

Математические вопросы механики сплошной среды (курс лекций)

Д.А. Силаев, А.С. Кочуров, А.А. Васильева

Список обозначений

∇ — оператор градиента

div — оператор дивергенции

rot — оператор ротора

Δ — оператор Лапласа

mes — мера Лебега

$B_r(x)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке x

$AC[a, b]$ — пространство абсолютно непрерывных функций на отрезке $[a, b]$

$\operatorname{supp} f$ — носитель функции f

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение

$[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение

1 Размерности физических величин и пи-теорема.

Как известно, значения физических величин зависят от выбора системы измерения (например, значение длины в километрах не равно значению длины в метрах). Пусть S_1, S_2 — две системы измерения, a — физическая величина. Тогда каждому значению a_1 величины a в системе S_1 соответствует значение a_2 величины a в системе S_2 , причем естественно потребовать, чтобы прямое и обратное соответствие были непрерывны. На практике часто ограничиваются более узким классом систем измерения. А именно, рассматриваются положительные величины и такие системы измерения, что переход от одной системы к другой осуществляется линейно (например, измерение длины в километрах, метрах или сантиметрах). Более точно это означает, что если a — физическая величина, то для любых двух систем измерения S_1 и S_2 найдется $\lambda = \lambda_{1 \rightarrow 2}(a) > 0$ со следующим свойством: если a_1 — значение a в системе S_1 , a_2 — значение a в системе S_2 , то $a_2 = \lambda a_1$ (λ не зависит от a_1).

Нам понадобится понятие размерности одних физических величин относительно некоторого набора других. Приведем сначала примеры из школьной физики. Пусть в системе измерения S_1 расстояние L измеряется в метрах, время T — в секундах, масса M — в граммах, а в системе S_2 расстояние измеряется в километрах, время — в минутах, масса — в килограммах. Тогда $\lambda_{1 \rightarrow 2}(L) = \lambda_{1 \rightarrow 2}(M) = \frac{1}{1000}$, $\lambda_{1 \rightarrow 2}(T) = \frac{1}{60}$. Скорость v в первой системе измеряется в м/с, в S_2 — в км/мин; энергия E в S_1 измеряется в г · м²/с², во второй — в кг · км²/мин². Если в первой системе скорость равна 1 м/с, а энергия — 1 г · м²/с², то во второй системе скорость равна $\frac{60}{1000}$ км/мин, а энергия — $\frac{60^2}{1000 \cdot 1000^2}$ кг · км²/мин². Тем самым,

$$\lambda_{1 \rightarrow 2}(v) = \frac{\lambda_{1 \rightarrow 2}(L)}{\lambda_{1 \rightarrow 2}(T)}, \quad \lambda_{1 \rightarrow 2}(E) = \frac{\lambda_{1 \rightarrow 2}(M)\lambda_{1 \rightarrow 2}(L)^2}{\lambda_{1 \rightarrow 2}(T)^2}.$$

При этом говорят, что скорость и энергия имеют размерность относительно расстояния, времени и массы вида

$$[v] = \frac{[L]}{[T]}, \quad [E] = \frac{[M] \cdot [L]^2}{[T]^2}$$

(это символическая запись, которая часто встречается в учебниках физики).

Дадим теперь формальное определение размерности.

Пусть p_1, \dots, p_n — набор физических величин, называемых основными. Этот набор определяет класс систем измерения со следующими свойствами:

- переход от одной системы к другой осуществляется линейно,
- для любых $\xi_1, \dots, \xi_n > 0$ найдется система измерения, в которой значение p_j равно ξ_j , $j = 1, \dots, n$.

