Лекция 10. Существование и некоторые свойства решения изопериметрической задачи.

В прошлый раз было установлено, что задача об определении величины предельной нагрузки сводится к нахождению значения $\inf_{\tilde{D}\subset D}\frac{|\partial\tilde{D}|}{|\tilde{D}|}$. При этом, если область p-связна, то инфинум достаточно брать по множеству k-связных областей, $k\leqslant p$.

Лемма 1. *Пусть D — p-связная область, $K=\sup_{\tilde{D}\subset D}\frac{|\tilde{D}|}{|\partial\tilde{D}|}$, d — радиус круга, вписанного в область D. Тогда*

$$\frac{d}{2}\leqslant K\leqslant 8pd.$$

Доказательство. Для доказательства нижней оценки берем в качестве $\tilde{D}$ вписанный круг.

Докажем верхнюю оценку. Пусть $q\in\overline{1,\,p}$, $\tilde{D}\subset D$ — q-связная область со спрямляемой границей. Тогда $\tilde{D}=D_0\backslash\left(\cup_{i=1}^{q-1}E_i\right)$, где D_0 — односвязная область, E_i — замкнутые связные множества такие, что ∂E_i — образы спрямляемых кривых.

Разобьем плоскость на замкнутые квадраты Q_j ($j\in\mathbb{N}$) со стороной $4d$, их центры обозначим a_j. Возможны два случая.

1. Существует прямоугольник Π, являющийся объединением квадратов Q_j, одна сторона которого не превосходит $8qd$, такой, что $\tilde{D}+x_0\subset\Pi$ для некоторого $x_0\in\mathbb{R}^2$. Рассмотрим проекцию $\tilde{D}+x_0$ другую сторону Π. Это связное подмножество отрезка, то есть промежуток. Пусть t — его длина. Тогда $|\tilde{D}|\leqslant 8qd\cdot t$, $|\partial\tilde{D}|\geqslant 2t$ и $\frac{|\tilde{D}|}{|\partial\tilde{D}|}\leqslant 4qd$.

2. Пусть условие пункта 1 не выполнено. Без ограничения общности можно считать, что длина проекции $\tilde{D}$ на ось абсцисс больше $8qd$. Положим

$$J=\{j\in\mathbb{N}:\tilde{D}\cap Q_j\neq\varnothing\}.$$

Тогда $J=J_0\sqcup J_1\sqcup J_2$, где

$$J_0=\{j\in J:\ \exists i\in\overline{1,\,q-1}:E_i\subset Q_j\},$$

$$J_1=\{j\in J\backslash J_0:a_j\in\tilde{D}\},\quad J_2=\{j\in J\backslash J_0:a_j\notin\tilde{D}\}.$$

Обозначим $k_i=\operatorname{card}J_i$, $i=0,\,1,\,2$. Тогда $k_0\leqslant q-1$. Докажем, что сделав сдвиг области по оси ординат, можно добиться того, что $k_1\geqslant 1$. В самом деле, пусть

$$I_1=\{i\in\overline{1,\,q-1}:\ \exists x\in\mathbb{R}^2:\ E_i+x\subset Q_1\},$$

$I_2=\{1,\,\ldots,\,q{-}1\}\backslash I_1$ (то есть $i\in I_1$, если сдвиг E_i можно поместить в квадрат со стороной $4d$). Пусть $\Pi\supset\tilde{D}$ — прямоугольник, $\Pi=\cup_{l=1}^m\Pi_l$, Π_l — прямоугольники с попарно не перекрывающимися проекциями на ось абсцисс, имеющими длину

$4d$, и пусть $\Pi_l \cap \tilde{D} \neq \varnothing$, $1 \leqslant l \leqslant m$. Тогда $m > 2q$. Если $i \in I_1$, то $\operatorname{int} E_i$ пересекается с не более, чем двумя прямоугольниками Π_l. Значит, найдется l такое, что прямоугольник Π_l (и любой его сдвиг по оси ординат) не перекрывается с E_i, $i \in I_1$. Сделав сдвиг области $\tilde{D}$ по оси ординат, можем добиться того, что $a_j \in \tilde{D}$ для некоторого j. Если $(\operatorname{int} E_i) \cap Q_j \neq \varnothing$, то $i \in I_2$ и поэтому $E_i \not\subset Q_j$. Значит, $j \in J_1$ и $k_1 \geqslant 1$.

