Лекция 11. Вязкопластические среды: качественное описание решений.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область. Рассматриваем задачу

$$J(u) := J_D(u) := \mu \int\limits_D |\nabla u|^2\, dx + \tau \int\limits_D |\nabla u|\, dx - c \int\limits_D u\, dx \to \inf, \quad u \in \mathring{W}_2^1(D). \qquad (1)$$

Из теоремы вложения Соболева следует, что $u \in L_q(D)$ при $\frac{1}{2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} > 0$, то есть для $q < \infty$. П.П. Мосолов и В.П. Мясников [1] показали, что решение задачи (1) непрерывно (их доказательство будет приведено в этой лекции). Позже их результат был усилен Х. Брезисом [2], который доказал, что решение принадлежит пространству $W_2^2(D)$.[1]

В работе [1] также доказано существование ядер течения, то есть замкнутых множеств с непустой внутренностью, в которых значение скорости u постоянно и является локальным максимумом. Внутри ядер течения среда движется, как твердое тело.

Пусть $v \in C(D)$, E — непустое замкнутое связное множество, $E \subset D$. Назовем E множеством строгого локального минимума (максимума) функции v, если $v|_E \equiv c_E$ и найдется открытое множество $U \supset E$ такое, что для любого $x \in U \backslash E$ выполнено $v(x) > c_E$ (соответственно $v(x) < c_E$).

Теорема 1. *Пусть μ, τ, c — положительные константы, $D \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная p-связная область. Тогда решение задачи (1) является неотрицательной непрерывной функцией. При этом, $\hat{u}$ не имеет множеств строгих локальных минимумов. Если $E \subset D$ — множество строгого локального максимума функции $\hat{u}$, то оно содержит круг радиуса $\frac{\tau}{8pc}$.*

Доказательство. Скажем, что $v \in \widehat{W}$, если существует открытое множество $\tilde{D} \subset D$ такое, что $\partial \tilde{D} \subset D$ — конечное объединение ломаных, $v|_{D \backslash \tilde{D}} = 0$ и существует разбиение $\tilde{D}$ на треугольники Δ_i $(1 \leqslant i \leqslant i_0)$ такое, что для любого $i \in \{1, \ldots, i_0\}$ функция $v|_{\Delta_i}$ является аффинной.[2] Это множество плотно в $\mathring{W}_2^1(D)$.

Пусть $\hat{u}$ — решение задачи (1), $\{v_n\} \subset \mathring{W}_2^1(D)$. Поскольку функционал J является непрерывным и сильно выпуклым, то $v_n \underset{n\to\infty}{\to} \hat{u}$ в пространстве $\mathring{W}_2^1(D)$ тогда и только тогда, когда $J(v_n) \underset{n\to\infty}{\to} J(\hat{u})$ (см. лекцию про близость реологических моделей, предложение 2).

Докажем, что $\hat{u} \geqslant 0$ п.в. Пусть $v_n \underset{n\to\infty}{\to} \hat{u}$, $\tilde{v}_n(x) = \max\{v_n(x), 0\}$. Нетрудно видеть, что $J(\tilde{v}_n) \leqslant J(v_n)$, поэтому $\tilde{v}_n \underset{n\to\infty}{\to} \hat{u}$. Остается заметить, что существует подпоследовательность, сходящаяся к $\hat{u}$ п.в.

[1] Т.е. пространству функций, у которых все обобщенные частные производные второго порядка принадлежат $L_2(D)$.

[2] Это почти то же, что и $\tilde{W}$ из доказательства теоремы о предельной нагрузке, только функция v может быть постоянной в некоторых треугольниках, содержащихся в $\tilde{D}$.

Теперь перейдем к доказательству непрерывности $\hat{u}$.

Шаг 1. Пусть $v \in \widehat{W}$, $\tilde{D} = \operatorname{supp} v$, $r > 0$. Положим

$$D_{r,v} = \{x \in \tilde{D} : v(x) < r\}$$

и обозначим $D^i_{r,v}$, $1 \leqslant i \leqslant m(r)$, связные компоненты $D_{r,v}$, $\overline{D}^i_{r,v}$ — их замыкания.

