МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Кафедра Общих Проблем Управления

Дипломная работа

Принцип максимума для одного класса бесконечномерных задач максимизации дохода

Выполнил студент:
Скопинцев Сергей Викторович

Научный руководитель:
Зеликин Михаил Ильич

Москва, 2015 г.

Содержание

1 Введение

Рассмотрение задач оптимального сбора ресурса имеет долгую историю. Фундаментальные работы Гордона (1954) и Скотта (1955) для случая ловли рыбы были написаны уже более 60 лет назад. В настоящее время большой интерес представляют модели оптимальной добычи пространственно распределенного возобновляемого ресурса. В статье Берингера и Упманна (2014) рассматривается случай равномерного сбора ресурса устройством, движущимся с постоянной скоростью.

В данной работе были получены условия оптимальности сбора возобновляемого ресурса в смысле максимизации прибыли. Предполагается, что естественный прирост ресурса задаётся экспоненциальным законом $\dot{\psi}(t,x) = \alpha\psi(t,x), \alpha \in \mathbb{R}$.

Хотя данные результаты могут быть применены более широко, например, в сельском хозяйстве или для другого возобновляемого ресурса, мы следуем литературной традиции и в качестве иллюстрации рассматриваем случай рыбной ловли.

Рыбак выходит в море на ловлю рыбы и следует по одному и тому же маршруту. В течение заданного сезона он может проходить данный маршрут (для простоты окружность единичной длины) несколько раз. Чем больше усилий прикладывает рыбак, тем больше рыбы он вылавливает, но вместе с тем могут возрастать затраты. Пойманная рыба сразу же продаётся по заданной цене. Стоимость продажи может меняться со временем, и прибыль рыбака может также зависеть от скорости лодки и её координаты (это обусловлено изменением издержек.)

Скорость лодки, длительность рыболовного сезона, начальное распределение ресурса на маршруте и функцию, задающую прибыль рыбака в зависимости от параметров, считаем заданными. Требуется найти оптимальную стратегию сбора ресурса для максимизации общей прибыли.

2 Постановка задачи

В начальный момент времени на окружности S^1 распределен некоторый ресурс по заданному закону $\psi_0(x) \geq 0, x \in S^1, \int_{S^1} \psi_0(x)dx = 1$. По этой окружности с заданной положительной скоростью $v(t) \in C^\infty, v(t) > 0$ движется собирающее устройство, которое в любой момент времени t собирает некоторую долю $u(t) \in [0;1]$ ресурса. Если в точке $x(t)$ было $\psi(t-0,x)$ ресурса, то после прохождения устройства остаётся $[1-u(t)]\psi(t-0,x)$, а часть ресурса $u(t)\psi(t-0,x)$ продаётся с заданным доходом $f(t,x(t),\psi,u(t),v(t)), f \in C^\infty$. Таким образом, если $\psi(t,x)$ - количество ресурса в момент времени t в точке x, то:

$$\dot{\psi}(t,x) = 0, \text{ если } x \neq x(t);$$

$$\psi(t+0,x(t)) = (1-u(t))\psi(t-0,x(t))$$

Устройство за время T проезжает n кругов, то есть в каждой точке x окружности оно побывает n раз.

Требуется найти оптимальную функцию сбора ресурса $u(t)$, которая обеспечит максимальный доход.

То есть, ставится задача максимизации функционала

$$I(u(\cdot)) = \int_0^T f(t,v(t),x(t),\psi(t,x(t)),u(t))dt \to max$$

за счёт выбора $u(t)$. Как обычно, $u(t)$ - измеримая функция.