Для $j \in J_0 \cup J_1$ площадь $\tilde{D} \cap Q_j$ оценим величиной $16d^2$. Пусть $j \in J_2$, r_j — максимальная длина стороны квадрата $\tilde{Q}_j$ с центром в точке a_j, не пересекающегося с $\tilde{D}$. Тогда $|\tilde{D} \cap Q_j| \leqslant 16d^2 - r_j^2$.

Для $j \in J_1 \cup J_2$ оценим снизу величину $|(\partial\tilde{D}) \cap Q_j|$. Так как $E_i \not\subset Q_j$, $0 \leqslant i \leqslant q-1$, то любая связная компонента множества $(\partial\tilde{D}) \cap Q_j$ имеет по крайней мере две точки пересечения с границей Q_j (эти точки могут совпадать, но соответствуют разным значениям параметра кривой).

Пусть $j \in J_1$. Поскольку в область $\tilde{D}$ нельзя вписать круг с радиусом, большим d, то найдется точка $b \in \partial\tilde{D}$ такая, что $|a_j - b| \leqslant d$. Обозначим через Γ связную компоненту $\partial\tilde{D}$, содержащую b, c_1, c_2 — точки ее пересечения с границей Q_j. Тогда

$$|(\partial\tilde{D}) \cap Q_j| \geqslant |b - c_1| + |b - c_2| \geqslant$$
$$\geqslant |a_j - c_1| - |a_j - b| + |a_j - c_2| - |a_j - b| \geqslant 2d - d + 2d - d = 2d.$$

Пусть $j \in J_2$. Рассмотрим точку $b \in (\partial\tilde{D}) \cap (\partial\tilde{Q}_j)$. Пусть Γ — связная компонента $\partial\tilde{D}$, содержащая b, c_1, c_2 — точки ее пересечения с границей Q_j. Тогда

$$|(\partial\tilde{D}) \cap Q_j| \geqslant |b - c_1| + |b - c_2| \geqslant 2d - \frac{r_j}{2} + 2d - \frac{r_j}{2} = 4d - r_j.$$

Тем самым,

$$\frac{|\tilde{D}|}{|\partial\tilde{D}|} \leqslant \frac{16(q-1)d^2 + 16k_1 d^2 + \sum\limits_{j=1}^{k_2}(16d^2 - r_j^2)}{2k_1 d + \sum\limits_{j=1}^{k_2}(4d - r_j)}.$$

Покажем, что эта величина не превосходит $8qd$. В самом деле, поскольку $q \geqslant 1$, $k_1 \geqslant 1$, то для доказательства неравенства

$$16(q-1)d^2 + 16k_1 d^2 + \sum_{j=1}^{k_2}(16d^2 - r_j^2) \leqslant 16k_1 q d^2 + 8qd\sum_{j=1}^{k_2}(4d - r_j)$$

достаточно проверить, что

$$\sum_{j=1}^{k_2}(16d^2 - r_j^2) \leqslant 8d\sum_{j=1}^{k_2}(4d - r_j).$$

Последнее условие равносильно $\sum\limits_{j=1}^{k_2}(16d^2 - 8dr_j + r_j^2) \geqslant 0$. Полученное неравенство верно, так как слева стоит сумма полных квадратов. □

Докажем существование области $\hat{D} \subset D$, на которой достигается минимум $\frac{|\partial\tilde{D}|}{|\tilde{D}|}$ (мы приведем схему доказательства).

Теорема 1. *Пусть $p \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная p-связная область. Тогда существует область $\hat{D} \subset D$ такая, что*

$$\frac{|\partial \hat{D}|}{|\hat{D}|} = \inf_{\tilde{D} \subset D} \frac{|\partial \tilde{D}|}{|\tilde{D}|}.$$

Доказательство. Как уже говорилось, инфинум достаточно брать по k-связным подобластям, где $k \leqslant p$. Более того, достаточно рассматривать только p-связные подобласти (если $\tilde{D} \subset D$ является k-связной с $k < p$, то из $\tilde{D}$ удаляем $p - k$ точек, что не изменит ни площадь, ни длину границы).