Пусть $f : (0, \infty)^n \rightarrow (0, \infty)$ — непрерывная функция. Скажем, что физическая величина a имеет размерность вида

$$[a] = f([p_1], \dots, [p_n]), \tag{1.1}$$

если для любых двух систем измерения S_1 и S_2 (которые определяются основными величинами) выполнено

$$\lambda = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \tag{1.2}$$

где $\lambda = \lambda_{1 \rightarrow 2}(a)$, $\lambda_j = \lambda_{1 \rightarrow 2}(p_j)$, $j = \overline{1, n}$. (Формула (1.1) — это обозначение, а не действие функции f на набор чисел).

Теорема 1. *Функция f может быть только степенным одночленом, т.е. найдутся такие $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, что*

$$[a] = [p_1]^{\alpha_1} \dots [p_n]^{\alpha_n}.$$

Доказательство. Рассмотрим три системы измерения: 0, 1 и 2. Тогда $\lambda_{0 \rightarrow 2}(a) = \lambda_{0 \rightarrow 1}(a)\lambda_{1 \rightarrow 2}(a)$, $\lambda_{0 \rightarrow 2}(p_j) = \lambda_{0 \rightarrow 1}(p_j)\lambda_{1 \rightarrow 2}(p_j)$, $j = \overline{1, n}$. Из определения размерности следует, что

$$\begin{aligned} f(\lambda_{0 \rightarrow 1}(p_1)\lambda_{1 \rightarrow 2}(p_1), \dots, \lambda_{0 \rightarrow 1}(p_n)\lambda_{1 \rightarrow 2}(p_n)) &= f(\lambda_{0 \rightarrow 2}(p_1), \dots, \lambda_{0 \rightarrow 2}(p_n)) = \\ &= \lambda_{0 \rightarrow 2}(a) = \lambda_{0 \rightarrow 1}(a)\lambda_{1 \rightarrow 2}(a) = f(\lambda_{0 \rightarrow 1}(p_1), \dots, \lambda_{0 \rightarrow 1}(p_n))f(\lambda_{1 \rightarrow 2}(p_1), \dots, \lambda_{1 \rightarrow 2}(p_n)). \end{aligned}$$

В силу произвольности выбора систем измерения, получаем, что для любых положительных $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ выполнено

$$f(x_1 y_1, \dots, x_n y_n) = f(x_1, \dots, x_n) f(y_1, \dots, y_n).$$

Положим

$$\varphi(s_1, \dots, s_n) = \ln f(e^{s_1}, \dots, e^{s_n}), \quad s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\varphi(s_1 + t_1, \dots, s_n + t_n) = \varphi(s_1, \dots, s_n) + \varphi(t_1, \dots, t_n), \quad s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}.$$

Отсюда и из непрерывности f следует, что функция φ линейна. В самом деле, нужно показать, что для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $\varphi(\lambda s) = \lambda \varphi(s)$, $s \in \mathbb{R}^n$. Из аддитивности выводятся следующие утверждения:

1. $\varphi(0) = 0$,
2. $\varphi(-s) = -\varphi(s)$,
3. $\varphi(ms) = m\varphi(s)$, $m \in \mathbb{N}$,
4. $\varphi(qs) = q\varphi(s)$, $q \in \mathbb{Q}$.

Отсюда и из непрерывности φ получаем, что $\varphi(\lambda s) = \lambda \varphi(s)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$.

Тем самым, найдутся такие $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, что

$$\varphi(s_1, \dots, s_n) = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n.$$

Значит,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \exp \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \ln x_j \right) = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

□

Если $[a] = 1$, то величина a называется безразмерной.

Пусть физические величины a_1, \dots, a_n имеют размерность относительно основных величин p_1, \dots, p_m . По доказанной выше теореме,

$$[a_j] = [p_1]^{\beta_{j1}} \dots [p_m]^{\beta_{jm}}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Скажем, что размерности системы величин a_1, \dots, a_n зависимы (независимы), если система векторов $(\beta_{j1}, \dots, \beta_{jm}) \in \mathbb{R}^m$, $j = \overline{1, n}$, является линейно зависимой (соответственно линейно независимой). Заметим, что если a_1, \dots, a_n независимы, то для