Утверждение. Если $\overline{D}^i_{r,v} \cap \partial\tilde{D} \neq \varnothing$ для любого $i = 1, \dots, m(r)$, то существует такое $\delta > 0$, что для любого $\tilde{r} \in (r - \delta, r)$ выполнено $m(\tilde{r}) = m(r)$ и $\overline{D}^i_{\tilde{r},v} \cap \partial\tilde{D} \neq \varnothing$, $i = 1, \dots, m(r)$.

В самом деле, поскольку $D_{\tilde{r},v} \subset D_{r,v}$ при $\tilde{r} < r$, то $m(r) \leqslant m(\tilde{r})$. Поэтому найдутся такие $m \geqslant m(r)$ и $\delta > 0$, что для любого $\tilde{r} \in (r - \delta, r)$ выполнено $m(\tilde{r}) = m$. Пусть $m > m(r)$. Тогда найдется $i = 1, \dots, m(r)$ такое, что $A := D^i_{r,v}$ содержит не менее двух связных компонент множества $D_{\tilde{r},v}$ (обозначим их $A^1_{\tilde{r}}, \dots, A^k_{\tilde{r}}$). Тогда

$$A = \cup_{j=1}^k \left(\cup_{\tilde{r}<r} A^j_{\tilde{r}}\right)$$

является объединением $k \geqslant 2$ открытых непустых непересекающихся множеств — противоречие. Пусть $\delta > 0$ таково, что $m(\tilde{r}) = m(r)$ при $\tilde{r} \in (r - \delta, r)$, $D^i_{\tilde{r},v} \subset D^i_{r,v}$. Пусть $\hat{x} \in \overline{D}^i_{r,v} \cap \partial\tilde{D}$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \hat{x}$, $x_n \in D^i_{r,v}$. Так как $v(\hat{x}) = 0$, то при достаточно больших n выполнено $v(x_n) < r - \delta$ и $x_n \in D^i_{\tilde{r},v}$. Значит, $\hat{x} \in \overline{D}^i_{\tilde{r},v} \cap \partial\tilde{D}$. Утверждение доказано.

Определим отображение $\varphi : \widehat{W} \to \widehat{W}$ следующим образом. Обозначим $\mathcal{R}_v$ множество $r > 0$ таких, что $D_{r,v}$ содержит связную компоненту, замыкание которой не пересекается с $\partial\tilde{D}$. Если $\mathcal{R}_v = \varnothing$, то положим $\varphi(v) = v$. Пусть $\mathcal{R}_v \neq \varnothing$. В силу утверждения, $\mathcal{R}_v$ содержит максимальный элемент $\hat{r}(v)$. Пусть $G_1, \dots, G_l$ — связные компоненты $D_{\hat{r}(v),v}$, граница которых не пересекается с $\tilde{D}$. Положим

$$\varphi(v)(x) = \begin{cases} v(x), & \text{если } x \notin \cup_{j=1}^l G_j, \\ \hat{r}(v), & \text{если } x \in \cup_{j=1}^l G_j. \end{cases}$$

Тогда $\varphi(v) \in \widehat{W}$, $J(\varphi(v)) \leqslant J(v)$ и $\hat{r}(\varphi(v)) < \hat{r}(v)$ (в силу утверждения). Далее, для любого $j = \overline{1, l}$ найдется такое i, что ∂G_j содержит вершину треугольника Δ_i (см. определение класса $\widehat{W}$). В самом деле, иначе $\hat{r}(v)$ — не максимум $\mathcal{R}_v$. Отсюда следует, что найдется такое $n(v) \in \mathbb{N}$, что $\varphi^{n(v)+1}(v) = \varphi^{n(v)}(v)$.

Положим $\psi(v) = \varphi^{n(v)}(v)$. Тогда $\mathcal{R}_{\psi(v)} = \varnothing$.

Шаг 2 ("затягивание локальных минимумов"). Пусть $u_n \underset{n\to\infty}{\to} \hat{u}$. Положим $\tilde{u}_n = \psi(u_n)$. Тогда $\tilde{u}_n \in \widehat{W}$, $J(\tilde{u}_n) \leqslant J(u_n)$ и $\mathcal{R}_{\tilde{u}_n} = \varnothing$. В частности, $\tilde{u}_n$ не имеет множеств строгого локального минимума.

