Лекции 5–8. Вязкопластические среды: теорема существования, неравенства Корна, устойчивость решений.

1 Теорема существования решения вариационной задачи.

Пусть T — топологическое пространство. Функция $f : T \to \mathbb{R}$ называется полунепрерывной снизу, если для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in T : f(x) \leqslant c\}$ замкнуто.

Упражнение. Доказать, что функция f полунепрерывна снизу тогда и только тогда, когда ее надграфик замкнут в $T \times \mathbb{R}$.

Предложение 1. *Пусть T — топологический компакт, $f : T \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу. Тогда f достигает своего минимального значения.*

Доказательство. Пусть $c_0 = \inf_{x\in T} f(x)$. Тогда

$$\{x \in T : f(x) = c_0\} = \cap_{c>c_0}\{x \in T : f(x) \leqslant c\}$$

непусто, поскольку является пересечением непустых вложенных компактных множеств. $\square$

Определим канонический оператор вложения $i : X \to X^{**}$ равенством $\langle i(x), x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle$, $x \in X$, $x^* \in X^*$. Напомним, что банахово пространство X называется рефлексивным, если оператор i сюръективен. Примерами рефлексивных пространств являются $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $W^1_p(\Omega)$, $\mathring{W}^1_p(\Omega)$ при $1 < p < \infty$.

Напомним также, что слабая топология в пространстве X задается системой окрестностей вида

$$U_{\varepsilon, x_1^*, \dots, x_m^*}(x) = \{y \in X : |x_j^*(y) - x_j^*(x)| < \varepsilon, \ j = 1, \dots, m\}.$$

Следующую теорему мы приведем без доказательства.

Теорема 1.1. *Банахово пространство рефлексивно тогда и только тогда, когда единичный шар в нем слабо компактен.*

Доказательство импликации

$$\text{рефлексивность} \ \Rightarrow \ \text{слабая компактность шара}$$

является следствием теоремы Банаха – Алаоглу.

Пусть X — банахово пространство. Функционал $f : X \to \mathbb{R}$ называется *коэрцитивным*, если $f(x) \to +\infty$ при $\|x\| \to \infty$.

Лемма 1.1. *Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$ выпукло и замкнуто. Тогда M замкнуто в слабой топологии.*

Доказательство. Пусть $x \notin M$. Покажем, что существует окрестность точки x в слабой топологии, не пересекающаяся с M. Действительно, по теореме отделимости, существует функционал $x^* \in X^*$ такой, что $\langle x^*, x\rangle > \sup_{y\in M}\langle x^*, y\rangle =: c$. Множество $\{y \in X : \langle x^*, y\rangle > c\}$ не пересекается с M, содержит точку x и открыто в слабой топологии. $\square$

Теорема 1.2. *Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $f : X \to \mathbb{R}$ — выпуклый непрерывный коэрцитивный функционал. Тогда f достигает своего минимального значения.*

Доказательство. Из коэрцитивности функционала следует, что найдется такое $R > 0$, что $\inf_{x\in X} f(x) = \inf_{\|x\|\leqslant R} f(x)$. Так как пространство X рефлексивно, то единичный шар слабо компактен. Остается доказать, что функционал f полунепрерывен снизу относительно слабой топологии. Для этого покажем, что надграфик f замкнут в $X\times\mathbb{R}$ относительно слабой топологии. В самом деле, так как функционал f является выпуклым и непрерывным, то его надграфик выпуклый и замкнутый, а значит, слабо замкнутый в силу леммы 1.1. $\square$

Приведем без доказательства теорему вложения Соболева (см. лекции предыдущего семестра).

Теорема 1.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$. Тогда $\mathring{W}^1_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ и оператор вложения компактен.*

Теперь мы можем рассмотреть некоторые примеры применения теоремы 1.2.

Пример 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $X = \mathring{W}^1_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$,

$$f(u) = \int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx + \int\limits_\Omega g(x)u(x)\, dx,$$

где $g \in L_{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$, $1 < r < \infty$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{r} - \frac{1}{p} > 0$,

$$|\nabla u|^2 = \sum_{j=1}^{d} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2. \tag{1.1}$$

Из теоремы вложения С.Л. Соболева и неравенства Гельдера следует, что функционал

$$u \mapsto \int\limits_\Omega g(x)u(x)\, dx$$

непрерывен;

$$u \mapsto \int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx$$

— p-я степень нормы пространства X. Тем самым, f удовлетворяет условиям теоремы и достигает минимума.

