КАФЕДРА ОБЩИХ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
Специальный курс по выбору студента
«Геометрия банаховых пространств: вопросы выпуклости и гладкости норм»
½ года, экзамен
Лектор: доцент А.А. Васильева

В спецкурсе обсуждаются вопросы существования эквивалентных норм, обладающих гладкостью в каком-нибудь смысле (дифференцируемость всюду по Фреше и Гато, дифференцируемость в какой-нибудь ненулевой точке) или выпуклостью (строгой или локально равномерной). Также обсуждаются понятия равномерной выпуклости и равномерной гладкости.

Порграмма

1. Теорема об отделимости в полинормированном пространстве. Характеризация множества функционалов на сопряженном пространстве, непрерывных относительно *-слабой топологии. Теорема Мазура о слабой замкнутости выпуклых замкнутых множеств в банаховом пространстве. Теорема Тихонова о компактности произведения. Теорема Банаха – Алаоглу о *-слабой компактности единичного шара в сопряженном пространстве. Теорема Голдстайна о *-слабом замыкании единичного шара B_X во втором сопряженном пространстве.
2. Теорема Эберлейна – Шмульяна об эквивалентности слабой компактности и секвенциальной слабой компактности.
3. Рефлексивные пространства. Критерии рефлексивности банахова пространства в терминах слабой компактности единичного шара и рефлексивности сопряженного пространства. «Свойство трех пространств».
4. Критерий Джеймса рефлексивности банаховых пространств (доказательство – для сепарабельных пространств).
5. Принцип Экланда. Теорема Бишопа – Фелпса. Пример Фелпса неполного нормированного пространства, в котором множество функционалов, достигающих нормы, неплотно.
6. Субдифференциал выпуклой функции, критерий дифференцируемости по Гато в терминах субдифференциала. Субдифференциал нормы. Критерии дифференцируемости нормы по Гато (лемма Шмульяна).
7. Теорема Кадеца о дифференцируемости нормы по Гато. Строгая выпуклость нормы. Теорема о существовании эквивалентной нормы на сепарабельном пространстве, всюду дифференцируемой по Гато. Теорема Мазура о множестве точек дифференцируемости по Гато нормы на сепарабельном пространстве.
8. Дифференцируемость нормы по Фреше. Лемма Шмульяна. Следствие: рефлексивность пространства с дифференцируемой по Фреше сопряженной нормой.
9. Локально равномерно выпуклые нормы. Критерий существования эквивалентной нормы на сепарабельном пространстве, всюду дифференцируемой по Фреше.
10. Bump-функции. Необходимое условие существования дифференцируемой по Гато bump-функции. Критерий существования дифференцируемой по Фреше bump-функции на сепарабельном банаховом пространстве.
11. Крайние, выступающие и сильно выступающие точки. Теоремы Крейна – Мильмана и Линденштраусса – Троянского. Теорема Мазура – Фелпса о представлении выпуклого замкнутого ограниченного множества в виде пересечения шаров.
12. Пространства со свойством Радона-Никодима. Острые множества. Характеризация пространств со свойством Радона-Никодима в терминах острых множеств (без доказательства). Пространства со свойством Крейна-Мильмана. Теоремы Фелпса о

сильно выступающих точках и Хаффа-Морриса-Стегалла о сопряженном пространстве со свойством Радона-Никодима (без доказательства).

13. Пространства со свойством Бишопа — Фелпса. Теорема Бургейна.
14. Равномерно выпуклые и равномерно гладкие пространства. Модули выпуклости и гладкости и связь между ними. Оценка модуля выпуклости пространств L_p. Теорема Дэя – Нордлендера.
15. Конечная представимость. Теорема Дворецкого (без доказательства). Теорема Линденштраусса — Цафрири о дополняемых подпространствах.
16. Теорема Банаха – Мазура об изометрическом вложении сепарабельного пространства в $C[0, 1]$.
17. Неравенство Хинчина. Теорема о существовании подпространства в $L_p[0, 1]$, изоморфного l_2.