3 Основной результат

3.1 Теорема 1

Теорема 1 *Если $\tilde{u}(t)$ - оптимальное управление в задаче, то в любой точке x, такой, что $\psi_0(x)$ непрерывна в x, и функции $v(t), u(t)$ непрерывны $\forall t : x(t) = x$, выполнено следующее условие:*

$$\sum_{i=1}^{n} \big(f(t_i,v(t_i),x_i,\psi_i(x_i),\hat{u}(t_i)) - f(t_i,v(t_i),x_i,\tilde{\psi}_i,w_i)\big) \cdot \frac{1}{v(t_i)} \geq 0$$

$$\text{для } \forall w_i \in [0,1], 1 \leq i \leq n,$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_n$ - моменты времени 1го, 2го, $\ldots$, n-го прохождения точки x устройством, $x_i = x(t_i)$, $\psi_i(x_i) = \psi(t_i - 0, x(t_i))$ и

$\tilde{\psi}_1 = \psi_0(x);$

$\tilde{\psi}_{k+1} = (1-w_k)\tilde{\psi}_k, \ 1 \leq k \leq n-1.$

Замечание

Случай экспоненциального роста количества ресурса $\psi(x)$ *со временем,* $\dot{\psi}(t,x) = \alpha\psi(t,x), \alpha \in \mathbb{R}$*, сводится к рассматриваемой задаче заменой* $\tilde{\psi} = e^{-\alpha t}\psi$*. Тогда* $\dot{\tilde{\psi}} = 0$*, и для новой задачи формулируется принцип максимума в представленной форме.*

3.2 Доказательство

Пусть за время T устройство проехало n кругов. T_i - время i-го прохождения устройством начальной точки x_0: $x(T_i) = x(0)$. Первоначально в точке x было $\psi_1(x) := \psi_0(x)$ единиц ресурса. После первого сбора ресурса в этой точке остаётся $\psi_2(x) = (1 - u(t_1))\psi_1(x)$ ресурса, где t_1 - момент времени первого прохождения точки x. Аналогично между i-ым и $i + 1$-ым сбором ресурса в точке x остаётся $\psi_{i+1}(x) = (1 - u(t_i)) \cdot \psi_i(x) = (1 - u(t_i))(1 - u(t_{i-1}))\dots(1 - u(t_1))\psi_1(x)$ единиц ресурса, где t_i - момент i-го прохождения устройством точки x. Тогда исходный функционал можно переписать в виде:

$$I(u(\cdot)) = \sum_{i=0}^{n} \int_{T_i}^{T_{i+1}} f(t, v(t), x(t), \psi_i(x(t)), u(t))dt.$$

Пусть $\hat{u}$ - оптимальное управление. Пусть также в точке x непрерывна функция $\psi_0(x)$ и функции $v(t), u(t)$ непрерывны $\forall t, x(t) = x$. Изменим это управление на каждом круге в h-окрестности точки x:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \hat{u}(t), t \notin \cup_k (t_k - \tau_k^1, t_k + \tau_k^2); \\ w_1, t \in (t_1 - \tau_1^1, t_1 + \tau_1^2); \\ w_2, t \in (t_2 - \tau_2^1, t_2 + \tau_2^2); \\ \vdots \\ w_n, t \in (t_n - \tau_n^1, t_n + \tau_n^2), \end{cases}$$

где t_k - момент k-го прохода через точку x,

$t_k - \tau_k^1$ - момент времени, в который устройство находилось в точке $x - h$ на k-ом круге.

$t_k + \tau_k^2$ - момент времени, в который устройство находилось в точке $x + h$ на k-ом круге.

$\overline{w} = (w_1, w_2, ..., w_n) \in [0; 1]^n$.

Оптимальность управления $\hat{u}$ означает, что $I(\hat{u}(\cdot)) - I(u(\cdot)) \geq 0$ для любого управления $u(\cdot)$. В том числе и для управления $\tilde{u}(\cdot)$:

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \Big(f(t, v(t), x(t), \psi_i(x(t)), \hat{u}(t)) - f(t, v(t), x(t), \tilde{\psi}_i(x(t)), \tilde{u}(t)) \Big) dt \geq 0,$$

где $\tilde{\psi}_i(x(t))$ - количество ресурса, оставшегося в точке x перед i-ым её прохождением устройством при управляющей функции сбора $\tilde{u}(t)$, то есть $\tilde{\psi}_1(x) := \psi_0(x)$, и

$$\tilde{\psi}_{i+1}(x) = (1-\tilde{u}(t_i))\tilde{\psi}_i(x) = (1-\tilde{u}(t_i))(1-\tilde{u}(t_{i-1}))\dots(1-\tilde{u}(t_1))\tilde{\psi}_1(x),\ 1 \le i \le n-1.$$

Далее будем рассматривать $x(t)$ как пройденный за время t путь, т. е. $x(t) = x(0) + \int_0^t v(\tau)d\tau$.

