Предположим противное. Пусть функция не является полунепрерывной сверху в точке x_0 . Тогда $\exists c > 0 \forall \delta_n (\delta_n \rightarrow 0) \exists x_n$, что $\|x_n - x_0\| < \delta_n$, но $U(x_n) \not\subset U^c(x_0)$, т.е. $\exists v_n \in U(x_n)$, что $\rho(v_n, U(x_0)) \geq c$. Из последовательности v_n выберем сходящуюся и, не меняя обозначений, будем считать, что $v_n \rightarrow v_0 \in \Omega$, но $v_0 \notin U(x_0)$. Пусть $u_0 \in U(x_0)$ - некоторый вектор. Обозначим $M = f(x_0, u_0)$. Тогда $f(x_n, v_n) \rightarrow f(x_0, v_0) = M - d, d > 0$. Выберем некоторую последовательность $u_n \in \Omega, u_n \rightarrow u_0$. Тогда $f(x_n, u_n) \rightarrow f(x_0, u_0) = M$. То есть, начиная с некоторого номера, значения $f(x_n, u_n) > f(x_n, v_n)$, что противоречит тому, что $v_n \in U(x_n)$. ■

Утверждение 4. В обозначениях текущей задачи функция $U(p) = \operatorname{argmax}_{v \in \Omega} \langle p, v \rangle$ является однозначной гладкой функцией при $p \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\xi(s) \in C^\infty[a, b]$ - параметризация границы Ω с натуральным параметром s . $u_0 = \operatorname{argmax}_{v \in \Omega} \langle p_0, v \rangle$ лежит на границе Ω и есть $\xi(s_0)$ для некоторого s_0 , которое является решением уравнения $\langle p_0, \dot{\xi}(s_0) \rangle = 0$ (для сильно выпуклого множества есть ровно два решения данного уравнения, на одном достигается минимум, на другом максимум скалярного произведения $\langle p_0, \xi(s_0) \rangle$). Рассмотрим функцию $F(p, s) = \langle p, \dot{\xi}(s) \rangle$. Тогда $F(p_0, s_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial s}(p, s) = \langle p, \ddot{\xi}(s) \rangle$, тогда $\frac{\partial F}{\partial s}(p_0, s_0) \neq 0$ (а значит и в некоторой окрестности), т.к. $\ddot{\xi}(s_0)$ - не ноль ввиду сильной выпуклости и при этом параллелен $p_0 \neq 0$. Тогда доказательство утверждения следует из теоремы о неявной функции, примененной к $F(p, s)$. ■

Утверждение 5. Решение включения (DI) единственно и есть гладкая функция при $x_0 \neq 0$.

Доказательство. По теореме 1, отображение $p(x)$ есть биекция, причем $p(0) = 0$. Таким образом, $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Таким образом, правая часть включения есть однозначная функция при $t \in [0, T(x_0))$.

Тогда $x(t)$ - решение (DI) эквивалентно тому, что $(x(t), \hat{p}(t))$ - решение системы ОДУ с гладкой правой частью:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = U(p); \\ \dot{p}(t) = x; \\ x(0) = x_0; \\ p(0) = \hat{p}(0, x_0). \end{cases} \quad (14)$$

Откуда следует единственность и гладкость $\hat{x}(t)$ и $\hat{p}(t) \forall x_0 \neq 0, t \in [0, T(x_0))$. ■

Применяя данное утверждение, имеем в нашем случае:

- $G = [0, T] \times \mathbb{R}^2$, где $T > 0$ - любое число;
- $F(t, x) = U(x)$ - удовлетворяет основным условиям на всём \mathbb{R}^2 ;
- для фиксированного номера n : $F^*(t, x) = U_n(x)$ - удовлетворяет основным условиям на всём \mathbb{R}^2 ;
- $t_0 = t_0^* = 0 \in [0, T]$, $x_0 = x_0^* = 0 \in \mathbb{R}^2$;
- решения задач (DI) и $(DI)_n$ существуют по Теореме Филиппова о существовании решения дифференциального включения (см. [3, с. 60]) и, очевидно, графики решений не покидают G .
- решение задачи (DI) единственно и есть гладкая функция в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Тогда утверждение теоремы примет вид: $\forall x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(x_0, \varepsilon, T) > 0$, что если $d_G(U_n, U) \leq \delta$, тогда любое решение задачи $(DI)_n$ (в том числе и оптимальная траектория $x_n(t, x_0)$ задачи $(1)_n$) отличается от единственного решения $x(t)$ задачи (DI) не более чем на ε , т.е. $\max_{0 \leq t \leq T} |x_n(t, x_0) - x(t, x_0)| \leq \varepsilon$. Таким образом, для доказательства равномерной аппроксимации в шаре оптимальных траекторий задачи (DI) траекториями задач $(DI)_n$ достаточно показать, что

$$\forall \delta > 0 \exists N(\delta) \forall n \geq N d_G(U_n, U) \leq \delta. \quad (15)$$

Действительно, пусть (14) выполнено. Тогда для фиксированного R выберем $T = T_R = \max_{x_0 \in O_R(0)}(T(x_0))$. Тогда для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ по приведенным выше утверждениям. Покажем, что на любом компакте K можно выбрать минимальное $\delta(\varepsilon) = \min_{x_0 \in O_R(0)}(\delta(x_0, \varepsilon))$. Предположим, что это не так. Тогда найдется последовательность $\{x_k\} \in K$, что $\delta(x_k, \varepsilon, T) \rightarrow 0$. Выберем сходящуюся подпоследовательность и, не меняя обозначений, будем считать, что $x_k \rightarrow x_0 \in K$. Выберем $\delta(x_0, \frac{\varepsilon}{2}, T) > 0$ так, чтобы данная δ -окрестность не содержала начало координат. Тогда, с одной стороны, в любой окрестности точки x_0 найдутся точки, для которых $\delta(x_k, \varepsilon, T) < \delta(x_0, \varepsilon, T)$. С другой стороны, покажем, что $\forall x : \|x - x_0\| \leq \delta(x_0, \frac{\varepsilon}{2}, T)$ выполнено $\delta(x, \varepsilon, T) \geq \frac{1}{2}\delta(x_0, \frac{\varepsilon}{2}, T)$, что приводит к противоречию. Рассмотрим задачи:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in U(x(t)); \\ x(0) = x. \end{cases} \quad (DI^*)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in U^*(x(t)); \\ x(0) = x^*. \end{cases} \quad (DI^{**})$$

Пусть $\|x^* - x\| \leq \frac{1}{2}\delta(x_0, \frac{\varepsilon}{2}, T)$ и $d_G(U^*, U) \leq \frac{1}{2}\delta(x_0, \frac{\varepsilon}{2}, T)$. Тогда $\|x^* - x_0\| \leq \delta(x_0, \frac{\varepsilon}{2}, T)$, и по теореме Филиппова:

- Решение задачи $(DI)^*$ существует ($x(t, x)$ - единственное решение) и $\max_{0 \leq t \leq T} |x^*(t, x) - x(t, x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$;
- Решение задачи $(DI)^{**}$ существует (пусть $x^{**}(t, x_0^*)$ - некоторое решение) и $\max_{0 \leq t \leq T} |x^{**}(t, x_0^*) - x(t, x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$;
- Значит, $\max_{0 \leq t \leq T} |x^*(t, x) - x(t, x)| \leq \varepsilon$, т.е. $\delta(x, \varepsilon, T) \geq \frac{1}{2}\delta(x_0, \frac{\varepsilon}{2}, T)$.

Далее выберем $N(\delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon)$ из (13). Тогда получим, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall x_0 \in O_R(0) \max_{0 \leq t \leq T_R} |x_n(t, x_0) - x(t, x_0)| \leq \varepsilon$.

Причем мы выбрали T_R так, что $x(t, x_0) = 0 \forall t \geq T_R \forall x_0 \in O_R(0)$. Возможно $x_n(T_R) \neq 0$, однако $\forall x_0 \in O_R(0) |x_n(T_R, x_0)| \leq \varepsilon$ и тогда, по замечанию 1, $\forall t \geq T_R \forall x_0 \in O_R(0) |x_n(T_R, x_0)| \leq \varepsilon$. Тогда утверждение можно записать следующим образом: $\forall \varepsilon >$

$0 \exists N(\varepsilon) \forall x_0 \in O_R(0) \max_{0 \leq t < \infty} |x_n(t, x_0) - x(t, x_0)| \leq \varepsilon$, что и есть утверждение теоремы 3.

Чтобы показать (14), докажем следующую теорему (немного более сильное утверждение):

Теорема 5. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall x \in \mathbb{R}^2 U_n(x) \subset U^\varepsilon(x)$.

Доказательство.

Заметим, что функции $U(x)$ и $U_n(x)$ зависят лишь от направления вектора x , и $U_n(0) = \Omega_n \subset \Omega = U(0)$. Таким образом, нам достаточно доказать утверждение лишь на единичной окружности $\partial O_1(0)$.