В задаче о стационарном движении вязкопластической среды функционал J содержит не все производные функции v, а только их комбинации вида $e_{ij}(v)$. В случае, когда функция $\varphi(e)$ при достаточно больших значениях $|e|$ имеет порядок $|e|^p$ и заданы нулевые граничные условия на замкнутом множестве $S \subset \partial\Omega$, в качестве пространства W естественно рассмотреть $W^1_p(\Omega)$, а в качестве подпространства $W_0 \subset W$ на котором минимизируется функционал J, — замыкание множества бесконечно-гладких функций с нулевой дивергенцией, равных нулю в окрестности множества S. В частности, $W_0 \subset \mathring{W}^1_p(\Omega)$. Коэрцитивность функционала J будет вытекать из следующего результата.

Теорема 1.4. (первое неравенство Корна). *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *— ограниченная область,* $1 < p < \infty$. *Тогда существует константа* $C(p)$ *такая, что для любой функции* $u \in \mathring{W}_p^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *выполнено*

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^p \, dx \leqslant C(p) \int\limits_\Omega |e_u(x)|^p \, dx. \tag{1.2}$$

Тем самым, получаем

Пример 2. Пусть

1. $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}_+$ — диссипативный потенциал, при этом найдутся такие $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $R > 0$, что $C_1|e|^p \leqslant \varphi(e) \leqslant C_2|e|^p$ при $|e| \geqslant R$;

2. $g \in L_{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$, $1 < r < \infty$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{r} - \frac{1}{p} > 0$;

3. $X \subset \mathring{W}_p^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ — замкнутое подпространство, $J : X \to \mathbb{R}$,

$$J(u) = \int\limits_\Omega \varphi(e_u(x)) \, dx + \int\limits_\Omega g(x)u(x) \, dx.$$

Тогда функционал J имеет точку минимума на пространстве X. В частности, задача о медленном стационарном движении вязкопластической среды с условиями прилипания к границе разрешима.

Если область имеет липшицеву границу и на "куске" этой границы заданы нулевые условия, то также можно доказать неравенства Корна и тем самым получить теорему существования.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с липшицевой границей, $S \subset \partial\Omega$ непусто и открыто в $\partial\Omega$. Обозначим $W_p^1(\Omega, S, \mathbb{R}^d)$ замыкание по норме пространства $W_p^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ множества бесконечно гладких функций, равных нулю в окрестности S.

Теорема 1.5. (второе неравенство Корна). *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *— ограниченная область с липшицевой границей,* $1 < p < \infty$. *Тогда существует константа* $C(p, \Omega, S)$ *такая, что для любой функции* $u \in W_p^1(\Omega, S, \mathbb{R}^d)$ *выполнено*

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^p \, dx \leqslant C(p, \Omega, S) \int\limits_\Omega |e_u(x)|^p \, dx. \tag{1.3}$$

Для произвольного $p > 1$ неравенства Корна доказаны в работе П.П. Мосолова и В.П. Мясникова [4]. Идея их доказательства такая же, как у теорем вложения Соболева. В следующем параграфе мы изложим доказательство О.А. Олейник и В.А. Кондратьева для случая $p = 2$.

2 Доказательство неравенств Корна при $p = 2$

Заметим, что неравенства достаточно проверить для бесконечно гладких функций. Поэтому всюду далее считаем, что $v \in C^\infty(\Omega)$.

Доказательство первого неравенства Корна. Имеет место тождество

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} e_{ik}(v) + \frac{\partial}{\partial x_k} e_{ij}(v) - \frac{\partial}{\partial x_i} e_{jk}(v), \quad i,\, j,\, k = 1,\, \ldots,\, d. \tag{2.1}$$

В частности,

$$\Delta v_i \equiv \sum_{k=1}^{d} \left(2\frac{\partial}{\partial x_k} e_{ik}(v) - \frac{\partial}{\partial x_i} e_{kk}(v) \right). \tag{2.2}$$

Пусть $v \in C_0^\infty(\Omega,\, \mathbb{R}^3)$. Применяя формулу Стокса и пользуясь симметричностью $e_{ij}(v)$, получаем

$$\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\, dx = -\int\limits_\Omega v_i \Delta v_i\, dx \overset{(2.2)}{=} -2\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k} e_{ik}(v) v_i\, dx + \int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} e_{kk}(v) v_i\, dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega e_{ik}(v) \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\, dx - \int\limits_\Omega e_{kk}(v) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\, dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega e_{ik}(v) e_{ik}(v)\, dx - \int\limits_\Omega e_{kk}(v) e_{ii}(v)\, dx \leqslant 2\int\limits_\Omega e_{ik}(v) e_{ik}(v)\, dx,$$

поскольку во втором слагаемом под интегралом стоит полный квадрат. Последняя величина в цепочке неравенств с точностью до некоторого множителя не превосходит $\int\limits_\Omega |e_v(x)|^2\, dx$. □

Теперь перейдем к доказательству второго неравенства Корна. Сначала докажем два вспомогательных неравенства.