Поскольку $dx = v(t)dt$ и $v(t) > 0, \forall t$, можно произвести замену переменной интегрирования: $dt = \dfrac{dx}{v(t)}$. Получаем:

$$\sum_{i=0}^{n}\int_i^{i+1}\Big(\big(f(t(x),v(t(x)),x,\psi_i(x),\hat{u}(t(x)))-f(t(x),v(t(x)),x,\tilde{\psi}_i(x),\tilde{u}(t(x)))\big)\cdot\frac{1}{v(t(x))}\Big)dx \ge\ 0,$$

где $t(x)$ - время прохождения точки x на соответствующем круге, однозначно восстанавливается, так как скорость $v(t) > 0$.

Значения подынтегральных функций совпадают вне $h-$окрестностей точек $x_1, x_2, \dots, x_n$, соответствующих 1-му, 2-му, ..., n-му прохождению устройством точки x окружности.

$$\sum_{i=0}^{n}\int\limits_{x_i-h}^{x_i+h}\Big(\big(f(t(x),v(t(x)),x,\psi_i(x),\hat{u}(t(x))) - f(t(x),v(t(x)),x,\tilde{\psi}_i(\tilde{x_i}),\tilde{u}(t(x)))\big)\cdot\frac{1}{v(t)}\Big)dx \ge 0$$

Пользуясь теоремой о среднем, получаем

$$2h\sum_{i=0}^{n}\big(f\big(\tilde{t_i},v(\tilde{t_i}),\tilde{x_i},\psi_i(\tilde{x_i}),\hat{u}(\tilde{t_i})\big)-f(\tilde{t_i},v(\tilde{t_i}),\tilde{x_i},\tilde{\psi}_i(\tilde{x_i}),\hat{u}(\tilde{t_i})\big)\frac{1}{v(\tilde{t_i})} \ge 0,$$

где $\tilde{x_i} \in (x_i-h; x_i+h); i = 1, 2, \ \dots, n$, а $\tilde{t_i}$ - время прохождения точки $\tilde{x_i}$.

Поделив выражение на $2h$ и взяв предел при $h \to 0$, получаем необходимое условие оптимальности управления $\hat{u}(\cdot)$ в точке x окружности:

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\big(f(t_i,v(t_i),x_i,\psi_i(x_i),\hat{u}(t_i)) - f(t_i,v(t_i),x_i,\tilde{\psi}_i(x_i),\tilde{u}(t_i))\big)\cdot\frac{1}{v(t_i)}\Big) \ge 0,$$

которое должно выполняться для любого вектора $\overline{w} = (w_1, w_2, ..., w_N) \in (0;1)^N$.

Теорема 1 доказана.

4 Принцип максимума для задач с линейной функцией, задающей прибыль

4.1 Теорема 2

Теорема 2 *Пусть в условиях задачи функция сбора представима в виде* $f(t,x,v,\psi(t,x),u(t)) = g(t,x,v)u(t)\psi(t,x)$*, где функция* $g(t,x,v)$ *не зависит от собранного ресурса* $u(t)\psi(t,x)$*. Пусть также в точке* x *непрерывна функция* $\psi_0(x)$*, и функции* $v(t), u(t)$ *непрерывны* $\forall t : x(t) = x$*. Тогда если в момент времени* $\tilde{t}$ *прохождения точки* x $g(\tilde{t},x,v(\tilde{t}))\dfrac{1}{v(t)} \neq \max\limits_{t:x(t)=x}[g(t,x,v(t))\dfrac{1}{v(t)}]$ *или* $g(\tilde{t},x,v(\tilde{t})) \leq 0$*, то собирать ресурс на этом круге неоптимально, то есть* $\hat{u}(\tilde{t}) = 0$*. При этом, если положительный максимум* $g(t,x,v(t))\dfrac{1}{v(t)}$ *достижим, то за весь период [0,T] нужно собрать весь ресурс.*

Иными словами, оптимально собрать весь ресурс только в те моменты времени, когда функция $g(t,x,v(t))\dfrac{1}{v(t)}$ положительна и достигает своего максимума в данной точке.