Шаг 1. Пусть $C = \inf_{\tilde{D} \subset D} \frac{|\partial \tilde{D}|}{|\tilde{D}|}$. Если $\tilde{D} \subset D$ и $\frac{|\partial \tilde{D}|}{|\tilde{D}|} \leqslant C + 1$, то $|\partial \tilde{D}| \leqslant (C+1)|D|$. Поэтому достаточно брать инфинум только по тем подобластям, для которых $|\partial \tilde{D}| \leqslant (C+1)|D|$.

Шаг 2. Рассмотрим множество $\Gamma = \Gamma^D$, состоящее из наборов p замкнутых кривых, образы которых лежат в замыкании $\overline{D}$ области D.[1] Введем на нем метрику следующим образом. Пусть $\overline{\gamma} = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{p-1})$, γ_j — кривые. Обозначим $C_{\overline{\gamma}}$ множество непрерывных отображений $\overline{r} : [0, 1] \to \overline{D}^p$, $\overline{r}(t) = (r_0(t), \ldots, r_{p-1}(t))$, таких, что r_j является одной из эквивалентных параметризаций кривой γ_j. Пусть $\overline{\gamma}, \overline{g} \in \Gamma$. Положим

$$d(\overline{\gamma}, \overline{g}) = \inf_{r_\gamma \in C_{\overline{\gamma}}, r_g \in C_{\overline{g}}} \|r_\gamma - r_g\|_{C[0,1]}.$$

Заметим, что если $\tau : [0, 1] \to [0, 1]$ — строго возрастающее непрерывное отображение, то

$$\|r_\gamma - r_g\|_{C[0,1]} = \|r_\gamma \circ \tau - r_g \circ \tau\|_{C[0,1]}. \tag{1}$$

Отсюда легко вывести неравенство треугольника для d. Далее, можно показать, что d — метрика.[2]

Покажем, что (Γ, d) является полным метрическим пространством. Пусть $\{\overline{\gamma}^n\}$ — фундаментальная последовательность. Переходя к подпоследовательностям, можем считать, что $d(\overline{\gamma}^n, \overline{\gamma}^{n-1}) \leqslant 2^{-n}$. Поэтому найдутся параметризации $r^n_{\gamma^n}$, $r^n_{\gamma^{n-1}}$ такие, что $\|r^n_{\gamma^n} - r^n_{\gamma^{n-1}}\|_{C[0,1]} \leqslant 2^{-n+1}$. Пользуясь (1) и проводя индукцию по n, находим параметризации $\tilde{r}_n$ кривых $\overline{\gamma}^n$ такие, что $\|\tilde{r}_n - \tilde{r}_{n-1}\|_{C[0,1]} \leqslant 2^{-n+1}$. Из полноты пространства непрерывных функций и замкнутости $\overline{D}$ следует, что $\{r_n\}$ сходится к параметризации некоторого набора p кривых с образами в $\overline{D}$.

Докажем, что множество

$$\Gamma_l = \{\overline{\gamma} = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{p-1}) \in \Gamma : |\overline{\gamma}| := \sum_{j=0}^{p-1} |\gamma_j| \leqslant l\}$$

замкнуто. В самом деле, пусть $\overline{\gamma}^n \to \overline{\gamma}$ по метрике d, $|\overline{\gamma}^n| \leqslant l$. Тогда существуют параметризации $r_\gamma = (r_j)_{j=0}^{p-1}$, $r_{\gamma^n} = (r^n_j)_{j=0}^{p-1}$ наборов кривых $\overline{\gamma}$ и $\overline{\gamma}^n$ соответственно, такие, что

$$\|r_\gamma - r_{\gamma^n}\|_{C[0,1]} \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{2}$$

[1] Напомним, что кривая — это класс эквивалентности параметризаций, а образ кривой — это образ отображения, задающего параметризацию кривой.

[2] То, что d — полуметрика, сразу следует из определения; для доказательства импликации $d(\overline{\gamma}, \overline{g}) = 0 \Rightarrow \overline{\gamma} = \overline{g}$ проводятся некоторые дополнительные технические рассуждения с монотонными функциями.