Всюду далее для $x \in \Omega$ будем обозначать

$$\rho(x) = \mathrm{dist}\,(x,\, \partial\Omega) := \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|.$$

Лемма 2.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $\Delta v = 0$ в Ω, $v \in L_2(\Omega)$. Тогда найдется константа $C(d)$ такая, что*

$$\int\limits_\Omega \rho^2(x) |\nabla v(x)|^2\, dx \leqslant C(d) \int\limits_\Omega |v(x)|^2\, dx. \tag{2.3}$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что $|\rho(x) - \rho(y)| \leqslant |x - y|$, поэтому для любого $i = 1,\, \ldots,\, d$

$$\left| \frac{\partial \rho(x)}{\partial x^i} \right| \leqslant 1 \text{ п.в.} \tag{2.4}$$

Обозначим

$$\Omega^\varepsilon = \{x \in \Omega : \rho(x) > \varepsilon\}.$$

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega^\varepsilon)$. Так как функция v гармоническая, то она гладкая внутри области Ω. Значит, по формуле Стокса,

$$0 = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi(x) v(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right) dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \varphi(x) |\nabla v(x)|^2\, dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \varphi(x) v(x) \Delta v(x)\, dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} v(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \varphi(x)|\nabla v(x)|^2\,dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \sum_{i=1}^d \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} v(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx.$$

Пусть теперь φ — липшицева функция с носителем в Ω^ε, φ_h — усреднение по Стеклову – Шварцу[1] функции φ. Тогда при малых h носитель φ_h содержится в $\Omega^{\varepsilon/2}$. Кроме того, функция φ_h бесконечно гладкая,

$$\|\varphi - \varphi_h\|_{C(\Omega)} \underset{h\to 0}{\to} 0, \quad \|\nabla\varphi - \nabla\varphi_h\|_{L_1(\Omega)} \underset{h\to 0}{\to} 0.$$

В силу доказанного,

$$\int\limits_{\Omega^{\varepsilon/2}} \varphi_h(x)|\nabla v(x)|^2\,dx + \int\limits_{\Omega^{\varepsilon/2}} \sum_{i=1}^d \frac{\partial \varphi_h(x)}{\partial x_i} v(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx = 0,$$

так что

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \varphi(x)|\nabla v(x)|^2\,dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \sum_{i=1}^d \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} v(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx = 0.$$

В частности,

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\rho(x)-\varepsilon)^2|\nabla v(x)|^2\,dx = -2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \sum_{i=1}^d (\rho(x)-\varepsilon) \frac{\partial \rho(x)}{\partial x_i} v(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx.$$

Воспользовавшись (2.4) и неравенством $2ab \leqslant \delta a^2 + \delta^{-1}b^2$, $\delta > 0$, получаем

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\rho(x)-\varepsilon)^2|\nabla v(x)|^2\,dx \leqslant A(d)\left(\delta\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\rho(x)-\varepsilon)^2|\nabla v(x)|^2\,dx + \delta^{-1}\int\limits_{\Omega^\varepsilon} v^2(x)\,dx\right)$$

для некоторого $A(d) > 0$. Если $\delta = \frac{1}{2A(d)}$, то

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\rho(x)-\varepsilon)^2|\nabla v(x)|^2\,dx \leqslant C(d)\int\limits_{\Omega^\varepsilon} v^2(x)\,dx,$$

где $C(d) = 4A(d)^2$. Устремив $\varepsilon \to 0$, получим (2.3). $\square$

Лемма 2.2. (неравенство Харди). *Пусть* $\tau > 0$, $\varphi \in C^1[0,\tau]$, $\varphi(0) = 0$. *Тогда*

$$\int\limits_0^\tau \varphi^2(t)\,dt \leqslant 4\int\limits_0^\tau (\tau - t)^2\left|\varphi'(t)\right|^2\,dt. \tag{2.5}$$

Доказательство. Покажем, что разность правой и левой части (2.5) представима в виде полного квадрата:

$$4\int\limits_0^\tau (\tau - t)^2\left|\varphi'(t)\right|^2\,dt - \int\limits_0^\tau \varphi^2(t)\,dt = \int\limits_0^\tau \left(2(\tau-t)\varphi'(t) - \varphi(t)\right)^2\,dt.$$