Шаг 3. Обозначим

$$\mathcal{F}_{\tau,p,c} = \{E \subset D : E \text{ не содержит кругов радиуса } \tau/8pc\}.$$

Пусть $v \in \widehat{W}$, $\mathcal{R}_v = \varnothing$. Для каждого $s > 0$ положим

$$\mathcal{E}^v_s = \{E \subset D : E \text{ — множество строгого локального максимума } v, \ \ v|_E = s\}$$

(напомним, что по определению множества строгого локального максимума непустые, замкнутые и связные),

$$S_v = \{s > 0 : \mathcal{E}^v_s \cap \mathcal{F}_{\tau,p,c} \neq \varnothing\}.$$

Так как $v \in \widehat{W}$, то $\operatorname{card}\{s > 0 : \mathcal{E}_s^v \neq \varnothing\} < \infty$, так что S_v конечно. Пусть $\hat{s}_v = \max S_v$, $\mathcal{E}_{\hat{s}_v}^v = \{E_1, \ldots, E_k\}$.

Пусть $s > 0$, $U_{s,v} = \{x \in D : v(x) > s\}$. Для $s \in (0, \hat{s}_v)$, $j = 1, \ldots, k$ обозначим $U_{j,s,v}$ связную компоненту $U_{s,v}$, содержащую E_j. Заметим, что если s достаточно близко к $\hat{s}_v$, то в $U_{j,s,v}$ нельзя вписать круг радиуса $\frac{\tau}{8pc}$ (иначе берем последовательность таких кругов, у которых центры сходятся к некоторой точке, и пользуемся тем, что $E_j = \cap_{s\in(0,\,\hat{s}_v)} U_{j,s,v}$). Положим

$$s_j = \inf\{s < \hat{s}_v : U_{j,s,v} \text{ не содержит круг радиуса } \tau/8pc\},$$

$$\tilde{\varphi}(v)(x) = \begin{cases} v(x), & x \notin \cup_{j=1}^k U_{j,s_j,v}, \\ s_j, & x \in U_{j,s_j,v}. \end{cases}$$

Заметим, что $\tilde{\varphi}(v) \in \widehat{W}$, $\mathcal{R}_{\tilde{\varphi}(v)} = \varnothing$, $\hat{s}_{\tilde{\varphi}(v)} < \hat{s}_v$. Каждая связная компонента множества $\cup_{j=1}^k \overline{U}_{j,s,v}$ содержит круг радиуса $\frac{\tau}{8pc}$ или не является множеством строгого локального максимума функции $\tilde{\varphi}(v)$. Поэтому

$$\operatorname{card} S_{\tilde{\varphi}(v)} < \operatorname{card} S_v. \tag{2}$$

Покажем, что $J(\tilde{\varphi}(v)) \leqslant J(v)$. Для этого докажем следующее утверждение: если $w \in \widehat{W}$, $\mathcal{R}_w = \varnothing$, U — связная компонента $U_{s,w}$, не содержащая круг радиуса $\frac{\tau}{8pc}$,

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} w(x), \ x \notin U, \\ s, \ \ x \in U, \end{cases}$$

то $J(\tilde{w}) \leqslant J(w)$. В самом деле, положим $h(x) = w(x) - s$, $x \in U$, и покажем, что

$$\mu \int\limits_U |\nabla h|^2\, dx + \tau \int\limits_U |\nabla h|\, dx - c \int\limits_U h\, dx \geqslant 0.$$

Это верно, если $c \leqslant \tau \inf_{\tilde{U}\subset U} \frac{|\partial\tilde{U}|}{|\tilde{U}|}$. На прошлой лекции было доказано неравенство $\inf_{\tilde{U}\subset U} \frac{|\partial\tilde{U}|}{|\tilde{U}|} \geqslant \frac{1}{8p\tilde{d}}$, где $\tilde{d}$ — радиус круга, вписанного в U. Поэтому достаточно выполнения соотношения $c \leqslant \frac{\tau}{8p\tilde{d}}$, то есть $\tilde{d} \leqslant \frac{\tau}{8pc}$.

Из (2) следует, что найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\tilde{\varphi}^n(v) = \tilde{\varphi}^{n+1}(v)$. Положим $\tilde{\psi}(v) = \tilde{\varphi}^n(v)$. Тогда $J(\tilde{\psi}(v)) \leqslant J(v)$.