Возьмем произвольный набор ломаных $\tilde{r}_j$, $0 \leqslant j \leqslant p-1$, с узлами в точках $t_i \in [0,\,1]$, $0 \leqslant i \leqslant m$, такой, что $\tilde{r}_j(t_i) = r_j(t_i)$, и покажем, что

$$\sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=1}^{m} |r_j(t_i) - r_j(t_{i-1})| \leqslant l. \tag{3}$$

В самом деле, из определения длины кривой следует, что $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \sum\limits_{i=1}^{m} |r_j^n(t_i) - r_j^n(t_{i-1})| \leqslant l$; в силу (2), для любого $i \in \overline{0,\,m}$

$$|r_j^n(t_i) - r_j^n(t_{i-1})| \underset{n\to\infty}{\to} |r_j(t_i) - r_j(t_{i-1})|.$$

Из (3) и определения длины кривой получаем, что $|\overline{\gamma}| \leqslant l$.

Докажем, что множество Γ_l предкомпактно. Для каждого $\varepsilon > 0$ построим конечную ε-сеть.[3] Пусть $\delta \in (0,\,\varepsilon/4)$ — достаточно малое число, $N = \left[\frac{l}{\delta}\right] + 1$. Возьмем произвольный набор p кривых $\overline{\gamma} \in \Gamma_l$, для каждой кривой γ_j выберем параметризацию r_j^{γ}, пропорциональную натуральной. Пусть $0 \leqslant j \leqslant p-1$, r_j^g — параметризация ломаной g_j, $r_j^g\left(\frac{i}{N}\right) = r_j^{\gamma}\left(\frac{i}{N}\right)$, $0 \leqslant i \leqslant N$, $r_j^g|_{\left[\frac{i-1}{N},\,\frac{i}{N}\right]}$ — аффинные вектор-функции. Обозначим $\overline{g} = (g_j)_{j=0}^{p-1}$. Тогда $d(\overline{\gamma},\,\overline{g}) \leqslant 2\delta$. При этом, $|\overline{g}| \leqslant l$. Итак, осталось показать, что множество наборов p ломаных, каждая из которых имеет не более N звеньев, имеет конечную $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть. Для этого берем конечную δ-сеть в D (обозначим ее через M_δ) и рассмотрим множество наборов ломаных, у которых значения в узлах принадлежат M_δ и число звеньев не превосходит N. Это множество конечно и при малых δ оно является искомой $\frac{\varepsilon}{2}$-сетью.

Шаг 3. Пусть $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность p-связных подобластей в D такая, что $\frac{|\partial D_n|}{|D_n|} \to C$ при $n \to \infty$. Обозначим через $\overline{\gamma}^n = (\gamma_j^n)_{j=0}^{p-1}$ наборы из p кривых, параметризующих границу D_n. Пользуясь компактностью $\Gamma_{(C+1)|D|}$ переходя к подпоследовательностям, можно считать, что $\overline{\gamma}^n \to \overline{\gamma} \in \Gamma_{(C+1)|D|}$ в метрике d и что $|\overline{\gamma}^n| \underset{n\to\infty}{\to} l_0$ для некоторого $l_0 \in [0,\,(C+1)|D|]$. В силу леммы 1, D_n содержит круг радиуса $\frac{1}{8p(C+1)}$, поэтому $|D_n|$ отделены от нуля. Так как область D ограничена, то снова из леммы 1 следует, что значения $|\overline{\gamma}^n|$ отделены от нуля и поэтому $l_0 > 0$.

Для каждого $n,\,k \in \mathbb{N}$ обозначим через $E_{n,k}$ объединение квадратов

$$Q_{ij} = \left[\frac{i-1}{2^k},\,\frac{i}{2^k}\right] \times \left[\frac{j-1}{2^k},\,\frac{j}{2^k}\right],$$

содержащихся в D_n и таких, что

$$\inf_{x\in Q_{ij}} \operatorname{dist}(x,\,\partial D_n) > \frac{1}{2^{k-1}}.$$

При фиксированном k семейство таких множеств конечно. Пусть $G_{n,k} = \operatorname{int} E_{n,k}$. Выберем бесконечные подмножества $\Lambda_k \subset \mathbb{N}$ такие, что $\Lambda_k \supset \Lambda_{k+1}$ и для любых n', $n'' \in \Lambda_k$ выполнено $E_{n',k} = E_{n'',k}$. Обозначим $G_k = G_{n,k}$, $n \in \Lambda_k$.