Действительно, раскрывая скобки в правой части последнего равенства и интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_0^\tau \left(4(\tau-t)^2|\varphi'(t)|^2 - 4(\tau-t)\varphi(t)\varphi'(t) + \varphi^2(t)\right)\,dt =$$

[1]См. курс уравнений с частными производными или лекции предыдущего семестра

$$= \int_0^\tau 4(\tau - t)^2 |\varphi'(t)|^2\, dt - 2\int_0^\tau \varphi^2(t)\, dt + \int_0^\tau \varphi^2(t)\, dt.$$

$\square$

Лемма 2.3. *Пусть* $\Delta = [-1,\, 1]^{d-1}$, $\tilde\Delta = [-2,\, 2]^{d-1}$, *функция* $\tau : \tilde\Delta \to \mathbb{R}_+$ *липшицева с константой* L, $\inf_{z\in\tilde\Delta} \tau(z) = \tau_0 > 0$, $0 < \sigma_0 < \tau_0$,

$$\tilde\Omega = \{(z,\, t) \in \mathbb{R}^d : z \in \tilde\Delta,\ -\sigma_0 \leqslant t \leqslant \tau(z)\},\ \ \Omega = \{(z,\, t) \in \mathbb{R}^d : z \in \Delta,\ 0 \leqslant t \leqslant \tau(z)\}, \tag{2.6}$$

$$E = \{(z,\, t) \in \mathbb{R}^d : z \in \Delta,\ 0 \leqslant t \leqslant \sigma_0\}, \tag{2.7}$$

$\rho(z,\, t)$ — *расстояние от точки* $(z,\, t) \in \Omega$ *до* $\partial\tilde\Omega$. *Тогда найдутся константы* $C_1 = C_1(L,\, \sigma_0,\, \tau_0,\, d)$, $C_2 = C_2(L,\, \sigma_0,\, \tau_0,\, d)$ *такие, что для любой функции* $f \in C^\infty(\Omega)$ *выполнено*[2]

$$\int_\Omega f^2(z,\, t)\, dz\, dt \leqslant C_1 \int_E f^2(z,\, t)\, dz\, dt + C_2 \int_\Omega |\nabla f(z,\, t)|^2 \rho^2(z,\, t)\, dz\, dt. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $\sigma \in [0,\, \sigma_0]$. Положим $h_\sigma(z,\, t) = f(z,\, t) - f(z,\, \sigma)$, $\Omega_\sigma = \{(z,\, t) \in \Omega : t \geqslant \sigma\}$. Применяя неравенство Харди, получаем

$$\int_{\Omega_\sigma} f^2(z,\, t)\, dz\, dt = \int_{\Omega_\sigma} (f(z,\, \sigma) + h_\sigma(z,\, t))^2\, dz\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_\Delta dz \int_\sigma^{\tau(z)} f^2(z,\, \sigma)\, dt + 2\int_\Delta dz \int_\sigma^{\tau(z)} h_\sigma^2(z,\, t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M_1(L,\, \sigma_0,\, \tau_0) \int_\Delta f^2(z,\, \sigma)\, dz + 8\int_\Delta dz \int_\sigma^{\tau(z)} (\tau(z) - t)^2 \left|\frac{\partial h_\sigma(z,\, t)}{\partial t}\right|^2 dt =$$

$$= M_1(L,\, \sigma_0,\, \tau_0) \int_\Delta f^2(z,\, \sigma)\, dz + 8\int_\Omega (\tau(z) - t)^2 \left|\frac{\partial f(z,\, t)}{\partial t}\right|^2 dz\, dt.$$

Отсюда

$$\sigma_0 \int_\Omega f^2(z,\, t)\, dz\, dt \leqslant \sigma_0 \int_E f^2(z,\, t)\, dz\, dt + \int_0^{\sigma_0} \int_{\Omega_\sigma} f^2(z,\, t)\, dz\, dt\, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant M_2(L,\, \sigma_0,\, \tau_0) \int_E f^2(z,\, t)\, dz\, dt + 8\sigma_0 \int_\Omega (\tau(z) - t)^2 \left|\frac{\partial f(z,\, t)}{\partial t}\right|^2 dz\, dt.$$

Так как функция τ липшицева с константой L, то найдется константа $M_3(\sigma_0,\, \tau_0,\, L,\, d)$ такая, что для любого $(z,\, t) \in \Omega$ выполнено $\tau(z) - t \leqslant M_3(\sigma_0,\, \tau_0,\, L,\, d)\rho(z,\, t)$. Отсюда получаем (2.8). $\square$

[2] Множество $C^\infty(\Omega)$ определяется как $\{f|_\Omega : f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)\}$.