Введем обозначения. $U(x) = u(x)$, где $u(x)$ - однозначная (в силу сильной выпуклости) непрерывная функция при $x \in \partial O_1(0)$. Пусть $\alpha_n(x) \in \operatorname{argmax}_{\Omega_n} \langle p(x), v \rangle$ - некоторая фиксированная однозначная последовательность. Пусть $u_n(x) \in U_n(x) = \operatorname{argmax}_{\Omega_n} \langle p_n(x), v \rangle$ - однозначная последовательность, равная серединам граней многоугольника, если $U_n(x)$ - целая грань.

Доказательство теоремы проведем по следующему плану:

1. Докажем, что $p_n \Rightarrow p$ при $x \in K$, где $K \in \mathbb{R}^2$ - произвольный компакт. Доказательство данного пункта наиболее сложное и будет рассмотрено отдельно далее.

2. Ясно, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \forall n \geq N_1 \forall x \in \partial O_1(0) \forall v_1, v_2 \in U_n(x) \|v_1 - v_2\| < \varepsilon$. Тогда для доказательства теоремы достаточно показать, что $u_n(x) \Rightarrow u(x)$ на $\partial O_1(0)$. Действительно, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \forall n \geq N_2 \forall x \in \partial O_1(0) \|u_n(x) - u(x)\| < \varepsilon$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq \max(N_1, N_2) \forall n \geq N \forall x \in \partial O_1(0) \forall v_n(x) \in U_n(x) \|v_n(x) - u(x)\| \leq \|v_n(x) - u_n(x)\| + \|u_n(x) - u(x)\| < 2\varepsilon$, т.е. $U_n(x) \subset U^{2\varepsilon}(x)$.

3. Покажем, что для доказательства сходимости $u_n(x) \Rightarrow u(x)$ на $\partial O_1(0)$ достаточно установить, что $\langle p(x), u_n(x) \rangle \Rightarrow \langle p(x), u(x) \rangle$ на $\partial O_1(0)$. Предположим, что это неверно. Тогда $\exists c > 0 \forall N \exists n \geq N \exists x_n \in \partial O_1(0)$, что $\forall n \|u_n(x_n) - u(x_n)\| \geq c$. Выберем сходящуюся подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Не меняя обозначений, считаем что $x_n \rightarrow x \in \partial O_1(0)$. Тогда $u(x_n) \rightarrow u(x)$. Выберем сходящуюся подпоследовательность последовательности $u_n(x_n)$. Не меняя обозначений, считаем, что $u_n(x_n) \rightarrow v \neq u(x)$ по предположению. Кроме того, $u(x)$ единственный аргмаксимум $\langle p(x), v \rangle$ ввиду сильной выпуклости Ω . Значит, $|\langle p(x), v \rangle - \langle p(x), u(x) \rangle| \geq d$ для некоторого числа $d > 0$. А значит, начиная с некоторого но-

мера, $|\langle p(x_n), u_n(x_n) \rangle - \langle p(x_n), u(x_n) \rangle| \geq \frac{d}{2}$. То есть, $\exists d > 0 \forall N \exists n \geq N \exists x_n \in \partial O_1(0)$, что $|\langle p(x_n), u_n(x_n) \rangle - \langle p(x_n), u(x_n) \rangle| \geq \frac{d}{2}$. Это противоречит равномерной сходимости скалярного произведения.

4. Покажем, что $\langle p, u_n \rangle \Rightarrow \langle p, u \rangle$ на $\partial O_1(0)$. Рассмотрим $|\langle p(x), u_n(x) - u(x) \rangle| \leq |\langle p(x), u_n(x) - \alpha_n(x) \rangle| + |\langle p(x), \alpha_n(x) - u(x) \rangle|$, таким образом, для доказательства пункта 4 достаточно показать, что каждое слагаемое суммы равномерно по $x \in \partial O_1(0)$ сходится к 0. Докажем это в пунктах 5 и 6 соответственно.

5. Покажем, что $|\langle p(x), u_n(x) - \alpha_n(x) \rangle| \Rightarrow 0$. Пусть $d_n = p_n - p \Rightarrow 0$ при $x \in \partial O_1(0)$ (по п. 1). Из определений последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{u_n\}$ следует:

$$\begin{cases} \langle p(x), \alpha_n(x) \rangle \geq \langle p(x), u_n(x) \rangle; \\ \langle p_n(x), u_n(x) \rangle \geq \langle p_n(x), \alpha_n(x) \rangle. \end{cases} \quad (16)$$

Тогда:

$$\begin{cases} \langle p(x), \alpha_n(x) \rangle \geq \langle p(x), u_n(x) \rangle; \\ \langle (d_n(x) + p(x)), u_n(x) \rangle \geq \langle (d_n(x) + p(x)), \alpha_n(x) \rangle. \end{cases} \quad (17)$$

Тогда получаем $0 \leq \langle p(x), \alpha_n(x) - u_n(x) \rangle \leq \langle d_n(x), \alpha_n(x) - u_n(x) \rangle$. Т.к. $\alpha_n, u_n \in \Omega_n \subset \Omega$, то $\|\alpha_n - u_n\|$ - ограничена. Тогда ясно, что $\langle d_n(x), \alpha_n(x) - u_n(x) \rangle \Rightarrow 0, x \in \partial O_1(0)$.

6. Покажем, что $\alpha_n(p) \Rightarrow u(p)$ при $p \in K_p$, где $K_p = -\frac{1}{2}dB_\Omega(\partial O_1(0))$ - компакт. Причем $0 \notin K_p$. Из этого будет следовать, что $|\langle p(x), \alpha_n(x) - u(x) \rangle| \Rightarrow 0$ при $x \in \partial O_1(0)$ в виду ограниченности $p(x)$ на компакте и биекции между x_0 и $\hat{p}(0, x_0)$ (по Теореме (1)).

Несложно показать, что при фиксированном p $\alpha_n(p) \rightarrow u(p)$. Действительно, зафиксируем p . По условию, $u(p) \in \Omega$ и $\Omega_n \rightarrow \Omega$, значит, найдется последовательность $v_n \in \Omega_n$, что $v_n \rightarrow u(p)$. Обозначим за $M = \langle p, u(p) \rangle = \operatorname{argmax}_\Omega \langle p, v \rangle$. Последовательность $\alpha_n(p) \in \Omega_n \subset \Omega$, потому ограничена и имеет хотя бы одну предельную точку. Пусть $a \in \Omega$ - некоторая предельная точка данной последовательности. Предположим, что $a_n(p) \neq u(p)$. Так как $u(p)$ - единственный аргмаксимум ввиду сильной выпуклости Ω , то $\langle p, \alpha_n(p) \rangle \rightarrow \langle p, a \rangle = M - \delta$, где $\delta > 0$. Но в то же время $\langle p, v_n \rangle \rightarrow \langle p, u(p) \rangle = M$. А значит, с некоторого номера значение $\langle p, v_n \rangle$ станет строго больше $\langle p, \alpha_n(p) \rangle$, что противоречит определению $\alpha_n(p)$. Таким образом, любая предельная точка $\alpha_n(p)$ - это $u(p)$. Из чего следует, что $\alpha_n(p) \rightarrow u(p)$.

Предположим, что равномерная сходимость на K_p не выполнена. Тогда $\exists c > 0 \forall N \exists n \geq N \exists g_n \in K_p$, что $\|\alpha_n(g_n) - u(g_n)\| > c$. Т.к. последовательность $\{g_n\}$ лежит

в компакте, из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Не меняя обозначений, считаем, что $g_n \rightarrow g \in K_p$. Имеем: $u(g_n) \rightarrow u(g)$. Также последовательность $\{a_n(g_n)\} \in \Omega$, так что из нее можно выбрать сходящуюся. Не меняя обозначений, будем считать, что $\alpha_n(g_n) \rightarrow \alpha \in \Omega$, причем $\alpha \neq u(g)$ из предположения. Тогда имеем: $|\langle g, \alpha - u(g) \rangle| > 0$ - из единственности аргмаксимума по Ω . А тогда начиная с некоторого номера будет выполнено $|\langle g_n, \alpha_n(g_n) - u(g_n) \rangle| \geq d$ - для некоторого фиксированного числа $d > 0$.

С другой стороны, $|\langle g_n, \alpha_n(g_n) - u(g_n) \rangle| \leq |\langle g_n, \alpha_n(g_n) - \alpha_n(g) \rangle| + |\langle g_n, \alpha_n(g) - u(g) \rangle| + |\langle g_n, u(g) - u(g_n) \rangle|$. Второе слагаемое стремится к нулю, так как $\{g_n\} \in K_p$, а $\forall p \alpha_n(p) \rightarrow u(p)$. Третье слагаемое стремится к нулю, т.к. $\{g_n\} \in K_p$ и $u(g_n) \rightarrow u(g)$. Для доказательства стремления к нулю первого слагаемого применим прием, аналогичный пункту 4. Пусть $d_n = g_n - g \rightarrow 0$. Из определения последовательностей $\{\alpha_n(g_n)\}$ и $\{\alpha_n(g)\}$ получаем:

$$\begin{cases} \langle g_n, \alpha_n(g_n) \rangle \geq \langle g_n, \alpha_n(g) \rangle; \\ \langle g, \alpha_n(g) \rangle \geq \langle g, \alpha_n(g_n) \rangle. \end{cases} \quad (18)$$

Тогда:

$$\begin{cases} \langle g_n, \alpha_n(g_n) \rangle \geq \langle g_n, \alpha_n(g) \rangle; \\ \langle (g_n - d_n), \alpha_n(g) \rangle \geq \langle (g_n - d_n), \alpha_n(g_n) \rangle. \end{cases} \quad (19)$$

Тогда: $0 \leq \langle g_n, \alpha_n(g_n) - \alpha_n(g) \rangle \leq \langle d_n, \alpha_n(g_n) - \alpha_n(g) \rangle \rightarrow 0$, т.к. $\alpha_n(g_n) - \alpha_n(g)$ ограничено по норме.