Пусть $l = (C+1)|D|$. Тогда ∂D_n имеет $\frac{1}{2^k}$-сеть $\mathcal{N}_{k,n}$, мощность которой не превосходит $\left[2^k l\right] + 2p$. Так как при $n \in \Lambda_k$

$$D_n \subset G_k \cup \left(\cup_{\xi\in\mathcal{N}_{k,n}} B_{2^{-k+3}}(\xi)\right), \tag{4}$$

[3] Достаточно построить ε-сеть, содержащуюся в $\Gamma^{\mathbb{R}^2} \supset \Gamma^D$.

то

$$|G_k| \geqslant |D_n| - \frac{c}{2^k}, \tag{5}$$

где c не зависит от k. Значит, найдется такое $A_0 > 0$, что $|G_k| \geqslant A_0$ при достаточно больших k. Далее, G_k не пересекается с образом $\overline{\gamma}$ (обозначим его $[\overline{\gamma}]$).

Положим $G = \cup_{n\in\mathbb{N}} G_k$. Тогда G — непустое открытое множество, не пересекающееся с $[\overline{\gamma}]$ и такое, что $\partial G \subset [\overline{\gamma}]$. В самом деле, если $x \in G$, то $x \in G_k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Если $x \in [\overline{\gamma}]$, то $\operatorname{dist}(x,\, \partial D_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Значит, $\operatorname{dist}(x,\, \partial D_n) < \frac{1}{2^{k-1}}$ при больших $n \in \Lambda_k$ — противоречие с определением G_k. Пусть $x \in \partial G$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся $k_* \in \mathbb{N}$ и $y \in G_{k_*} \cap B_\varepsilon(x)$. Заметим, что для любого $k \geqslant k_*$ выполнено $G_{k_*} \subset G_k$. Так как $x \notin G_k$, то найдется $y_k \in (\partial G_k) \cap B_\varepsilon(x)$. Выберем $n \in \Lambda_k$ так, чтобы $d(\overline{\gamma}^n,\, \overline{\gamma}) < \frac{1}{2^k}$. Тогда найдутся $z_k \in \partial D_n$ и $x_k \in [\overline{\gamma}]$ такие, что $|y_k - z_k| \leqslant 2^{-k+3}$ (см. (4)), $|x_k - z_k| \leqslant 2^{-k}$. Для достаточно больших k получаем, что $|x - x_k| < 2\varepsilon$. Значит, $\operatorname{dist}(x,\, [\overline{\gamma}]) \leqslant 2\varepsilon$, и в силу произвольности ε получаем, что $x \in [\overline{\gamma}]$.

Так как $|\overline{\gamma}| \leqslant l_0$, $|D_n| \underset{n\to\infty}{\to} \frac{l_0}{C}$, то из (5) получаем, что $\frac{|\overline{\gamma}|}{|G|} \leqslant C$.

Утверждается,[4] что для каждой из связных компонент U_m множества G ее граница представляется как объединение образов наборов p кривых $\overline{g}^m$, причем $\sum\limits_m |\overline{g}^m| \leqslant |\overline{\gamma}|$. Так как

$$C \geqslant \frac{|\overline{\gamma}|}{|G|} \geqslant \frac{\sum\limits_m |\overline{g}^m|}{\sum\limits_m |U_m|} \geqslant \inf_m \frac{|\overline{g}^m|}{|U_m|} \geqslant C,$$

то для любого m выполнено $\frac{|\overline{g}^m|}{|U_m|} = C$. Выбрав одно из множеств U_m, получаем искомую область. □

Теорема 2. *Пусть $\hat{D} \subset D$,*

$$\frac{|\partial \hat{D}|}{|\hat{D}|} = \inf_{\tilde{D}\subset D} \frac{|\partial \tilde{D}|}{|\tilde{D}|}. \tag{6}$$