любых положительных c_1, \dots, c_n найдется система измерения, в которой a_j принимает значение c_j , $1 \leq j \leq n$. В самом деле, прологарифмировав (1.2) для каждого a_j , получаем, что

$$\ln \lambda_{1 \rightarrow 2}(a_j) = \sum_{k=1}^m \beta_{jk} \ln \lambda_{1 \rightarrow 2}(p_k), \quad 1 \leq j \leq n.$$

В силу линейной независимости векторов $(\beta_{j1}, \dots, \beta_{jm})$, для любых $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ можно подобрать $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \mathbb{R}$ так, чтобы $\mu_j = \sum_{k=1}^m \beta_{jk} \sigma_k$, $1 \leq j \leq n$. Отсюда следует утверждение.

Пи-теорема.

Пусть a_1, \dots, a_n , a — некоторые физические величины, имеющие размерность относительно основных физических величин p_1, \dots, p_m . Предположим, что значения a и a_1, \dots, a_n связаны равенством

$$a = f(a_1, \dots, a_n), \quad (1.3)$$

при этом функция f одна и та же для всех систем измерения. Оказывается, что это соотношение эквивалентно некоторому равенству между безразмерными физическими величинами, при этом их число меньше, чем в (1.3).

Пусть a_1, \dots, a_k — максимальная подсистема величин с независимыми размерностями в $\{a, a_1, \dots, a_n\}$. Тогда

$$[a_l] = [a_1]^{\beta_{l,1}} \dots [a_k]^{\beta_{l,k}}, \quad l = k+1, \dots, n, \quad [a] = [a_1]^{\beta_1} \dots [a_k]^{\beta_k} \quad (1.4)$$

для некоторых $\beta_{l,1}, \dots, \beta_{l,k}$, β_1, \dots, β_k . Введем безразмерные величины

$$\Pi_l = \frac{a_l}{a_1^{\beta_{l,1}} \dots a_k^{\beta_{l,k}}}, \quad l = k+1, \dots, n, \quad \Pi = \frac{a}{a_1^{\beta_1} \dots a_k^{\beta_k}}. \quad (1.5)$$

Теорема 2. Пусть выполнено (1.3), (1.4), а величины Π_l и Π определены соотношением (1.5). Тогда найдется функция $F : (0, \infty)^{n-k} \rightarrow (0, \infty)$ такая, что (1.3) эквивалентно равенству

$$\Pi = F(\Pi_{k+1}, \dots, \Pi_n). \quad (1.6)$$

Доказательство. Подставив выражения (1.5) в (1.3), получаем

$$\Pi = a_1^{-\beta_1} \dots a_k^{-\beta_k} f\left(a_1, \dots, a_k, a_1^{\beta_{k+1,1}} \dots a_k^{\beta_{k+1,k}} \Pi_{k+1}, \dots, a_1^{\beta_{n,1}} \dots a_k^{\beta_{n,k}} \Pi_n\right),$$

т.е.

$$\Pi = F_0(a_1, \dots, a_k, \Pi_{k+1}, \dots, \Pi_n).$$

При этом функция F_0 одна и та же для всех систем измерения. Покажем, что F_0 не зависит от a_1, \dots, a_k , и тогда получим (1.6). Выберем систему измерения, в которой $a_j = 1$, $j = 1, \dots, k$ (она существует, так как a_1, \dots, a_k независимы) и пусть ξ_j — значения Π_j ($1 \leq j \leq n$), ξ — значение Π в этой системе. Тогда

$$\xi = F_0(1, \dots, 1, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n).$$

Пусть c_1, \dots, c_k — произвольный набор положительных чисел. Найдется система измерения, в которой значения a_j равны c_j . Так как $\Pi, \Pi_{k+1}, \dots, \Pi_n$ являются безразмерными и F_0 не зависит от выбора системы измерения, то $\xi = F_0(c_1, \dots, c_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$. Значит, $F_0(c_1, \dots, c_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n) = F_0(1, \dots, 1, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$. \square

Пи-теорему удобно применять для подбора формул. Сначала рассмотрим два простых примера из механики.