Получаем противоречие. ■

Для завершения доказательства теоремы (5) осталось показать равномерную сходимоть сопряженных функций (пункт 1 доказательства). Для этого мы будем использовать уравнение Беллмана.

5 Функция и уравнение Беллмана

Рассмотрим функцию Беллмана $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ задачи (1): $B(x_0) = \inf \{ \int_0^\infty x^2(t) dt, \dot{x}(t) = u(t) \in \Omega, x(0) = x_0 \}$.

Эта функция также исследовалась в работе [2], где был доказан ряд фактов, необходимых нам в дальнейшем. Сформулируем их в виде теоремы:

Теорема 6. Для задачи (1) верны следующие утверждения:

- Функция Беллмана строго выпукла;
- Функция Беллмана является функцией класса C^1 , и $dB(x_0) = -\frac{1}{2}\hat{p}(0, x_0)$;
- $\forall x_0 \exists \delta > 0$ и $C > 0$, что $\forall \Delta x, |\Delta x| < \delta$ выполнены неравенства:

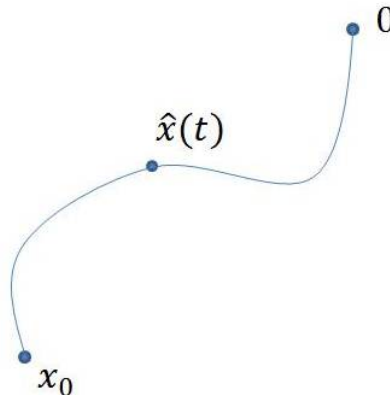
$$0 \leq B(x_0 + \Delta x) - B(x_0) - dB(x_0)\Delta x \leq C|\Delta x|^2.$$

При этом константы C и δ могут быть выбраны непрерывно зависящими от x_0 .

Выведем уравнение Беллмана для задачи (1). Выкладку проведем, взяв за основу вывод уравнения Беллмана для задачи быстродействия из книги М.И. Зеликина “Оптимальное управление и вариационное исчисление”(см. [1]).

Если (\hat{x}, \hat{u}) - решение задачи с начальным условием $x(0) = x_0$, то $B(x_0) = \int_0^\infty \hat{x}^2(t)dt$. Мы будем использовать факт, что любая оптимальная траектория задачи (1) приходит в начало координат за конечное время (по теореме 1).

1. Пусть $0 < t < \infty$. Запишем: $B(x_0) = \int_0^\infty \hat{x}^2(s)ds = \int_0^t \hat{x}^2(s)ds + \int_t^\infty \hat{x}^2(s)ds$.



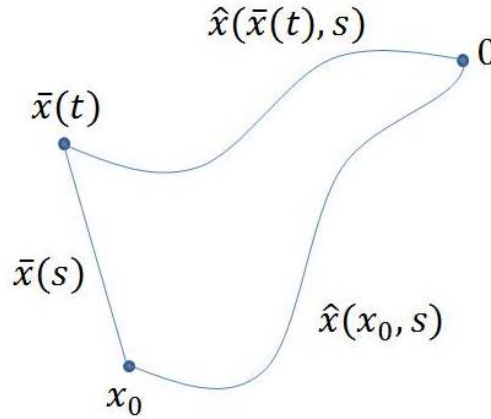
Имеем: $\int_t^\infty \hat{x}^2(s)ds = \int_0^\infty \hat{x}^2(a+t)da$. Заметим, что $(\hat{x}(a+t), \hat{u}(a+t), a \geq 0)$ - решение задачи (1) с начальным условием $\hat{x}(t)$. Тогда: $B(x_0) = \int_0^t \hat{x}^2(s)ds + B(\hat{x}(t))$. Дифференцируя вдоль системы задачи (1) по t , получаем:

$$\frac{dB}{dt}(\hat{x}(t)) = \left(\frac{\partial B}{\partial x}(\hat{x}(t)), \hat{u}(t)\right) = -\hat{x}^2(t), t \in (0, \infty).$$

2. Пусть x_0 - фиксированная начальная точка, $t > 0$ - число, $v \in \Omega$. Рассмотрим движение из x_0 с управлением v в течение времени t , т.е. решение такой системы:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(s) \equiv v; \\ \bar{x}(0) = x_0. \end{cases} \quad (20)$$

Имеем: $B(x_0) \leq \int_0^t \bar{x}^2(s)ds + B(\bar{x}(t)) = \int_0^t x^2(x_0, v, s)ds + B(\bar{x}(t))$.



При $t = 0$ правая часть равна левой, значит, дифференцируя по t при $t = +0$, имеем неравенство:

$$\frac{dB}{dt}(\bar{x}(t))_{t=0} = \left(\frac{\partial B}{\partial x}(x_0), v\right) \geq -x^2(x_0, v, t)_{t=0} = -x_0^2, \text{ что выполнено } \forall v \in \Omega, x_0.$$

3. Таким образом, с одной стороны $\forall x \forall u \in \Omega : \left(\frac{\partial B}{\partial x}(x), u\right) + x^2 \geq 0$. Но для каждого x_0 найдется свой элемент $u_0 = \hat{u}(x_0, 0) \in Y$, что будет выполнено $\left(\frac{\partial B}{\partial x}(x_0), u_0\right) + x_0^2 = 0$. Получаем уравнение Беллмана:

$$\min_{u \in \Omega} \left\{ \left(\frac{\partial B}{\partial x}(x), u\right) + x^2 \right\} = 0.$$

Покажем, что $\hat{p}(t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial x}(x(\hat{u}, t)) = -\frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial x}(\hat{x}(t))$, является сопряженной функцией из принципа максимума Понтрягина для нашей задачи. Действительно:

1. Выполнено условие максимума Гамильтониана: выражение $-2\langle \hat{p}(t), u(t) \rangle + \hat{x}^2(t)$ достигает минимума на оптимальном управлении, значит, выражение $2\langle \hat{p}(t), u(t) \rangle - \hat{x}^2(u, t) = 2H(\hat{p}, \hat{x}, u, t)$ достигает максимума при $u = \hat{u}(t)$.

2. Покажем, что $\frac{d\hat{p}(t)}{dt} = \hat{x}(t)$. Рассмотрим функцию $F(x) = \langle \frac{\partial B}{\partial x}(x), u_0 \rangle + x^2$, где $u_0 = \hat{u}(x_0, 0)$ для некоторого x_0 . Известно, что $F(x_0) = 0$ и $\forall x F(x) \geq 0$. Тогда, дифференцируя по x при $x = x_0$, получаем: $\frac{\delta^2 B}{\delta x^2}(x_0)u_0 + 2x_0 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{\delta^2 B}{\delta x^2}(x_0)u_0 = x_0 \forall x_0, u_0 = \hat{u}(x_0, 0)$. А, значит, получаем равенство вдоль траектории: $-\frac{1}{2} \frac{\delta^2 B}{\delta x^2}(\hat{x}(t))\hat{u}(t) = \hat{x}(t) \forall t$ (т.к. если взять $x_0 = \hat{x}(t)$, получим, что $u_0 = \hat{u}(t)$).

Но, в то же время, $\frac{d\hat{p}(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}(\hat{x}(t))\hat{u}(t)$.

Таким образом, для доказательства равномерной сходимости сопряженных множителей $p_n(x) \Rightarrow p(x), x \in K$ мы будем пользоваться их представлением через дифференциал функции Беллмана: $p(x_0) = -\frac{1}{2} dB(x_0) = -\frac{1}{2}(\frac{\partial B}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial B}{\partial x_2}(x_0))$.

6 Равномерная сходимость сопряженных функций

В данном разделе приведем недостающее объяснение пункта 1 из доказательства теоремы 5. Для этого нам понадобится ряд утверждений.

Пусть B_Ω - функция Беллмана задачи (1).

Лемма 1. $B_{a\Omega}(x) = \frac{1}{a} B_\Omega(x), \forall x, a > 0$.

Доказательство. Докажем следующие два утверждения:

1. $B_{a\Omega}(ax) = a^2 B_\Omega(x)$;

2. $B_\Omega(ax) = a^3 B_\Omega(x)$.

Из них очевидно следует док-во леммы: $B_{a\Omega}(ax) = a^2 B_\Omega(x)$ (по 1.) и $B_{a\Omega}(ax) = a^3 B_{a\Omega}(x)$ (по 2.), значит, $a^2 B_\Omega(x) = a^3 B_{a\Omega}(x)$.