Следствие 2.1. *Пусть область D звездна относительно шара B. Тогда найдутся такие константы $C_1(D,\, B)$ и $C_2(D,\, B)$, что*

$$\int\limits_D f^2(x)\,dx \leqslant C_1(D,\, B)\int\limits_B f^2(x)\,dx + C_2(D,\, B)\int\limits_D |\nabla f(x)|^2\rho^2(x)\,dx. \qquad (2.9)$$

Доказательство. Множество $D\backslash B$ можно покрыть конечным числом областей D_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, для которых найдутся области $\tilde{D}_i$, $\tilde{\Omega}_i$ и биекции $\psi_i : \tilde{D}_i \to \tilde{\Omega}_i$ со следующими свойствами:

- $D_i \subset \tilde{D}_i \subset \Omega$;
- ψ_i является композицией сдвига, поворота и гомотетии;
- $\tilde{\Omega}_i$ и $\Omega_i := \psi_i(D_i)$ задаются формулами вида (2.6) с некоторыми $\sigma_0 = \sigma_{0,i}$, $\tau(\cdot) = \tau_i(\cdot)$;
- пусть $E = E_i \subset \Omega_i$ задается формулой (2.7); тогда $\psi_i^{-1}(E_i) \subset B$.

Остается применить лемму 2.3. □

Лемма 2.4. *Пусть область D звездна относительно шара B. Тогда найдутся такие константы $C_3(D,\, B)$ и $C_4(D,\, B)$, что для любой функции $v \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ выполнено*

$$\int\limits_D |\nabla v(x)|^2\,dx \leqslant C_3(D,\, B)\int\limits_B |\nabla v(x)|^2\,dx + C_4(D,\, B)\int\limits_D |e_v(x)|^2\,dx. \qquad (2.10)$$

Доказательство. Воспользуемся тождеством (2.2). Пусть $w = (w_1,\, \dots,\, w_n)$ — решение уравнений

$$\Delta w_i = \sum_{k=1}^n \left(2\frac{\partial}{\partial x_k}e_{ik}(v) - \frac{\partial}{\partial x_i}e_{kk}(v)\right) \qquad (2.11)$$

с граничными условиями $w_i|_{\partial D} = 0$. Положим $z = v - w$. Из (2.11) и (2.2) следует, что

$$\Delta z_i = 0 \text{ в } D,\ \ z_i \in C^\infty(D),\ \ i = 1,\, \dots,\, d, \qquad (2.12)$$

$$\Delta e_{ij}(z) = 0 \text{ в } D, i,\, j = 1,\, \dots,\, d. \qquad (2.13)$$

Оценим отдельно $\int\limits_D |\nabla w|^2\,dx$ и $\int\limits_D |\nabla z|^2\,dx$. Отсюда будет следовать оценка величины $\int\limits_D |\nabla v|^2\,dx$.

Применив (2.11), формулу Стокса и неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\int\limits_D |\nabla w|^2\,dx = -\int\limits_D \Delta w_i \cdot w_i\,dx = 2\int\limits_D \frac{\partial e_{ik}(v)}{\partial x_k}w_i\,dx - \int\limits_D \frac{\partial e_{kk}(v)}{\partial x_i}w_i\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_D \left|e_{ik}(v)\frac{\partial w_i}{\partial x_k}\right|\,dx + \int\limits_D \left|e_{kk}(v)\frac{\partial w_i}{\partial x_i}\right|\,dx \leqslant M_1(d)\left(\int\limits_D |\nabla w(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_D |e_v(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

поэтому

$$\int\limits_D |\nabla w(x)|^2\,dx \leqslant M_2(d)\int\limits_D |e_v(x)|^2\,dx. \tag{2.14}$$

Теперь получим оценку

$$\int\limits_D |\nabla z|^2\,dx \leqslant M_3(D,\,B)\int\limits_D |e_v(x)|^2\,dx + M_4(D,\,B)\int\limits_B |\nabla v|^2\,dx. \tag{2.15}$$

Отсюда и из (2.14) будет следовать утверждение теоремы.