4.2 Доказательство

Пусть на l-ом круге достигается максимальное положительное значение функции $\dfrac{g(t,x(t),v(t))}{v(t)}$ в точке x. Если $\dfrac{g(t,x(t),v(t))}{v(t)}$ всегда отрицательна, то вместе с ней отрицательна и $f(t,x,v,\psi(t,x),u)$, и сбор ресурса несёт только убыток, следовательно, собирать его в этой точке не следует, т. е. $u_i = 0, \forall i$.

Если же положительное значение достигается, то оставлять несобранный ресурс невыгодно.

Запишем необходимые условия оптимальности для задачи и положим в них $w_l = 1, w_k = 0, k \neq l$:

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\hat{u}(t_i)\psi_i(x)g(t_i,x(t_i),v(t_i)) - w_i\tilde{\psi}_i(x)g(t_i,x(t_i),v(t_i)))\Big)\cdot\frac{1}{v(t_i)} \geq 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{u}(t_i)\psi_i(x)\frac{g(t_i,x(t_i),v(t_i))}{v(t_i)} - \psi_0(x)\frac{g(t_l,x,v(t_l))}{v(t_l)} \geq 0;$$

Так как на l-ом круге $\dfrac{g(t,x,v(t))\psi_0(x)}{v(t)}$ достигает своего максимума, т. е.

$$\frac{g(t_l,x,v(t_l))\psi_0(x)}{v(t_l)} \geq \frac{g(t_k,x,v(t_k))\psi_0(x)}{v(t_k)},\ 1 \leq k \leq n,$$

то

$$\frac{g(t_l,x,v(t_l))\psi_0(x)}{v(t_l)} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{g(t_i,x,v(t_i))}{v(t_i)};\ \forall\{a_i\}_{i=1}^{n} : \sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1, a_i \in [0,1].$$

Значит,
$$\psi_0(x)\frac{g(t_l,x,v(t_l))}{v(t_l)} \geq \sum_{i=1}^{n} \hat{u}(t_i)\psi_i(x)\frac{g(t_i,x(t_i),v(t_i))}{v(t_i)},$$
так как $\psi_0(x) \geq \sum_{i=1}^{n} \hat{u}(t_i)\psi_i(x)$

Но, согласно необходимому условию оптимальности:
$$\psi_0(x)\frac{g(t_l,x,v(t_l))}{v(t_l)} \leq \sum_{i=1}^{n} \hat{u}(t_i)\psi_i(x)\frac{g(t_i,x(t_i),v(t_i))}{v(t_i)}.$$

Следовательно
$$\sum_{i=1}^{n} \hat{u}(t_i)\psi_i(x)\frac{g(t_i,x(t_i),v(t_i))}{v(t_i)} = \psi_0(x)\frac{g(t_l,x,v(t_l))}{v(t_l)}.$$

И $\hat{u}(t_k) = 0, \forall k : \dfrac{g(t_k,x,v(t_k))}{v(t_k)} \neq \dfrac{g(t_l,x,v(t_l))}{v(t_l)}$, то есть нужно собирать ресурс только в те моменты времени, когда функция $g(t,x(t),v(t))\dfrac{1}{v(t)}$ положительна и достигает своего максимума.

Теорема 2 доказана.

4.3 Следствие

Если функция $\dfrac{g(t,x(t),v(t))}{v(t)}$ достигает своего положительного максимума в точке x в единственный момент времени, то оптимальная стратегия определятся однозначно: собрать весь урожай в этот момент времени.

4.4 Доказательство

Согласно утверждению, собирать ресурс на других кругах неоптимально. Но так как $\dfrac{g(t,x,v(t))\psi_0(x)}{v(t)}$ и, следовательно, $f(t,x,v,\psi(t,x),u) = g(t,x,v(t))u(t)\psi_0(x)$ бывают положительны, то оставлять несобранный ресурс также неоптимально.

Следствие доказано.

5 Примеры

5.1 Пример 1

Собирающее устройство, двигаясь с единичной скоростью по окружности длины 1, совершает n кругов. 1 ед. ресурса распределена на окружности равномерно. Прибыль от продажи собранного ресурса рассчитывается по формуле $f(t, \psi(x,t), u(t)) = tu\psi(t,x)$.