Докажем первый пункт. Рассмотрим две задачи оптимального управления:

$$\begin{cases} \int_0^\infty x^2 dt \rightarrow \inf, \\ \dot{x} = u, u \in \Omega, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \int_0^\infty x^2 dt \rightarrow \inf, \\ \dot{x} = au, u \in \Omega (\iff \dot{x} = u, u \in a\Omega), \\ x(0) = ax_0. \end{cases} \quad (22)$$

Покажем, что $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ - решение (19) $\iff a\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ - решение (20). Очевидна эквивалентность допустимости этих наборов.

- Пусть \hat{x}, \hat{u} - решение (19). Пусть $\exists \tilde{x}, \tilde{u}$ - допустимый набор для (20) и такой, что $\int_0^\infty \tilde{x}^2 dt < \int_0^\infty (a\hat{x})^2 dt$. Тогда пара $(\frac{1}{a}\tilde{x}, \tilde{u})$ - допустима для (19) и $\int_0^\infty (\frac{1}{a}\tilde{x})^2 dt < \int_0^\infty \hat{x}^2 dt$ - противоречие.
- Пусть $a\hat{x}, \hat{u}$ - решение (20). Пусть $\exists \tilde{x}, \tilde{u}$ - допустимый набор для (19) и такой, что $\int_0^\infty \tilde{x}^2 dt < \int_0^\infty \hat{x}^2 dt$. Тогда пара $(a\tilde{x}, \tilde{u})$ - допустима для (20) и $\int_0^\infty (a\tilde{x})^2 dt < \int_0^\infty (a\hat{x})^2 dt$ - противоречие.

Рассмотрим функции Беллмана первой B_Ω и второй $B_{a\Omega}$ задач: $B_{a\Omega}(ax_0) = \int_0^\infty (a\hat{x})^2 dt = a^2 \int_0^\infty \hat{x}^2 dt = a^2 B_\Omega(x_0)$.

Докажем второй пункт. Снова рассмотрим две задачи оптимального управления:

$$\begin{cases} \int_0^\infty x^2 dt \rightarrow \inf, \\ \frac{dx}{dt} = u(t), u \in \Omega, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \int_0^\infty x^2 ds \rightarrow \inf, \\ \frac{dx}{ds} = u(s), u \in \Omega, \\ x(0) = ax_0. \end{cases} \quad (24)$$

Покажем, что $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ - решение (21) $\iff (\check{x}(s), \check{u}(s) = (a\hat{x}(\frac{s}{a}), \hat{u}(\frac{s}{a}))$ - решение (22). $((\check{x}(s), \check{u}(s))$ - решение (22) $\iff (\hat{x}(t), \hat{u}(t)) = (\frac{1}{a}\check{x}(at), \check{u}(at))$ - решение (21).

- Пусть $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ - решение (21). Тогда $\frac{d\check{x}(s)}{ds} = \frac{da\hat{x}(\frac{s}{a})}{ds} = \dot{\hat{x}}(\frac{s}{a}), \frac{d\check{x}(s_0)}{ds} = \dot{\hat{x}}(\frac{s_0}{a}) = \hat{u}(\frac{s_0}{a}) = \check{u}(s_0)$, т.е. $(\check{x}(s), \check{u}(s))$ - допустимый набор для (22). Пусть $\exists (\tilde{x}(s), \tilde{u}(s))$ - допустимый для (22) и $\int_0^\infty \tilde{x}^2 ds < \int_0^\infty (\check{x})^2 ds$. Тогда рассмотрим допустимый для (21) набор $(\frac{1}{a}(\tilde{x}(at), \tilde{u}(at)))$ (проверяется аналогично): $\int_0^\infty \tilde{x}(s)^2 ds < \int_0^\infty (\check{x}(s))^2 ds = a^2 \int_0^\infty (\hat{x}(\frac{s}{a}))^2 ds = a^3 \int_0^\infty (\hat{x}(t))^2 dt \Rightarrow \frac{1}{a^3} \int_0^\infty \tilde{x}(s)^2 ds = \frac{1}{a^2} \int_0^\infty \tilde{x}(at)^2 dt = \int_0^\infty (\frac{\tilde{x}(at)}{a})^2 dt < \int_0^\infty (\hat{x}(t))^2 dt$ - противоречие.

- Аналогично и в другую сторону.

Пусть B_1 и B_2 - соответственно функции Беллмана двух задач. Тогда:

$$B_2(ax_0) = B_\Omega(ax_0) = \int_0^\infty \check{x}(s)^2 ds = \int_0^\infty (a\hat{x}(\frac{s}{a}))^2 ds = a^3 \int_0^\infty \hat{x}(t)^2 dt = a^3 B_1(x_0) = a^3 B_\Omega(x_0). \quad \blacksquare$$

Утверждение 6. Пусть Ω_n - последовательность многоугольников, вписанных в Ω , причем $\Omega_n \rightarrow \Omega$. Тогда существует последовательность чисел $\{\gamma_n\}$, такая что:

- $\gamma_n > 1 \forall n$;
- $\gamma_n \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$;
- $\gamma_n B_\Omega(x) \geq B_{\Omega_n}(x) \geq B_\Omega(x) \forall n \forall x$.

Доказательство. Пусть $a_n = \sup\{b_n \in (0, 1) : b_n \Omega \subset \Omega_n\}$. Ясно, что $a_n < 1, a_n \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$. Таким образом, имеем: $a_n \Omega \subset \Omega_n \subset \Omega$.

Далее будем рассматривать, помимо задач (1) и $(1)_n$, задачу, где управление меняется в множестве $a_n \Omega$:

$$\begin{cases} \int_0^\infty x^2(t) dt, x \in \mathbb{R}^2; \\ \dot{x}(t) = u, u \in a_n \Omega; \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (25)$$

Ввиду того что $a_n \Omega \subset \Omega_n \subset \Omega$, имеем: $B_\Omega(x) \leq B_{\Omega_n}(x) \leq B_{a_n \Omega}(x) \forall x$.

По лемме 1 $B_{a_n \Omega}(x) = \frac{1}{a_n} B_\Omega(x)$. Пусть, для удобства, $\gamma_n = \frac{1}{a_n} \Rightarrow \gamma_n > 1, \gamma_n \rightarrow 1$. Тогда: $\gamma_n B_\Omega(x) \geq B_{\Omega_n}(x) \geq B_\Omega(x) \forall n \forall x$. \blacksquare

Следствие 1. Верны следующие утверждения:

- $B_{\Omega_n}(x) \rightarrow B_\Omega(x) \forall x$;
- $B_{\Omega_n} \Rightarrow B_\Omega$ при $x \in K$.

Доказательство. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в неравенстве из утверждения 1, получаем поточечную сходимость функций Беллмана.

Ввиду непрерывности функции Беллмана на компакте K можно написать неравенство: $\gamma_n \max_K |B_\Omega(x)| \geq \gamma_n B_\Omega(x) \geq B_{\Omega_n}(x) \geq B_\Omega(x) \geq \max_K |B_\Omega(x)|$, откуда следует равномерная сходимость на компакте K . \blacksquare

Лемма 2. Пусть $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. F - функция класса $C^1[x, y]$, выпуклая на $[x, y]$. Пусть L - прямая, проходящая через точки $(x, F(x))$ и $(y, F(y))$. Тогда $F'(y) \geq L'(y)$.

Доказательство. $F'(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{F(y) - F(y-\varepsilon)}{\varepsilon}$. F - выпукла на $[x, y]$, значит, $L(z) \geq F(z) \forall z \in [x, y]$. $\exists \varepsilon_0 \forall \varepsilon < \varepsilon_0 : y - \varepsilon \in [x, y]$. Тогда $\forall \varepsilon < \varepsilon_0 : \frac{F(y) - F(y-\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{L(y) - F(y-\varepsilon)}{\varepsilon} \geq \frac{L(y) - L(y-\varepsilon)}{\varepsilon}$.

Переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow +0$, получаем утверждение леммы. ■

Лемма 3. Пусть $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ - отрезок. Пусть $B_0, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - выпуклые на некоторой окрестности $O_{\varepsilon_0}(K)$ и класса $C^1(K)$. Пусть существует число $\gamma > 1$, что: $\gamma B(x) \geq B_0(x) \geq B(x) \forall x \in K$. Пусть $c > 0$ - некоторое фиксированное число, $x \in K$ - фиксированная точка.

1. Пусть $B'_0(x) < B'(x) - c$, тогда $\forall s > 0$, что $x - s \in O_{\varepsilon_0}(K)$ $\gamma B(x-s) - B_0(x-s) < (\gamma - 1)B(x-s) + B(x) - B_0(x) + F_1(s, x) - cs$, где $F_1(s, x) = B(x-s) + B'(x)s - B(x)$;
2. Пусть $B'_0(x) > \gamma B'(x) + c$, тогда $\forall s > 0$, что $x + s \in O_{\varepsilon_0}(K)$ $\gamma B(x+s) - B_0(x+s) < (B(x) - B_0(x)) + (\gamma - 1)B(x) + \gamma F_2(s, x) - cs$, где $F_2(s, x) = B(x+s) - B'(x)s - B(x)$.