Шаг 4 (“срезка локальных максимумов”). Пусть $\tilde{u}_n$ — последовательность, полученная на шаге 2. Положим $\hat{u}_n = \tilde{\psi}(\tilde{u}_n)$. Тогда $J(\hat{u}_n) \leqslant J(\tilde{u}_n)$ и поэтому $\hat{u}_n \underset{n\to\infty}{\to} \hat{u}$ в $\mathring{W}_2^1(D)$. При этом, $\hat{u}_n$ не имеет множеств строгого локального минимума, а любое множество строгого локального максимума содержит круг радиуса $\frac{\tau}{8pc}$.

Шаг 5. Покажем, что множество $\{\hat{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ предкомпактно в $C(D)$. Достаточно проверить, что оно равностепенно непрерывно (равномерная ограниченность тогда следует из условия $\hat{u}_n|_{\partial D} = 0$). Продолжим $\hat{u}_n$ нулем на $\mathbb{R}^2 \backslash D$.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\rho < \frac{\tau}{32pc}$, B_ρ, $B_{2\rho}$ — замкнутые концентрические круги радиуса ρ и 2ρ соответственно, x_1, $x_2 \in B_\rho$, $\hat{u}_n(x_1) = \max_{B_\rho} \hat{u}_n$, $\hat{u}_n(x_2) = \min_{B_\rho} \hat{u}_n$. Оценим $\hat{u}_n(x_1) - \hat{u}_n(x_2)$. Будем считать, что эта величина положительна.

Обозначим через A_j связную компоненту множества $\{x \in D : \hat{u}_n(x) = \hat{u}_n(x_j)\}$, содержащую x_j. Покажем, что $A_j \cap (\partial B_{2\rho}) \neq \varnothing$. Предположим обратное. Пусть $K_1, \ldots, K_m$ — связные компоненты множества $B_{2\rho} \backslash A_j$, при этом $K_1 \supset \partial B_{2\rho}$. Если $m \geqslant 2$, то обозначим

$$K_2^+ = \{x \in K_2 : \hat{u}_n(x) > \hat{u}_n(x_j)\}, \quad K_2^- = \{x \in K_2 : \hat{u}_n(x) < \hat{u}_n(x_j)\}.$$

Хотя бы одно из этих множеств непусто. Если $K_2^+ \neq \varnothing$, то каждая связная компонента множества $\{x \in K_2^+ : u(x) = \max_{K_2^+} u\}$ является множеством строгого локального максимума, не содержащим круг радиуса $\frac{\tau}{8pc}$. Если $K_2^- \neq \varnothing$, то каждая связная компонента множества $\{x \in K_2^- : u(x) = \min_{K_2^-} u\}$ является множеством строгого локального минимума. В обоих случаях получаем противоречие. Значит, $m = 1$. Но тогда A_1 является множеством строгого локального максимума, в которое нельзя вписать шар радиуса $\frac{\tau}{8pc}$, а A_2 является множеством строгого локального минимума. Снова получается противоречие.

Итак, $A_j \cap (\partial B_{2\rho}) \neq \varnothing$. Выберем начало координат в центре шара B_ρ и введем полярные координаты $(r,\, \theta)$, $x = x(r,\, \theta)$. Так как $\hat{u}_n \in \widehat{W}$, то можно выбрать кусочно-непрерывные функции $\theta_j : [\rho,\, 2\rho] \to [0,\, 2\pi)$, $j = 1,\, 2$, такие, что $\hat{u}_n(x(r,\, \theta_j(r))) = \hat{u}_n(x_j)$. Тогда для $r \in [\rho,\, 2\rho]$

$$\hat{u}_n(x_1) - \hat{u}_n(x_2) = \pm \int\limits_{\theta_2(r)}^{\theta_1(r)} (\hat{u}_n)'_\theta \, d\theta,$$