Применив следствие 2.1 к функции $f(x) = \frac{\partial z_i}{\partial x_j}(x)$, получаем, что

$$\int\limits_D |\nabla z|^2\,dx \leqslant M_5(D,\,B)\int\limits_B |\nabla z|^2\,dx + M_6(D,\,B)\int\limits_D \rho^2(x)\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha z|^2\,dx.$$

Оценим первое слагаемое:

$$\int\limits_B |\nabla z|^2\,dx \leqslant 2\int\limits_B |\nabla v|^2\,dx + 2\int\limits_D |\nabla w|^2\,dx \overset{(2.14)}{\leqslant} 2\int\limits_B |\nabla v|^2\,dx + 2M_2(d)\int\limits_D |e_v(x)|^2\,dx.$$

Оценим второе слагаемое:

$$\int\limits_D \rho^2(x)\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha z|^2\,dx \overset{(2.1)}{\leqslant} M_7(d)\sum_{i,j=1}^{d}\int\limits_D \rho^2(x)|\nabla e_{ij}(z)|^2\,dx \overset{(2.3),(2.13)}{\leqslant}$$

$$\leqslant M_8(d)\sum_{i,j=1}^{d}\int\limits_D |e_{ij}(z)|^2\,dx \leqslant M_9(d)\sum_{i,j=1}^{d}\left(\int\limits_D |e_{ij}(v)|^2\,dx + \int\limits_D |e_{ij}(w)|^2\,dx\right) \leqslant$$

$$\leqslant M_{10}(d)\int\limits_D |e_v(x)|^2\,dx + M_{11}(d)\sum_{i=1}^{d}\int\limits_D |\nabla w_i|^2\,dx \overset{(2.14)}{\leqslant} M_{12}(d)\int\limits_D |e_v(x)|^2\,dx.$$

Неравенство (2.15) доказано. □

Доказательство второго неравенства Корна. Для $\delta > 0$ обозначим

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}\,(x,\,\partial\Omega) \leqslant \delta\}.$$

Существуют $\delta > 0$ и конечное множество областей G_i, звездных относительно шаров B_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, для которых выполнены следующие свойства:

1. $\Omega \subset \Omega_\delta \cup (\cup_{i=0}^{m} G_i)$, $G_i \subset \Omega$ при $1 \leqslant i \leqslant m$;

2. $G_0 \cap \partial\Omega \subset S$, $G_0 \cap \Omega_\delta \neq \varnothing$, $B_0 \subset G_0\backslash\Omega$;

3. $B_i \subset \Omega_\delta$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Продолжим функцию v нулем на множество $G_0\backslash\Omega$. Применяя лемму 2.4, получаем, что

$$\int\limits_{G_0\cap\Omega} |\nabla v(x)|^2\,dx \leqslant C_0\int\limits_{G_0\cap\Omega} |e_v(x)|^2\,dx, \tag{2.16}$$

$$\int\limits_{G_i} |\nabla v(x)|^2\,dx \leqslant C_i \int\limits_{G_i} |e_v(x)|^2\,dx + \tilde{C}_i \int\limits_{\Omega_\delta} |\nabla v(x)|^2\,dx, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Остается оценить величину $\int\limits_{\Omega_\delta} |\nabla v(x)|^2\,dx$. Пусть $\{D_i\}_{i=0}^k$ — покрытие Ω_δ открытыми шарами, $D_i \subset \Omega$, $D_0 \cap G_0 \neq \varnothing$. Тогда существует шар $\hat{B} \subset D_0 \cap G_0$. По лемме 2.4,

$$\int\limits_{D_0} |\nabla v(x)|^2\,dx \leqslant M_0 \int\limits_{D_0} |e_v(x)|^2\,dx + M_0' \int\limits_{\hat{B}} |\nabla v(x)|^2\,dx \overset{(2.16)}{\leqslant} M_0'' \int\limits_{D_0 \cup (G_0 \cap \Omega)} |e_v(x)|^2\,dx.$$

Для $j \in \mathbb{Z}_+$ по индукции определим множества индексов I_j. Положим $I_0 = \{0\}$,

$$I_{j+1} = \{i = 1,\, \ldots,\, k : i \notin I_0 \cup \cdots \cup I_j, \;\; \exists l \in I_j : D_i \cap D_l \neq \varnothing\}.$$

Пусть доказана оценка

$$\int\limits_{D_i} |\nabla v(x)|^2\,dx \leqslant M_j \int\limits_{E_j} |e_v(x)|^2\,dx, \quad i \in I_j, \tag{2.17}$$

где $E_j = (G_0 \cap \Omega) \cup \big(\cup_{l \in I_0 \cup \cdots \cup I_j} D_l\big)$. Покажем, что такая же оценка выполнена для $i \in I_{j+1}$. В самом деле, найдется такое $l \in I_j$, что $D_i \cap D_l \neq \varnothing$. Выберем шар $D_{il} \subset D_i \cap D_l$. По лемме 2.4, существуют такие $M,\, M' > 0$, что

$$\int\limits_{D_i} |\nabla v(x)|^2\,dx \leqslant M \int\limits_{D_i} |e_v(x)|^2\,dx + M' \int\limits_{D_{il}} |\nabla v(x)|^2\,dx \overset{(2.17)}{\leqslant} M_{j+1} \int\limits_{E_{j+1}} |e_v(x)|^2\,dx.$$

□

3 Близость реологических моделей

Вид функции φ (диссипативного потенциала) находится для каждого материала экспериментально. Поэтому она задана только приближенно, и возникает вопрос об устойчивости решения задачи

$$J(u) := \int\limits_{\Omega} \varphi(e(u))\,dx - \int\limits_{\Omega} fu\,dx - \int\limits_{\partial\Omega} Pu\,ds \to \inf \tag{3.1}$$

при малых возмущениях функции φ.