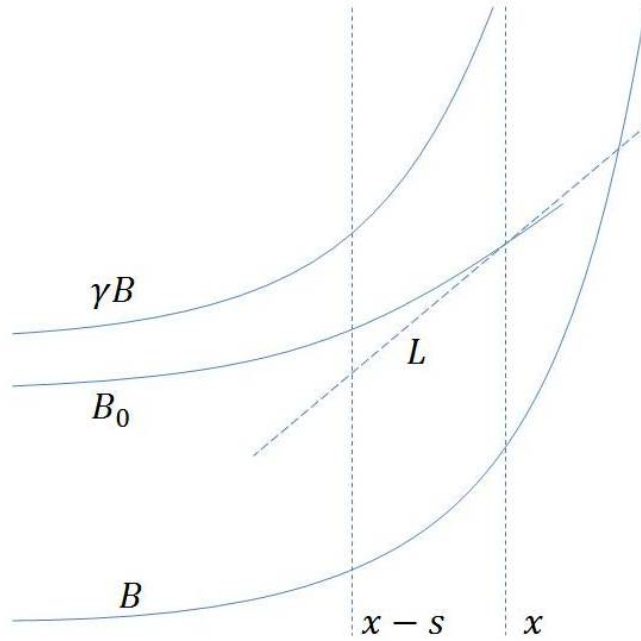
Доказательство.

Докажем первый пункт.

Зафиксируем некоторое $s > 0$ так, чтобы $x - s \in O_{\varepsilon_0}(K)$ и попробуем оценить значение $B_0(x - s)$. Рассмотрим прямую $L(z)$, проходящую через точку $(x, B_0(x))$ и имеющую направляющий вектор $B'(x) - c$. Данная прямая имеет вид: $L(z) = (B'(x) - c)(z - x) + B_0(x)$. Докажем, что $B_0(x - s) > L(x - s)$. Действительно, по лемме 2, прямая из точки $(x - s, B_0(x - s))$ даст наименьшую производную в точке $(x, B_0(x))$ среди всех выпуклых функций. Так что, если $B_0(x - s) \leq L(x - s)$, угол наклона прямой, соединяющей точки $(x - s, B_0(x - s)), (x, B_0(x))$ будет больше или равен углу наклона прямой L , и получим: $B'_0(x) \geq L'(x) \geq B'(x) - c$, что противоречит условию. Итак, $B_0(x - s) > L(x - s) = -(B'(x) - c)s + B_0(x)$.

Оценим разность $\gamma B(x - s) - B_0(x - s)$:

$$\begin{aligned} \gamma B(x - s) - B_0(x - s) &< \gamma B(x - s) + (B'(x) - c)s - B_0(x) = (\gamma - 1)B(x - s) + \\ &B(x - s) + (B'(x) - c)s - B_0(x) = (\gamma - 1)B(x - s) + B(x - s) - cs + B'(x)s - B_0(x) = \\ &(\gamma - 1)B(x - s) + B(x) - B_0(x) + F_1(s, x) - cs. \end{aligned}$$



Докажем второй пункт.

Зафиксируем некоторое $s > 0$ так, чтобы $x + s \in O_{\epsilon_0}(K)$ и попробуем оценить значение $B_0(x + s)$. Рассмотрим прямую $L(z)$, проходящую через точку $(x, B_0(x))$ и имеющую направляющий вектор $\gamma B'(x) + c$. Данная прямая имеет вид: $L(z) = (\gamma B'(x) + c)(z - x) + B_0(x)$. Тогда $B_0(x + s) > L(x + s)$, т.к. функции начинаются в одной точке и на всем отрезке $z \in [x, x + s]$ $B'_0(z) \geq B'_0(x) > L'(x) = L'(z)$. Итак, $B_0(x + s) > L(x + s) = (\gamma B'(x) + c)s + B_0(x)$.

Оценим разность $\gamma B(x + s) - B_0(x + s)$:

$$\begin{aligned} \gamma B(x + s) - B_0(x + s) &< \gamma B(x + s) - (\gamma B'(x) + c)s - B_0(x) = \gamma(B(x + s) - B'(x)s) - \\ &cs - B_0(x) = \gamma(B(x + s) - B'(x)s - B(x)) + \gamma B(x) - cs - B_0(x) = (B(x) - B_0(x)) + (\gamma - \\ &1)B(x) + \gamma F_2(s, x) - cs. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Лемма 4. Пусть K - компакт. Тогда $\exists \delta > 0$ и $\exists C > 0$, что $\forall x \in K, \forall \Delta x$, что $|\Delta x| < \delta$ выполнено:

$$0 \leq B(x + \Delta x) - B(x) - dB(x)\Delta x \leq C|\Delta x|^2.$$

Доказательство. Лемма есть очевидное следствие из теоремы 5: $\delta = \min_{x \in K} \delta(x)$, $C = \max_{x \in K} C(x)$. ■

Утверждение 7. Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ - компакт. Пусть $B = B_\Omega, B_n = B_{\Omega_n}$ - функции

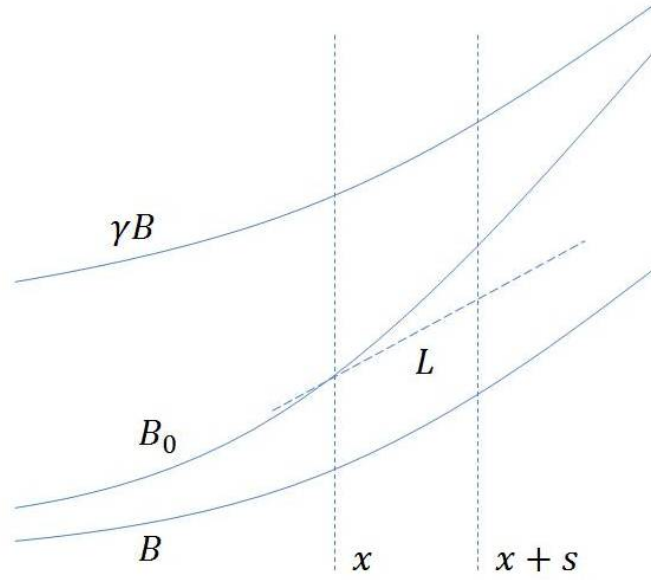


Рис. 11

Беллмана задач (1) и (1)_n соответственно. Тогда $dB_n(x) \Rightarrow dB(x)$ при $x \in K$.

Доказательство. Так как $dB(x) = \frac{\partial B}{\partial x_1}(x)dx_1 + \frac{\partial B}{\partial x_2}(x)dx_2$, достаточно показать, что $\frac{\partial B_n}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial B_n}{\partial x_2} \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial x_2}$ при $x = (x_1, x_2) \in K$.

Докажем первое (второе аналогично).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Покажем, что $\exists N \forall n \geq N \forall (x_1, x_2) \in K$ выполнено: $\frac{\partial B_n}{\partial x_1}(x) \in [\frac{\partial B}{\partial x_1}(x) - \varepsilon, \gamma_n \frac{\partial B}{\partial x_1}(x) + \varepsilon]$.

Предположим противное: $\forall N \exists n \geq N \exists x^n = (x_1^n, x_2^n) \in K$ что: $\frac{\partial B_n}{\partial x_1}(x^n) < \frac{\partial B}{\partial x_1}(x^n) - \varepsilon$ или $\frac{\partial B_n}{\partial x_1}(x^n) > \gamma_n \frac{\partial B}{\partial x_1}(x^n) + \varepsilon$. Последовательность $\{x^n\}$ бесконечна, поэтому найдется ситуация, которая имеет место бесконечно много раз. Разберем два случая.

1. Не меняя обозначений, считаем, что $\forall n \frac{\partial B_n}{\partial x_1}(x^n) < \frac{\partial B}{\partial x_1}(x^n) - \varepsilon$. Функция Беллмана $B(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла, значит, при фиксированном x_2 функция $B(x_1, x_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ также выпукла. Используя последовательность $\{\gamma_n\}$ из утверждения 1 и лемму 3 имеем: $\forall n \forall s > 0 \gamma_n B(x_1^n - s, x_2^n) - B_n(x_1^n - s, x_2^n) < (\gamma_n - 1)B(x_1^n - s, x_2^n) + B(x_1^n, x_2^n) - B_n(x_1^n, x_2^n) + F_1(s, x^n) - \varepsilon s$, причем левая часть всегда неотрицательна. Покажем, что, выбрав малое s и большое N можно получить отрицательную правую часть:

- Выберем s_0 , что $\forall x \in K |F_1(s_0, x)| < \frac{\varepsilon s_0}{2}$. По лемме 4 для этого достаточно,

чтобы $s_0 < \delta$ и $Cs_0^2 < \frac{\varepsilon s_0}{2}$ ($\Delta x = (-s_0, 0)$);

- Выберем N_0 чтобы $\forall x \in K (\gamma_{N_0} - 1)B(x_1 - s_0, x_2) < \frac{\varepsilon s_0}{2}$, что возможно, т.к. $\gamma_n \rightarrow 1$, а $B(x_1 - s, x_2)$ ограничена при $x \in K$.

Тогда: $(\gamma_{N_0} - 1)B(x_1^n - s_0, x_2^n) + B(x_1^n, x_2^n) - B_{N_0}(x_1^n, x_2^n) + F_1(s_0, x^n) - \varepsilon s_0 < \frac{\varepsilon s_0}{2} + 0 + \frac{\varepsilon s_0}{2} - \varepsilon s_0 = 0$. Противоречие.