Тогда каждая связная компонента g множества $(\partial \hat{D}) \cap D$ является дугой окружности. Если $x_0 \in \partial D$ является концом одной из таких дуг g и ∂D гладкая в окрестности x_0, то g касается ∂D в точке x_0.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $\partial \hat{D}$ параметризуется отображением $t \mapsto (\hat{x}(t),\, \hat{y}(t))$, $t \in [0,\, 1]$. При этом считаем, что эта параметризация пропорциональна натуральной. В этом случае функции $\hat{x}$ и $\hat{y}$ абсолютно непрерывны.

Для замкнутой кривой, параметризуемой отображением $t \mapsto (x(t),\, y(t))$, $x(\cdot)$, $y(\cdot) \in AC[0,\, 1]$, ее длина равна

$$l_{x,y} = \int\limits_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} =: \int\limits_0^1 \varphi(\dot{x}(t),\, \dot{y}(t))\, dt,$$

а площадь области, ограниченной этой кривой, равна

$$S_{x,y} = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (y(t)\dot{x}(t) - x(t)\dot{y}(t))\, dt =: \int\limits_0^1 \psi(x(t),\, y(t),\, \dot{x}(t),\, \dot{y}(t))\, dt.$$

[4]Доказательство здесь не приводим.

Пусть $t_* \in (0,\,1)$, $(\hat{x}(t_*),\,\hat{y}(t_*)) \in D$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что $(\hat{x}(t),\,\hat{y}(t)) \in D$ для $t \in (t_* - \delta,\, t_* + \delta)$. Пусть $h(t) = (\xi(t),\,\eta(t)) \in AC[0,\,1]$, $\operatorname{supp} h \subset (t_* - \delta,\, t_* + \delta)$. Если $\alpha \in \mathbb{R}$ достаточно мало по модулю, то для любого $t \in [t_* - \delta,\, t_* + \delta]$ выполнено $(\hat{x}(t) + \alpha\xi(t),\, \hat{y}(t) + \alpha\eta(t)) \in D$. Положим $f(\alpha) = \frac{l_{\hat{x}+\alpha\xi,\hat{y}+\alpha\eta}}{S_{\hat{x}+\alpha\xi,\hat{y}+\alpha\eta}}$. Тогда $f'(\alpha) = 0$. Вычислив эту производную,[5] получаем, что

$$S_{\hat{x},\,\hat{y}} \int\limits_{t_*-\delta}^{t_*+\delta} \Big(\varphi_{\dot{x}}(\dot{\hat{x}}(t),\, \dot{\hat{y}}(t))\dot{\xi}(t) + \varphi_{\dot{y}}(\dot{\hat{x}}(t),\, \dot{\hat{y}}(t))\dot{\eta}(t)\Big)\, dt -$$

$$-l_{\hat{x},\,\hat{y}} \int\limits_{t_*-\delta}^{t_*+\delta} \Big(\psi_{\dot{x}}(\hat{x}(t),\, \hat{y}(t),\, \dot{\hat{x}}(t),\, \dot{\hat{y}}(t))\dot{\xi}(t) + \varphi_{\dot{y}}(\hat{x}(t),\, \hat{y}(t),\, \dot{\hat{x}}(t),\, \dot{\hat{y}}(t))\dot{\eta}(t) +$$

$$+ \psi_x(\hat{x}(t),\, \hat{y}(t),\, \dot{\hat{x}}(t),\, \dot{\hat{y}}(t))\xi(t) + \varphi_y(\hat{x}(t),\, \hat{y}(t),\, \dot{\hat{x}}(t),\, \dot{\hat{y}}(t))\eta(t)\Big)\, dt = 0.$$

Применив аналог теоремы Дюбуа-Реймона для абсолютно непрерывных функций, получаем уравнения Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}} + f_x = 0, \quad -\frac{d}{dt}f_{\dot{y}} + f_y = 0, \quad f(x,\,y,\,\dot{x},\,\dot{y}) = \varphi(\dot{x},\,\dot{y}) - \lambda\psi(x,\,y,\,\dot{x},\,\dot{y}), \quad \lambda = \frac{l_{\hat{x},\,\hat{y}}}{S_{\hat{x},\,\hat{y}}} > 0,$$