Под “близостью” диссипативных потенциалов φ_1, φ_2 мы будем понимать следующее соотношение:

$$|\varphi_1(e) - \varphi_2(e)| \leqslant \varepsilon + \delta \max\{\varphi_1(e),\, \varphi_2(e)\} \quad \text{для всех } e, \tag{3.2}$$

δ, ε — малые числа. При некоторых условиях на φ_j будет получена оценка на разность решений в зависимости от ε, δ.

Назовем непрерывный функционал $J(u)$ *сильно выпуклым*, если существует непрерывная, положительная при $\mu > 0$ функция $\mathcal{E}(\mu,\, c)$ такая, что

$$J\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} J(u_1) + \frac{1}{2} J(u_2) - \mathcal{E}(\|u_1 - u_2\|,\, c), \text{ если } \|u_1\|,\; \|u_2\| \leqslant c. \tag{3.3}$$

Приведем некоторые свойства сильно выпуклых функционалов:

1. если J сильно выпуклый, то он строго выпуклый, т.е. $J(\lambda u+(1-\lambda)v) < \lambda J(u)+(1-\lambda)J(v)$ при $u \neq v$, $\lambda \in (0,\,1)$;

2. если J_1 сильно выпуклый, J_2 выпуклый, то $J_1 + J_2$ сильно выпуклый.

Теорема 3.1. *Пусть диссипативным потенциалам φ_1, φ_2, удовлетворяющим (3.2), соответствуют функционалы $J_1(u)$, $J_2(u)$. При этом, J_1 сильно выпуклый и для него выполнено (3.3) с функцией $\mathcal{E}$. Пусть u_1, u_2 — точки минимума функционалов J_1 и J_2 соответственно, $\|u_1\| \leqslant c$, $\|u_2\| \leqslant c$. Тогда выполнена оценка*

$$\mathcal{E}(\|u_1-u_2\|,\,c) \leqslant 2\varepsilon|\Omega| + \delta\left[\int\limits_\Omega \max\{\varphi_1(e_{u_1}),\,\varphi_2(e_{u_1})\}\,dx + \int\limits_\Omega \max\{\varphi_1(e_{u_2}),\,\varphi_2(e_{u_2})\}\,dx\right]. \tag{3.4}$$

Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 2. *Пусть $J(u)$ — сильно выпуклый функционал, u_0 — его точка минимума, $\|u_0\| \leqslant c$, $\|u\| \leqslant c$. Тогда*

$$\mathcal{E}(\|u-u_0\|,\,c) \leqslant J(u) - J(u_0).$$

Доказательство. Так как u_0 — точка минимума, то

$$\frac{3}{2}J(u_0) \leqslant \frac{1}{2}J(u) + J\left(\frac{u+u_0}{2}\right).$$

Отсюда и из определения сильной выпуклости получаем

$$\mathcal{E}(\|u-u_0\|,\,c) \leqslant \frac{1}{2}J(u) + \frac{1}{2}J(u_0) - J\left(\frac{u+u_0}{2}\right) \leqslant J(u) - J(u_0).$$

□

Следствие 3.1. *Если функционал J сильно выпуклый, то его точка минимума единственна.*[3]

Доказательство теоремы 3.1. Из предположений теоремы следует, что для $i = 1,\,2$

$$|J_1(u_i) - J_2(u_i)| \leqslant \int\limits_\Omega |\varphi_1(e_{u_i}) - \varphi_2(e_{u_i})|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon|\Omega| + \delta\int\limits_\Omega \max\{\varphi_1(e_{u_i}),\,\varphi_2(e_{u_i})\}\,dx.$$

Из предложения 2 получаем, что

$$\mathcal{E}(\|u_1-u_2\|,\,c) \leqslant J_1(u_2) - J_1(u_1) \leqslant J_1(u_2) - J_2(u_2) + J_2(u_1) - J_1(u_1),$$

откуда следует (3.4). □

[3]Это утверждение также следует из строгой выпуклости J.