2. Не меняя обозначений, считаем, что $\forall n \frac{\partial B_n}{\partial x_1}(x^n) > \gamma_n \frac{\partial B}{\partial x_1}(x^n) + \varepsilon$. Функция Беллмана $B(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла, значит, при фиксированном x_1 функция $B(x_1, x_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ также выпукла. Используя последовательность $\{\gamma_n\}$ из утверждения 1 и лемму 3 имеем: $\forall n \forall s > 0 \gamma_n B(x_1^n, x_2^n + s) - B_n(x_1^n, x_2^n + s) < (B(x_1^n, x_2^n) - B_n(x_1^n, x_2^n)) + (\gamma_n - 1)B(x_1^n, x_2^n) + \gamma_n F_2(s, x^n) - \varepsilon s$, причем левая часть всегда неотрицательна. Покажем, что, выбрав малое s и большое N можно получить отрицательную правую часть:

- Выберем N_1 , что $\forall n \geq N_1 \gamma_n < 2$;
- Выберем s_0 что $\forall x \in K 2F_2(s_0, x) < \frac{\varepsilon s_0}{2}$. По лемме 4 для этого достаточно, чтобы $s_0 < \delta$ и $2Cs_0^2 < \frac{\varepsilon s_0}{2}$ ($\Delta x = (0, s_0)$);
- Выберем $N_0 \geq N_1$, что $\forall n \geq N_0 \forall x \in K (\gamma_n - 1)B(x_1, x_2) < \frac{\varepsilon s_0}{2}$, что возможно, т.к. $\gamma_n \rightarrow 1$, а $B(x_1, x_2)$ ограничена при $x \in K$.

Тогда: $(B(x_1^n, x_2^n) - B_{N_1}(x_1^n, x_2^n)) + (\gamma_{N_1} - 1)B(x_1^n, x_2^n) + \gamma_{N_1}F_2(s_0, x^n) - \varepsilon s_0 < 0 + \frac{\varepsilon s_0}{2} + \frac{\varepsilon s_0}{2} - \varepsilon s_0 = 0$. Противоречие. ■

7 Вид оптимальных траекторий для сильно выпуклого множества с гладкой границей

Применим полученные ранее результаты для описания оптимального синтеза задачи (1) в случае, если Ω - сильно выпуклое множество с гладкой границей. Покажем, что оптимальный синтез данного случая будет устроен в некотором смысле аналогично оптимальному синтезу задачи с многоугольником.

7.1 Оптимальные траектории с постоянным управлением

Утверждение 8. Пусть Ω - выпуклое компактное множество с гладкой границей, содержащее точку O во внутренности. Тогда существуют хотя бы два перпендикуляра к границе Ω из т. O .

Доказательство. Пусть граница Ω задана функцией $\xi(\varphi) \in C^\infty$, где φ - угол. Рассмотрим функцию $\langle \xi, \xi \rangle$ расстояния от начала координат до границы множества Ω , аналогично случаю с многоугольником. Эта функция на компакте $[0, 2\pi]$ достигает минимума (при некотором φ_0) и максимума (при некотором φ_1). Тогда в этих точках производная обращается в ноль, т.е. $\langle \xi(\varphi_0), \dot{\xi}(\varphi_0) \rangle = \langle \xi(\varphi_1), \dot{\xi}(\varphi_1) \rangle = 0$, что и есть условие перпендикулярности границе. В случае, если $\varphi_0 = \varphi_1$, мы получим окружность с центром O , где все радиус-векторы точек границы перпендикулярны ей. ■

Утверждение 9. Пусть Ω - сильно выпуклое множества с гладкой границей и свойствами задачи (1). Пусть Q - перпендикуляр к границе Ω , выпущенный из начала координат. Тогда при $x_0 = -\mu Q$, $\mu > 0$ следующая траектория является оптимальной:

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} Q(t - \mu), t \in [0, \mu]; \\ 0, t > \mu. \end{cases} \quad (26)$$

Причем это единственные траектории с постоянным управлением.

Доказательство. Пусть $\hat{u}(t) = Q \in \Omega$ - некоторое постоянное управление. Тогда из ПМП следует, что $\hat{x}(t) = Q \Rightarrow \dot{\hat{x}}(t) = Q \Rightarrow \hat{x}(t) = Qt + x_0$. Так как траектория обязана прийти в ноль за конечное время, получаем, что возможен лишь случай $x_0 = -\mu Q$, $\mu > 0$. Тогда траектория имеет вид $\hat{x}(t) = Q(t - \mu), t \in [0, \mu]$. Тогда сопряженная функция имеет вид $\hat{p}(t) = \frac{1}{2}Q(t - \mu)^2 + p_0$. Так как $\hat{x}(t) = 0, t \geq \mu$, то $\dot{\hat{p}}(t) = \hat{x}(t) = 0, t > \mu$, значит, $\hat{p}(t) = p_0, t > \mu$. Тогда ясно, что $p_0 = 0$, т.к. иначе траектория не придет в ноль. Осталось проверить, при каких условиях выполнен принцип максимума: $\langle \hat{p}(t), Q \rangle = \max_{v \in \Omega} \langle \hat{p}(t), v \rangle$. Ввиду явного вида \hat{p} необходимо выяснить, когда $\langle Q, v \rangle$ достигает максимума.

Пусть $\langle Q, v \rangle$ достигает максимума на $u_0 \in \Omega$. Ясно, что u_0 должно лежать на границе, т.к., увеличив модуль и оставив без изменения угол, мы увеличим скалярное произведение. Итак, $u_0 \in \partial\Omega$. Рассмотрим множество $L = \{u : \langle Q, u \rangle = \langle Q, u_0 \rangle\}$ -

это прямая, ортогональная Q и проходящая через u_0 . Для любого v из одной полуплоскости, ограниченной L , $\langle Q, v \rangle > \langle Q, u_0 \rangle$, а для другой $\langle Q, v \rangle < \langle Q, u_0 \rangle$. Значит, Ω обязано лежать в одной полуплоскости от L . В условиях сильно выпуклого множества, это значит, что L - касательная к Ω в точке u_0 . Значит, $u_0 = Q$ и Q ортогонален границе Ω .

■

Замечание 3. Пусть Ω - произвольное выпуклое компактное множество с началом координат во внутренней точке. Пусть в условиях задачи (1) для некоторого x_0 выполнено, что $\hat{u}(0, x_0) = -\gamma x_0$, где $\gamma > 0$. Тогда из замечания 1 следует, что вся прямая $x_0(1 - \gamma t), t \in [0, \frac{1}{\gamma}]$ является оптимальной траекторией с постоянным управлением.

Следствие 2. Пусть Ω - окружность с центром в начале координат. Тогда оптимальные траектории - прямые, проходящие через начало координат (рис. 12).

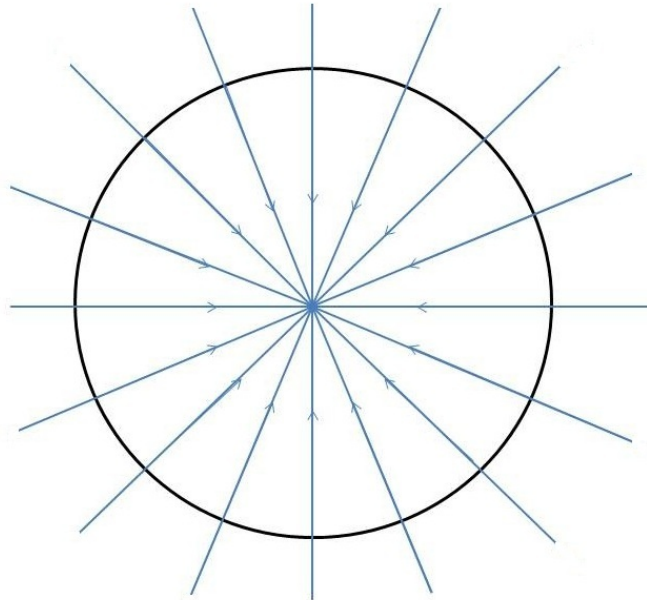


Рис. 12. Оптимальный синтез для окружности с центром в начале координат

В множестве Ω , удовлетворяющем нашим свойствам, рассмотрим все перпендикуляры из начала координат к границе. Все они являются локальными минимумами и максимумами (возможно нестрогими в случае дуги окружности). Проведем все оптимальные полупрямые, им соответствующие. Таким образом, нам осталось описать, как устроены оптимальные траектории для начальных точек внутри сектора между соседними оптимальными траекториями с постоянным управлением.

7.2 Построение последовательности аппроксимирующих многоугольников

Для применения теоремы 5 нам подойдет любая последовательность многоугольников Ω_n , вписанных в Ω и таких, что $\Omega_n \rightarrow \Omega$. Будем строить последовательность, удобную нам для дальнейшего анализа. Пусть $\alpha > 0$ - некоторый малый угол. Построим разбиение для данного фиксированного α , а затем получим последовательность таких разбиений, соответствующих последовательности $0 < \alpha_n \rightarrow 0$. Покажем, как строится разбиение для произвольного сектора между соседними перпендикулярами. Сперва введем некоторые обозначения.