Требуется найти оптимальное управление, максимизирующее функционал
$I(u(\cdot)) = \int\limits_0^T f(t, \psi(t, x(t)), u(t))dt \to max$.

Введём те же обозначения. $\psi_1(x) = 1, \forall x \in S^1, v(t) = 1$.

Никакое решение, кроме очевидного „собрать всё на последнем круге", оптимальным быть не может. Это непосредственно следует из Теоремы 2 и следствия из неё. Но можно также провести рассуждения, аналогичные доказательству Теоремы 2. Пусть при управлении $u(t)$ в точке x начали что-то срезать на k-ом круге ($k < n$), то есть $u_k > 0, u_i = 0, i = 1, \ldots, k-1$. Покажем, что срезать это количество на следующем круге будет выгоднее. Обозначим через t - момент времени, в который устройство в первый раз было в точке x. $u_1, u_2, \ldots, u_n$ - доля срезаемого ресурса в точке x на 1ом, 2ом, …, n-ом круге. Возьмём $w_i = u_i$, при $i \notin \{k, k+1\}$, $w_k = 0$, а w_{k+1} выберем так, чтобы после $k+1$ круга осталось то же количество ресурса, что и при управлении u, то есть $(1-u_k)(1-u_{k+1}) = 1 - w_{k+1}$, т. е. $w_{k+1} = 1 - (1-u_k)(1-u_{k+1})$.

Запишем необходимое условие оптимальности:

$$\sum_{i=1}^{n} \big(f(t_i, \hat{\psi}_i(x), u_i) - f(t_i, \psi_i(x), w_i)\big) \cdot \frac{1}{v(t_i)} \geq 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \big((t+i-1)u_i\hat{\psi}_i(x) - (t+i-1)w_i\psi_i(x)\big) \geq 0;$$

$$\big((t+k-1)u_k\hat{\psi}_k(x) - (t+k-1)w_k\psi_k(x)\big) + \big((t+k)u_{k+1}\hat{\psi_{k+1}}(x) - (t+k)w_{k+1}\psi_{k+1}(x)\big) \geq 0;$$

Так как $(1-u_1) \cdot \ldots \cdot (1-u_{k-1}) = 0$, получаем

$$(t+k-1)u_k + (t+k)\big(u_{k+1}(1-u_k) - w_{k+1}\big) \geq 0;$$

$w_{k+1} = 1 - (1-u_k)(1-u_{k+1}) = u_k + u_{k+1} - u_k u_{k+1}$, тогда:

$$(t+k-1)u_k + (t+k)\big(u_{k+1}(1-u_k) - (u_k + u_{k+1} - u_k u_{k+1})\big) \geq 0;$$

$$(t+k-1)u_k + (t+k)u_k \geq 0;$$

$$-u_k \geq 0.$$

Следовательно, $u_k = 0$. Таким образом, управление $u(t)$ не является оптимальным.

5.2 Пример 2

Собирающее устройство, двигаясь с единичной скоростью $v(t) = 1$ по окружности длины 1, совершает n кругов. 1 ед. ресурса распределена на окружности равномерно $\psi_1(x) = 1, \forall x \in S^1$. Прибыль от продажи собранного ресурса рассчитывается по формуле $f(t, \psi(x(t), t), u(t)) = (t^3 - 12t + 1)u\psi(t, x(t))$.

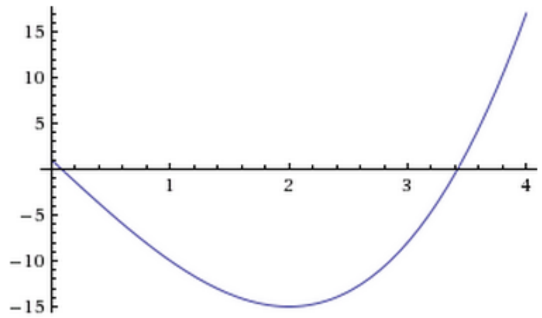
Функция $f(t, \psi(x(t), t), u(t))$, задающая прибыль, линейно зависит от собираемого ресурса $u(t)\psi(x, t)$, поэтому, согласно утверждению, оптимально собирать ресурс, когда функция $\dfrac{g(t)}{v(t)} = \dfrac{f(t, \psi(x(t), t), u(t))}{u(t)\psi(x(t), t)v(t)} = t^3 - 12t + 1$ положительна и достигает своего максимума.