Часто в теории вязкопластических сред функция φ и пространство, в котором ищется решение, таковы, что

$$\int\limits_\Omega \varphi(e(u))\,dx \geqslant \beta\|u\|^\alpha,$$

где $\beta > 0$, $\alpha > 1$ не зависят от u. Предполагается, что линейная часть $L(u)$ функционала $J(u)$ непрерывна по u. В этом случае можно получить оценку на константу c из теоремы 3.1. В самом деле, заметим, что $J(0) = 0$. Если u_0 — точка минимума функционала J, то $J(u_0) \leqslant J(0) = 0$, откуда

$$\beta\|u_0\|^\alpha \leqslant \int\limits_\Omega \varphi(e(u_0))\,dx \leqslant |L(u_0)| \leqslant \|L\|\cdot\|u_0\|.$$

Значит,

$$\|u_0\| \leqslant \left(\frac{\|L\|}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Теперь приведем некоторые примеры сильно выпуклых функционалов.

Пример 1. Пусть H — гильбертово пространство, $J(u) = \|u\|^2$. В силу тождества параллелограмма

$$\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 = \frac{1}{2}\|u_1+u_2\|^2 + \frac{1}{2}\|u_1-u_2\|^2,$$

этот функционал сильно выпуклый и $\mathcal{E}(\mu,\,c) = \frac{1}{4}\mu^2$.

Пример 2. Из свойства 2 сильной выпуклости следует, что при $\nu > 0$, $\tau \geqslant 0$ функционал

$$J(u) = \int\limits_\Omega (\nu|e_u|^2 + \tau|e_u|)\,dx - \int\limits_\Omega fu\,dx - \int\limits_{\partial\Omega} Pu\,ds$$

является сильно выпуклым на пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$.

Пример 3. Имеет место *неравенство Кларксона*: если $(H,\,|\cdot|)$ — евклидово пространство, $u_1,\,u_2 : \Omega \to H$, $2 \leqslant p < \infty$, то

$$\int\limits_\Omega \left|\frac{u_1+u_2}{2}\right|^p dx + \int\limits_\Omega \left|\frac{u_1-u_2}{2}\right|^p dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (|u_1|^p + |u_2|^p)\,dx.$$

В самом деле, из неравенства $(|u|^\alpha + |v|^\alpha)^{1/\alpha} \leqslant (|u|^\beta + |v|^\beta)^{1/\beta}$, $0 < \beta < \alpha < \infty$, тождества параллелограмма и неравенства Гельдера получаем, что при фиксированном $x \in \Omega$

$$\left|\frac{u_1(x)+u_2(x)}{2}\right|^p + \left|\frac{u_1(x)-u_2(x)}{2}\right|^p \leqslant \left(\left|\frac{u_1(x)+u_2(x)}{2}\right|^2 + \left|\frac{u_1(x)-u_2(x)}{2}\right|^2\right)^{p/2} =$$

$$= \left(\frac{|u_1(x)|^2}{2} + \frac{|u_2(x)|^2}{2}\right)^{p/2} \leqslant \frac{1}{2}(|u_1(x)|^p + |u_2(x)|^p).$$

Остается проинтегрировать полученное неравенство по Ω.

Из неравенства Кларксона следует, что функционал

$$u \mapsto \int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx$$

при $p \geqslant 2$ сильно выпуклый и $\mathcal{E}(\mu,\, c) = \mu^p/2^p$. Оказывается, при $1 < p < 2$ и $H = \mathbb{R}$ этот функционал также сильно выпуклый и

$$\mathcal{E}(\mu,\, c) = c^{\frac{p-2}{p-1}} \left(\left[\frac{1}{p-1} \right] + 1 \right)^{-1} \mu^{\frac{p}{p-1}}$$

(см. [1], [6]); здесь квадратные скобки обозначают целую часть.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] П.П. Мосолов, В.П. Мясников, “Механика жесткопластических сред”. М.: Наука, 1981.

[2] Л.В. Канторович, Г.П. Акилов, *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1984.

[3] M. Fuchs, G. Seregin, *Variation Methods for Problems from Plasticity Theory and for Generalized Newtonian Fluids.* Springer, 2000.

[4] П.П. Мосолов, В.П. Мясников, “О корректности краевых задач в механике сплошных сред”, *Мат. сборник*, **88(130)**:2(6) (1972), 256–267.

[5] O.A. Oleinik, V.A. Kondratiev, “On Korn’s inequalities”, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.*, **308**:16 (1989), 483–487.

[6] П.П. Мосолов, В.П. Мясников, “Вариационные методы в теории течений жестко-вязкопластических сред”. М.: Изд-во МГУ, 1971.

[7] С.Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Изд. Ленингр. ун-та, 1950.