Пусть A и V - соседние перпендикуляры, причем $|A| < |V|$ (при равенстве будем иметь кусок окружности). Тогда при обходе от A к V : A является либо строгим локальным минимумом, либо заканчивает кусок окружности (обозначим множество таких векторов за $Min(\Omega)$), а V - либо строгий локальный максимум, либо начинает кусок окружности (обозначим множество таких векторов за $Max(\Omega)$). Нетрудно видеть, что множества $Min(\Omega)$ и $Max(\Omega)$ конечны. Действительно, пусть, например, $\exists \varphi_n$, что $\xi(\varphi_n) \in Max(\Omega) \subset \Omega$. Ввиду компактности можно считать, что $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$. Причем, $\langle \xi(\varphi_0), \dot{\xi}(\varphi_0) \rangle = 0$. Тогда найдется хотя бы одна полукрестность $O(\varphi_0)$, что $\forall \varphi \in O(\varphi_0) |\langle \xi(\varphi), \dot{\xi}(\varphi) \rangle| > 0$ (иначе получим дугу окружности, чего не может быть). Противоречие, т.к. в этой окрестности лежат φ_n , начиная с некоторого номера.

Обозначим сектор между полупрямыми с векторами A и V за $I_{A,V}$, а сектор между полупрямыми с векторами $-A$ и $-V$ за $-I_{A,V}$. Обозначим за $I_{A,V}^\alpha, \alpha > 0$ - подсектор сектора $I_{A,V}$, полученный отступами от A и V на угол α . Введем также следующее обозначение $J_Q^\omega = \{v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : \psi(Q, v) < \omega\}$, где $\psi(Q, v)$ - угол между векторами. Направляющие векторы полупрямых, ограничивающих данный сектор обозначим за $Q + \omega, Q - \omega$.

Рассмотрим сектор $I_{A,V}^\alpha$. Будем разбивать его так, что векторы соседних вершин составляют равные углы. При этом поставим вершины в концы сектора. Покажем, что разбиение можно сделать настолько мелким, что никакие основания перпендикуляров не будут попадать на отрезки, соединяющие вершины.

Рассмотрим параметризацию границы Ω из данного сектора $\xi(\varphi), \varphi \in I = [0, \varphi_1]$. Причем $|\xi(0)| < |\xi(\varphi_1)|$. В данном секторе больше нет перпендикуляров к границе, функция расстояния строго возрастает от $\xi(0)$ к $\xi(\varphi_1)$. Тогда $\forall \varphi \in I \langle \xi(\varphi), \dot{\xi}(\varphi) \rangle > 0$. Тогда на секторе $I_{A,V}^\alpha$ скалярное произведение будет отделено от нуля некоторой

константой: $\forall \varphi \in I^\alpha = [\alpha, \varphi_1 - \alpha]$ $\langle \xi(\varphi), \dot{\xi}(\varphi) \rangle \geq d(\alpha) > 0$. Покажем, что найдется такое $\beta_0 > 0$, что $\forall \beta < \beta_0 \forall \varphi \in I^\alpha$ $\langle \xi(\varphi + \beta) - \xi(\varphi), \xi(\varphi) \rangle > 0$. Данное условие означает, что $\xi(\varphi)$ лежит строго между $\xi(\varphi + \beta)$ и основанием перпендикуляра к прямой с вектором $\xi(\varphi + \beta) - \xi(\varphi)$. Действительно, ввиду гладкости границы имеем: $\xi(\varphi + \beta) - \xi(\varphi) = \dot{\xi}(\varphi)\beta + o(\beta^2)$, причем $|o(\beta^2)| \leq C\beta^2$, $C > 0$. Будем иметь: $\langle \xi(\varphi + \beta) - \xi(\varphi), \xi(\varphi) \rangle = \langle \dot{\xi}(\varphi), \xi(\varphi) \rangle \beta + \langle o(\beta^2), \xi(\varphi) \rangle \geq d\beta + \langle o(\beta^2), \xi(\varphi) \rangle$. Имеем: $|\langle o(\beta^2), \xi(\varphi) \rangle| \leq C\beta^2 |\xi(\varphi)|$. Таким образом, можно взять $\beta_0 < \frac{d}{2C \max_{\varphi \in I_{A,V}^\alpha} |\xi(\varphi)|}$. Итак, $\forall \alpha > 0 \exists N(\alpha)$, что при равномерном разбиении сектора $J_{A,V}^\alpha$ никакие основания перпендикуляров не попадают на стороны многоугольника. Завершим построение, поставив вершину в перпендикуляр V .

Проделаем данную процедуру конечное число раз для всех секторов (сектор дуги окружности разобьем как угодно, мы уже знаем соответствующие ему оптимальные траектории). Заметим, что для достаточно малых α все вершины $V \in \text{Max}(\Omega)$ станут экстремальными для соответствующих многоугольников. Все перпендикуляры $A(\alpha) \in \text{Min}(\Omega)$ к сторонам $(A - \alpha, A + \alpha)$ для достаточно малых α будут на них попадать (то есть будут являться экстремальными перпендикулярами соответствующих многоугольников) и стремиться к A при $\alpha \rightarrow 0$.

Итак, мы построили последовательность многоугольников Ω_n , стремящихся, очевидно, к Ω и имеющих перпендикуляры и экстремальные вершины в множестве $\text{Min}(\Omega) \cup \text{Max}(\Omega)$ (но не только в них).

7.3 Свойства оптимального синтеза

Лемма 5. $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall Q \in \text{Min}(\Omega) \cup \text{Max}(\Omega) \forall x_0 \in -J_Q^\alpha$ $\| \hat{u}(0, x_0) - Q \| \leq \varepsilon$.

Доказательство. Докажем данное утверждение для фиксированного сектора $I_{A,V}$, $|A| < |V|$, где A, V - соседние перпендикуляры. Этого будет достаточно, т.к. таких секторов конечное число.

Сперва выберем N_1 , начиная с которого будет работать теорема 5 для построенной нами последовательности многоугольников и заданного числа $\frac{\varepsilon}{2}$. То есть $\forall n \geq N_1 \forall x_0 U_n(x_0) \subset U^{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)$.

1. Покажем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x_0 \in -J_A^\alpha$ $\| \hat{u}(0, x_0) - A \| \leq \varepsilon$.

Рассмотрим оптимальный синтез задач с многоугольниками в окрестности A .

Пусть $A_k = A(\alpha_k)$ - перпендикуляр к стороне (U_k, V_k) , причем эти векторы коллинеарны векторам $(A - \alpha_k, A + \alpha_k)$ по построению. Начиная с некоторого номера, имеем оптимальную траекторию с постоянным управлением A_k для начальных точек вида $x_0 = -\mu A_k$. Причем $\|A_k - A\| \rightarrow 0$. И имеем траектории с управлениями U_k и V_k , входящие в $-A_k$ в некотором секторе $-J_A^{\beta_k}$, $\beta_k \leq \alpha_k$. Причем $\|U_k - A\| \rightarrow 0$ и $\|V_k - A\| \rightarrow 0$. Возьмем номер $N_2 > N_1$, начиная с которого $\|U_k - A\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ и $\|V_k - A\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда можно взять $\alpha = \beta_{N_2}$.

2. Покажем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x_0 \in -J_V^\alpha \|\hat{u}(0, x_0) - V\| \leq \varepsilon$. Рассмотрим оптимальный синтез задач с многоугольниками в окрестности V . По построению V - экстремальная вершина, а значит в секторе $-J_V^{\alpha_k}$ траектории имеют управление V . Тогда можно взять $\alpha = \alpha_{N_1}$. ■

Лемма 6. Пусть $x_0 \in -I = -I_{A,V}$. Тогда $\forall \alpha > 0 \exists T_A(\alpha, x_0) \geq 0$ и $T_V(\alpha, x_0) \leq 0$, что $\hat{x}(T_A, x_0) \in J_{-A}^\alpha \cap (-I)$, и $\hat{x}(T_V, x_0) \in J_{-V}^\alpha \cap (-I)$.

Доказательство. Покажем, что оптимальная траектория для начальной точки из внутренности $-I$ обяза будет пересечь любую прямую внутри сектора $-I$ за конечное время (положительное или отрицательное).

Пусть x_0 некоторая точка внутри сектора $-I_{A,B}$. Рассмотрим полупрямую L , проходящую через точку x_0 и начало координат. Посмотрим, как устроена скорость $\hat{u}(0, x_0)$ относительно L . По замечанию 2 и теореме 5 несложно установить, что $\forall x_0$ выполнено $\langle x_0, \hat{u}(0, x_0) \rangle \leq 0$. Пусть y_0 - вектор ортогональный x_0 и такой, что $x_0 + y_0$ лежит между $-A$ и L . Тогда аналогично замечанию 2, можно показать, что из явного вида траекторий для многоугольника следует $\forall x_0 \langle y_0, \hat{u}_n(0, x_0) \rangle \geq 0$, тогда, переходя к пределу по теореме 5, имеем $\forall x_0 \langle y_0, \hat{u}(0, x_0) \rangle \geq 0$. Причем, $\hat{u}(0, x_0) \neq \gamma x_0$ по замечанию 3, т.к. начиная с некоторого номера x_0 будет лежать в $-I_{A,V}^{\alpha_k}$, а там нет ни перпендикуляров, ни экстремальных вершин многоугольника. Тогда для $\hat{u}(0, x_0)$ остается быть расположенной под острым углом к прямой L , уменьшать угол между x_0 и вектором $-A$ в прямом времени и уменьшать угол между x_0 и $-V$ в обратном времени. ■

Следствие 3. Пусть x_0 находится внутри сектора $-I_{A,V}$, где A, V - соседние перпендикуляры к границе Ω и $|A| < |V|$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists T_A \geq 0$ и $T_V \leq 0$, что $\|\hat{x}(T_A, x_0) - A\| \leq \varepsilon$ и $\|\hat{x}(T_V, x_0) - V\| \leq \varepsilon$.