Исследуем её:

$g'(t) = 3t^2 - 12 = 0;$

$t_{1,2} = \pm 2.$

Функция $g(t)$ на промежутке $[0; 2]$ убывает ($g'(x) < 0$) и возрастает на $[2; \infty]$ ($g'(x) > 0$).



При $t = 2\sqrt{3}$ функция $g(2\sqrt{3}) = 1 = g(0)$. То есть в силу возрастания $g(t)$, если устройство в последний раз проезжает точку x в момент времени $t > 2\sqrt{3}$, то в этой точке нужно собрать весь урожай на последнем круге. Иначе нужно сравнить значения функции $g(t)$ в моменты времени t_1, t_n первого и последнего прохождения этой точки x.

$g(t) \geq 0$ при $t \in [0; t_1] \cup [t_2; \infty); t_1 \approx 0,0834, t_2 \approx 3,4217.$

$x_1 \approx 0,0834, x_2 \approx 0,4217.$

Таким образом, при $n > 4$ нужно собирать весь ресурс на последнем круге.

При $n = 4$: $x \in [0; x_1]$ - собираем на первом круге; $x \in (x_1; x_2)$ - не собираем; $x \in [x_2; 1)$ - собираем на четвёртом круге.

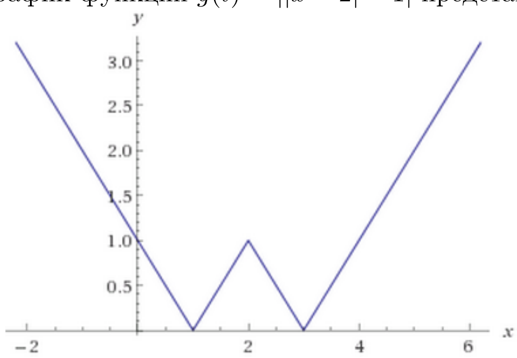
При $n < 4$: $x \in [0; x_1]$ - собираем на первом круге; $x \in (x_1; 1)$ - ничего не собираем.

5.3 Пример 3

Устройство, двигаясь с единичной скоростью $v(t) = 1$ по окружности длины 1, совершает n кругов. 1 ед. ресурса распределена на окружности равномерно $\psi_1(x) = 1, \forall x \in S^1$. Прибыль от продажи собранного ресурса рассчитывается по формуле $f(t, \psi(x(t), t), u(t)) = ||x-2|-1|u\psi(t, x(t))$.

Функция $f(t, \psi(x(t), t), u(t))$ линейно зависит от собираемого ресурса $u(t)\psi(x,t)$, поэтому оптимально собирать ресурс, когда функция $\dfrac{g(t)}{v(t)} = \dfrac{f(t, \psi(x(t), t), u(t))}{u(t)\psi(x(t), t)v(t)} = ||x-2|-1|$ положительна и достигает своего максимума.

График функции $g(t) = ||x-2|-1|$ представлен на рисунке.



Тогда оптимальная стратегия состоит в следующем:

при $n = 1$ собрать весь ресурс на первом круге;

при $2 \leq n \leq 4$: $x \in [0; 0,5)$ - собирать на первом круге; $x \in [0,5; 1)$ - на втором;

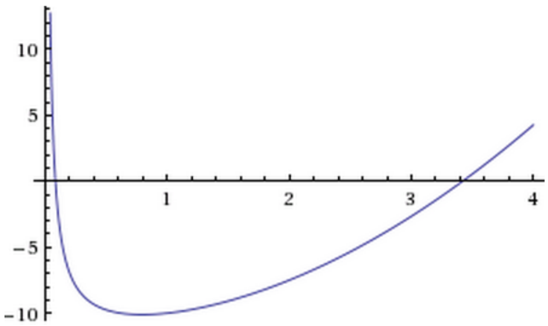
при $n > 4$ собрать всё на последнем круге.