то есть

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\hat{x}}}{\sqrt{\dot{\hat{x}}^2 + \dot{\hat{y}}^2}} - \frac{\lambda}{2}\hat{y}\right) + \frac{\lambda}{2}\dot{\hat{y}} = 0, \quad -\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\hat{y}}}{\sqrt{\dot{\hat{x}}^2 + \dot{\hat{y}}^2}} + \frac{\lambda}{2}\hat{x}\right) - \frac{\lambda}{2}\dot{\hat{x}} = 0.$$

Так как параметризация выбрана пропорциональной натуральной, то

$$-\ddot{\hat{x}} + \frac{\tilde{\lambda}}{2}\dot{\hat{y}} + \frac{\tilde{\lambda}}{2}\dot{\hat{y}} = 0, \quad -\ddot{\hat{y}} - \frac{\tilde{\lambda}}{2}\dot{\hat{x}} - \frac{\tilde{\lambda}}{2}\dot{\hat{x}} = 0,$$

где $\tilde{\lambda} > 0$ — константа. Решения последней системы уравнений задают параметризацию окружности.

Докажем второе утверждение. Пусть $g_1 \subset \partial\hat{D}$, $g_2 \subset \partial\hat{D}$ — две различные дуги, пересекающиеся с ∂D в точке x_0, и величина угла между односторонними касательными к g_1 и g_2 в точке x_0 равна $\alpha \in [0,\,\pi]$. Покажем, что при $\alpha < \pi$ область $\hat{D}$ не будет удовлетворять (6). В самом деле, пусть $x_1 \in g_1$, $x_2 \in g_2$, $|x_0 - x_1| = \delta$, $|x_0 - x_2| = \varepsilon\delta$. По теореме косинусов,

$$|x_0 - x_1| + |x_0 - x_2| - |x_1 - x_2| = \delta + \varepsilon\delta - \sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2\delta^2 - 2\delta^2\varepsilon\cos\alpha} =$$

$$= \delta\left(\varepsilon(1 + \cos\alpha) + o(\varepsilon)\right), \quad \varepsilon \to 0.$$

Выберем $\varepsilon = \varepsilon_\alpha > 0$ так, чтобы

$$\delta + \varepsilon_\alpha\delta - \sqrt{\delta^2 + \varepsilon_\alpha^2\delta^2 - 2\delta^2\varepsilon_\alpha\cos\alpha} \geqslant \frac{1}{4}\delta\varepsilon_\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}. \tag{7}$$

Пусть Γ_δ — контур, состоящий из отрезка $[x_1,\,x_2]$ и участка $\partial\hat{D}$, проходящего последовательно через точки x_1, x_0 и x_2 (его обозначим $\partial\hat{D}_{x_1x_0x_2}$; при этом, $|\partial\hat{D}_{x_1x_0x_2}| =$

[5] Предельный переход под знаком интеграла возможен в силу теоремы Лебега.

$|x_0 - x_1| + |x_0 - x_2| + o(\delta))$. При малых δ это жорданов контур, ограничивающий область, которую обозначим D_δ. Тогда $|\hat{D} \backslash D_\delta| = |\hat{D}| - O(\delta^2)$,

$$|\partial(\hat{D} \backslash D_\delta)| = |\partial \hat{D}| - |\partial \hat{D}_{x_1 x_0 x_2}| + |x_1 - x_2| \overset{(7)}{\leqslant} |\partial \hat{D}| - \delta \varepsilon_\alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} + o(\delta).$$

Значит,

$$\frac{|\partial(\hat{D} \backslash D_\delta)|}{|\hat{D} \backslash D_\delta|} \leqslant \frac{|\partial \hat{D}| - \frac{1}{4}\delta \varepsilon_\alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} + o(\delta)}{|\hat{D}| - O(\delta^2)} < \frac{|\partial \hat{D}|}{|\hat{D}|}$$

при малых $\delta > 0$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] П.П. Мосолов, В.П. Мясников. Прикладная математика и механика, 1965.