откуда

$$0 \leqslant \hat{u}_n(x_1) - \hat{u}_n(x_2) \leqslant \frac{1}{\rho} \int\limits_\rho^{2\rho} dr \int\limits_0^{2\pi} |(\hat{u}_n)'_\theta| \, d\theta \leqslant \frac{1}{\rho} \int\limits_\rho^{2\rho} r \, dr \int\limits_0^{2\pi} |\nabla \hat{u}_n| \, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\rho} \int\limits_{B_{2\rho}} |\nabla \hat{u}_n| \, dx \leqslant \frac{1}{\rho} |B_{2\rho}|^{1/2} \left(\int\limits_{B_{2\rho}} |\nabla \hat{u}_n|^2 \, dx \right)^{1/2} = 2\sqrt{\pi} \left(\int\limits_{B_{2\rho}} |\nabla \hat{u}_n|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Так как $\nabla \hat{u}_n \underset{n\to\infty}{\to} \nabla \hat{u}$ в $L_2(D)$, то в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\rho \in (0,\, \tau/32pc)$ и $N \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant N$ и любого шара $B_{2\rho}$ выполнено $2\sqrt{\pi} \left(\int\limits_{B_{2\rho}} |\nabla \hat{u}_n|^2 \, dx \right)^{1/2} < \varepsilon$. Взяв $\rho > 0$ достаточно малым, можно считать, что то же неравенство выполнено и для $n < N$.

Итак, предкомпактность $\{\hat{u}_n\}$ доказана. Выбираем сходящуюся подпоследовательность. Ее предел совпадает с $\hat{u}$ (по теореме вложения, $\hat{u}_n$ сходится к $\hat{u}$ в $L_2(D)$). Отсюда следует, что $\hat{u}$ непрерывна, не имеет множеств строгого локального минимума и любое множество строгого локального максимума содержит круг радиуса $\tau/8pc$. $\square$

В [1] также доказано, что при уменьшении области значения $\hat{u}(x)$ не увеличиваются.

Теорема 2. (принцип мажоризации). *Пусть D_1 — ограниченная область с липшицевой границей, $\psi : \partial D_1 \to \mathbb{R}_+$ — липшицева функция, $D_2 \subset D_1$ — область. Пусть $\hat{u}_1$ — решение задачи*

$$J_{D_1}(u) \to \min, \quad u \in W_2^1(D_1), \quad u|_{\partial D_1} = \psi,$$

$\hat{u}_2$ — решение задачи

$$J_{D_2}(u) \to \min, \quad u \in \mathring{W}_2^1(D_2).$$

Тогда $u_1(x) \geqslant u_2(x)$, $x \in D_2$.

Доказательство. Предположим обратное: $\tilde{D} = \{x \in D_2 : \hat{u}_2(x) > \hat{u}_1(x)\} \neq \varnothing$. Продолжим $\hat{u}_2$ нулем вне D_2. Пусть $J_{\tilde{D}}(\hat{u}_2) \geqslant J_{\tilde{D}}(\hat{u}_1)$. Положим $\tilde{u} = \max\{\hat{u}_1, \hat{u}_2\}$. Тогда

$$J_{D_1}(\tilde{u}) = J_{D_1 \setminus \tilde{D}}(\hat{u}_1) + J_{\tilde{D}}(\hat{u}_2) \geqslant J_{D_1 \setminus \tilde{D}}(\hat{u}_1) + J_{\tilde{D}}(\hat{u}_1) = J_{D_1}(\hat{u}_1).$$

Значит, $\tilde{u} \neq \hat{u}_1$ является точкой минимума функционала J_{D_1}, что противоречит его строгой выпуклости. Если $J_{\tilde{D}}(\hat{u}_2) \leqslant J_{\tilde{D}}(\hat{u}_1)$, то положим $\tilde{u} = \min\{\hat{u}_1, \hat{u}_2\}$. Тогда

$$J_{D_2}(\tilde{u}) = J_{D_2 \setminus \tilde{D}}(\hat{u}_2) + J_{\tilde{D}}(\hat{u}_1) \geqslant J_{D_2 \setminus \tilde{D}}(\hat{u}_2) + J_{\tilde{D}}(\hat{u}_2) = J_{D_2}(\hat{u}_2).$$

Получаем противоречие со строгой выпуклостью функционала J_{D_2}. □

С помощью принципа мажоризации будет доказано существование застойных зон для некоторого класса областей (в частности, для выпуклых областей, имеющих угловую точку с острым углом).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] П.П. Мосолов, В.П. Мясников, “Вариационные методы в теории течений вязкопластической среды” *Прикладная математика и механика*, **29**:3 (1965), 468–492.

[2] H. Brezis, “Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations”. В: Contribution to Non-Linear Functional Analysis. E. Zarantonello, Ed., Acad. Press (1971), 101–156.