5.4 Пример 4

Устройство, двигаясь равноускоренно $v(t) = t$ по окружности длины 1, совершает n кругов. 1 ед. ресурса распределена на окружности равномерно $\psi_1(x) = 1, \forall x \in S^1$. Прибыль от продажи собранного ресурса рассчитывается по формуле $f(t, \psi(x,t), u(t)) = (t^3 - 12t + 1)u\psi(t,x)$.

Функция $f(t, \psi(x(t),t), u(t))$, задающая прибыль, линейно зависит от собираемого ресурса $u(t)\psi(x,t)$, поэтому, согласно утверждению, оптимально собирать ресурс, когда функция $\dfrac{g(t)}{v(t)} = \dfrac{f(t, \psi(x(t),t), u(t))}{u(t)\psi(x(t),t)v(t)} = t^2 - 12 + \dfrac{1}{t}$ положительна и достигает своего максимума.

График функции $t^2 - 12 + \dfrac{1}{t}$:



Корни $t^2 - 12 + \dfrac{1}{t} = 0$:

$t_1 \approx 0,0834, t_2 \approx 3,4217.$

$x_1 \approx 0,0834, x_2 \approx 0,4217.$

Оптимальная стратегия состоит в следующем:

при $n < 4$: $x \in [0; x_1)$ собрать весь ресурс на первом круге, $x \in [x_1; 1)$ - ничего не собирать;

при $n = 4$: $x \in [0; x_1]$ - собирать на первом круге, $x \in (x_1; x_2)$ - ничего не собирать, $x \in [x_2; 1)$ - на четвёртом круге;

при $n > 4$ собрать всё на последнем круге.

5.5 Пример 5

Устройство, двигаясь равноускоренно $v(t) = t$ по окружности длины 1, совершает n кругов. 1 ед. ресурса распределена на окружности равномерно $\psi_1(x) = 1, \forall x \in S^1$. Прибыль от продажи собранного ресурса рассчитывается по формуле: $f(t, \psi(x(t), t), u(t)) = (u\psi(t, x(t)))^2$.

Выпишем необходимые условия оптимальности в точке x:

$$\sum_{i=1}^{n}((\hat{u}_i\psi_i(x_i))^2 - (w_i\tilde{\psi}_i(x_i))^2)\frac{1}{v(t_i)} \geq 0, \quad \forall w_i \in [0;1];$$

$$\sum_{i=1}^{n}((\hat{u}_i(1-\hat{u}_{i-1})\dots(1-\hat{u}_1)\psi_0(x))^2 - (w_i(1-w_{i-1})\dots(1-w_1)\tilde{\psi}_0(x))^2) \geq 0, \quad \forall w_i \in [0;1]$$

Обозначим через α_i - долю ресурса, собранного на i-ом круге, от первоначального количества, т. е. $\alpha_i = \hat{u}_i(1-\hat{u}_{i-1})\dots(1-\hat{u}_1)$. Через $\tilde{\alpha}_i$ - то же самое для набора $\bar{w}$: $\tilde{\alpha}_i = w_i(1-w_{i-1})\dots(1-w_1)$.

Фунция прибыли $f(t, \psi(x(t), t), u(t))$ принимает положительные значения, поэтому выгодно собрать весь ресурс, то есть $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$.

Необходимые условия переписываются в виде:

$$\sum_{i=1}^{n}((\alpha_i\psi_0(x))^2 - (\tilde{\alpha}_i\psi_0(x))^2)\frac{1}{v(t_i)} \geq 0, \quad \forall \tilde{\alpha}_i \in [0;1],\ \sum_{i=1}^{n}\tilde{\alpha}_i \leq 1;$$

$$\sum_{i=1}^{n}((\alpha_i)^2 - (\tilde{\alpha}_i)^2)\frac{1}{v(t_i)} \geq 0, \quad \forall \tilde{\alpha}_i \in [0;1],\ \sum_{i=1}^{n}\tilde{\alpha}_i \leq 1;$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i)^2\frac{1}{v(t_i)} \geq \sum_{i=1}^{n}(\tilde{\alpha}_i)^2\frac{1}{v(t_i)}, \quad \forall \tilde{\alpha}_i \in [0;1],\ \sum_{i=1}^{n}\tilde{\alpha}_i \leq 1$$

Скорость $v(t)$ монотонно возрастает, тогда $\frac{1}{v(t_i)} > \frac{1}{v(t_j)},\ i < j$.