Сформулируем окончательную теорему:

Теорема 7. Пусть x_0 некоторая точка на плоскости. Тогда:

- Если $x_0 = 0$, то имеем особую оптимальную траекторию:

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = 0, t \geq 0; \\ \hat{u}(t) = 0, t \geq 0; \\ \hat{p}(t) = 0, t \geq 0. \end{cases} \quad (27)$$

- Если $x_0 = -\mu Q$, где Q - перпендикуляр к границе Ω , $\mu > 0$, то имеем следующую оптимальную траекторию:

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \begin{cases} Q(t - \mu), t \in [0, \mu]; \\ 0, t > \mu. \end{cases} \\ \hat{u}(t) = \begin{cases} Q, t \in [0, \mu]; \\ 0, t > \mu. \end{cases} \\ \hat{p}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}Q(t - \mu)^2, t \in [0, \mu]; \\ 0, t > \mu. \end{cases} \end{cases} \quad (28)$$

- Пусть x_0 находится внутри сектора $-I_{A,V}$, где A, V - соседние перпендикуляры к границе Ω , и $|A| < |V|$. Тогда движение вдоль оптимальной траектории происходит от $-V$ к $-A$, причем расстояние до начала координат не возрастает вдоль оптимальной траектории, и она приходит в ноль, с касательной, равной A , а при движении в обратном времени касательная стремится к V .

Рассмотрим несколько примеров:

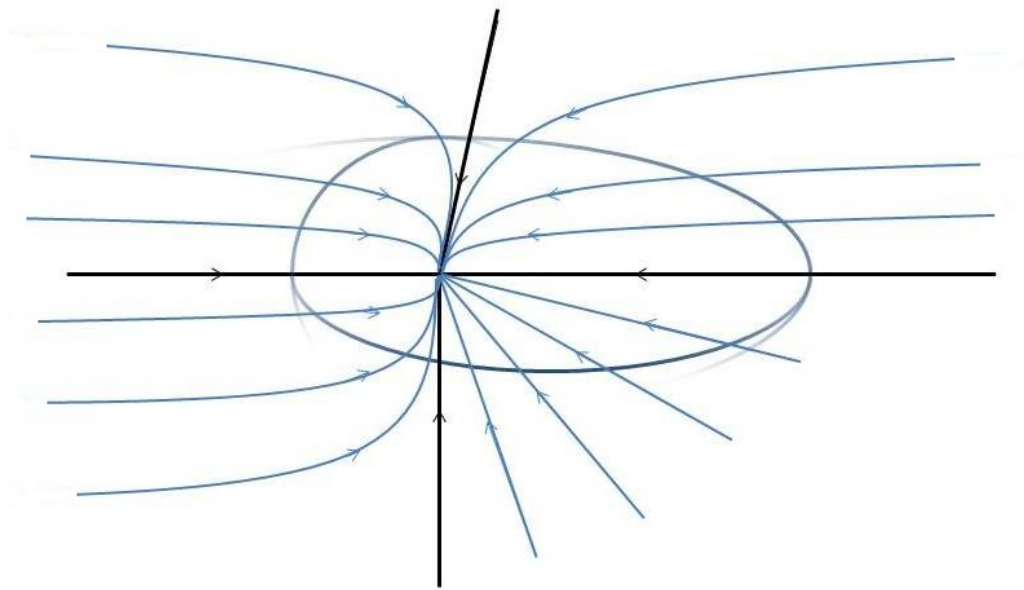


Рис. 13. Примерный вид оптимальных траекторий для множества, содержащего дугу окружности

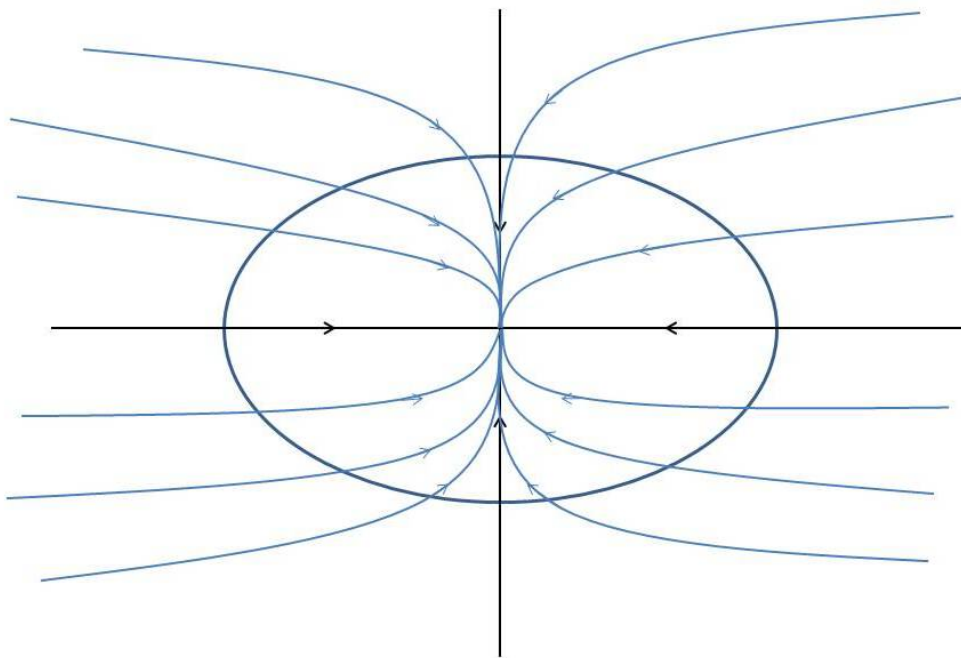


Рис. 14. Примерный вид оптимальных траекторий для эллипса

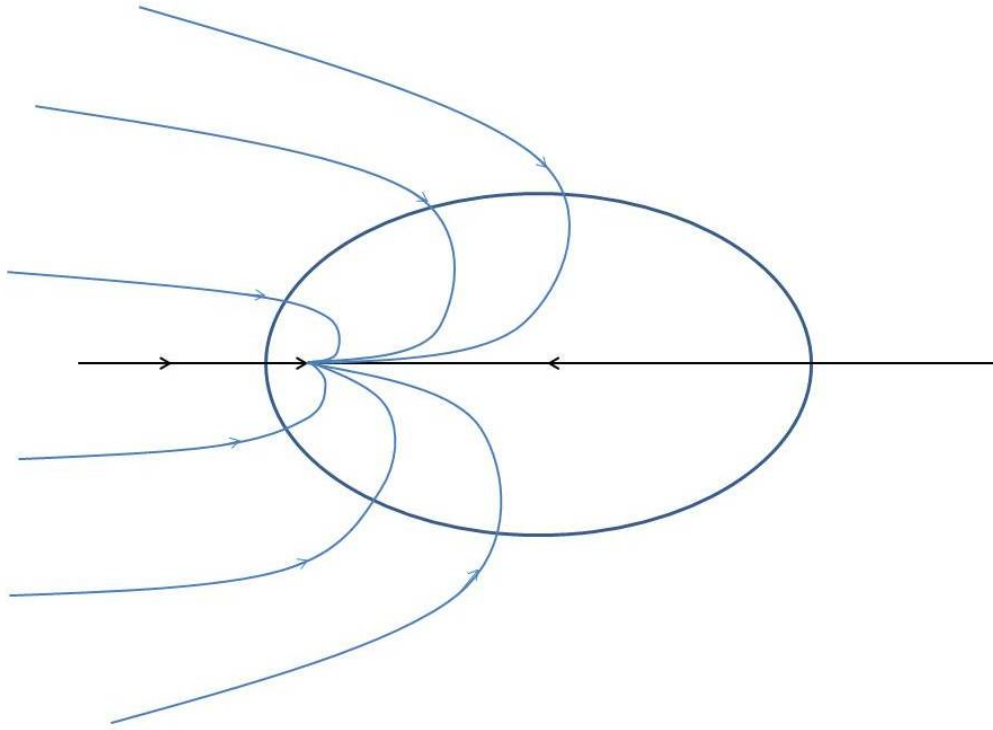


Рис. 15. Примерный вид оптимальных траекторий для смещенного эллипса

Список литературы

- [1] М. И. Зеликин. Оптимальное управление и вариационное исчисление, 2-е изд., испр. и доп. М.: Эдиториал УРСС, 2004 .
- [2] Л. В. Локуцкий. Особые режимы в управляемых системах с многомерным управлением из многогранника, Изв. РАН. Сер. матем., 78:5 (2014), 167–190.
- [3] А.Ф. Филиппов. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.