Возведём неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i \leq 1$ в квадрат, тогда получим, что $\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i)^2 \leq 1$, и равенство достигается только, если все α_i, кроме одного, нули.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i)^2\frac{1}{v(t_i)} \leq \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i)^2\frac{1}{v(t_1)} \leq \frac{1}{v(t_1)} = \sum_{i=1}^{n}(\tilde{\alpha}_i)^2\frac{1}{v(t_i)} \text{ при } \tilde{\alpha}_1 = 1, \tilde{\alpha}_j = 0, j > 1$$

Значит, необходимые условия выполняются только, если $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$, то есть $\hat{u}(t_1) = 1$. Таким образом, весь урожай нужно собрать на первом круге.

5.6 Пример 6

Устройство, двигаясь с постоянной скоростью $v(t) = 1$ по окружности длины 1, совершает n кругов. 1 ед. ресурса распределена на окружности равномерно $\psi_1(x) = 1, \forall x \in S^1$. Прибыль от продажи собранного ресурса рассчитывается по формуле: $f(t, \psi(x(t), t), u(t)) = \sqrt{u\psi(t, x(t))}$.

Выпишем необходимые условия оптимальности в точке x:

$$\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{\hat{u}_i\psi_i(x_i)} - \sqrt{w_i\tilde{\psi}_i(x_i)})\frac{1}{v(t_i)} \geq 0, \quad \forall w_i \in [0;1];$$

Обозначим через α_i - долю ресурса, собранного на i-ом круге, от первоначального количества, т. е. $\alpha_i = \hat{u}_i(1 - \hat{u}_{i-1})\ldots(1 - \hat{u}_1)$. Через $\tilde{\alpha}_i$ - то же самое для набора $\bar{w}$: $\tilde{\alpha}_i = w_i(1 - w_{i-1})\ldots(1 - w_1)$.

Фунция прибыли $f(t, \psi(x(t), t), u(t))$ принимает положительные значения, поэтому нужно собрать весь ресурс, то есть $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$.

Тогда необходимые условия оптимальности:

$$\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{\alpha_i\psi_0(x)} - \sqrt{\tilde{\alpha}_i\psi_0(x)}) \geq 0, \quad \forall\tilde{\alpha}_i \in [0;1], \ \sum_{i=1}^{n}\tilde{\alpha}_i \leq 1;$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{\alpha_i} - \sqrt{\tilde{\alpha}_i}) \geq 0, \quad \forall\tilde{\alpha}_i \in [0;1], \ \sum_{i=1}^{n}\tilde{\alpha}_i \leq 1;$$

Согласно неравенству Йенсена: $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\alpha_i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\alpha_i} = \sqrt{\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\alpha_i} = \frac{\sqrt{n}}{n}$.
Тогда максимум $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\alpha_i}$ при ограничении $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$ достигается, когда $\alpha_i = \frac{1}{n}, \ \forall i$ и $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\alpha_i} = \frac{\sqrt{n}}{n}$.

А значит для выполнения необходимых условий нужно на каждом круге собирать $\frac{1}{n}$ первоначального ресурса, и оптимальное управление $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \ldots, \hat{u}_n$ находится из системы уравнений: $\hat{u}_i(1 - \hat{u}_{i-1})\ldots(1 - \hat{u}_1) = \frac{1}{n}; \quad 1 \leq i \leq n$.

6 Список литературы

1. Gordon H. S. Economic theory of a common property resource: The fishery // Journal of Political Economy - 1954. - p. 124-142, vol. 75.

2. Scott A. D. The fishery: The objectives of sole ownership // Journal of Political Economy - 1955 - p. 116-124, vol. 63.

3. Behringer S., Upmann T. Optimal Harvesting of a Spatial Renewable Resource // Journal of Economic Dynamics and Control - 2014 - p. 105-120, vol. 42.