Пример 1. Пусть тело массы m совершает колебания на пружине с коэффициентом жесткости k . Как известно, период его колебаний не зависит от амплитуды x_0 . Оказывается, это можно объяснить исходя из соображений размерности. В самом деле, период колебаний однозначно определяется по m , k и x_0 , т.е. $T = f(m, k, x_0)$. Величины m , k и x_0 независимы, $[k] = [m]/[T]^2$. Полагаем $\Pi = T\sqrt{\frac{k}{m}}$ в соответствии с (1.5). Применяя пи-теорему, получаем, что $T\sqrt{\frac{k}{m}} = \text{const}$.

Пример 2. Рассмотрим маятник длины l с грузом массы m в постоянном гравитационном поле с ускорением свободного падения g . Пусть x_0 — амплитуда, T — период колебаний. Тогда $T = f(l, m, g, x_0)$. Система l , m , g является максимальной независимой подсистемой и $[T] = \frac{[l]^{1/2}}{[g]^{1/2}}$. Полагаем $\Pi = \frac{T\sqrt{g}}{\sqrt{l}}$, $\Pi_4 = \frac{x_0}{l}$. Применяя пи-теорему, получаем $T = \sqrt{\frac{l}{g}}\varphi\left(\frac{x_0}{l}\right)$ (т.е. T не зависит от массы груза).

Соображения размерности бывает полезно применять и для подбора специальных решений уравнений в частных производных.

Пример 3. Найдем фундаментальное решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \quad a|_{t=0} = \delta(x). \quad (1.7)$$

Здесь t является временем, x — координатой.

Чтобы левая и правая части уравнения имели одну и ту же размерность, нужно, чтобы $[\nu] = \frac{[x]^2}{[t]}$. Из вида граничных условий можно понять, какую размерность должна иметь величина a :¹ взяв безразмерную величину $\xi = x/L$, где L — фиксированное значение длины, получаем, что $a|_{t=0} = \delta(L\xi) = \frac{1}{L}\delta(\xi)$, т.е. $[a] = \frac{1}{[L]}$. Равенство $\delta(L\xi) = \frac{1}{L}\delta(\xi)$ получается следующим образом: для пробной функции φ имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\delta(L\xi) d\xi = \frac{1}{L} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\delta(L\xi) dL\xi = \frac{1}{L} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x/L)\delta(x) dx = \frac{1}{L}\varphi(0) = \frac{1}{L} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\delta(\xi) d\xi.$$

Итак, нам нужно найти зависимость вида $a = f(t, x, \nu)$. Здесь x , t — максимальная независимая подсистема. Полагаем $\Pi_3 = \frac{\nu t}{x^2}$, $\Pi = ax$. Применяя пи-теорему, получаем, что $ax = F\left(\frac{\nu t}{x^2}\right)$. Для решения уравнения удобнее взять подстановку $a = \frac{1}{\sqrt{\nu t}}\psi\left(\frac{x^2}{\nu t}\right)$ (чтобы вторая производная по x имела более простой вид). Подставляем это в (1.7), обозначаем $z = \frac{x^2}{\nu t}$ и получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{2}\psi(z) - z\psi'(z) = 4z\psi''(z) + 2\psi'(z),$$

то есть $\left(z\frac{d}{dz} + \frac{1}{2}\right)\left(4\frac{d}{dz} + 1\right)\psi(z) = 0$. Одно из решений имеет вид $\psi(z) = Ce^{-z/4}$, откуда $a(t, x) = \frac{C}{\sqrt{\nu t}}e^{-x^2/4\nu t}$. Константа C находится из граничного условия: если $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, то

$$h(0) = C \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\nu t}} \int_{\mathbb{R}} h(x)e^{-\frac{x^2}{4\nu t}} dx = C \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} h(\sqrt{\nu t}z)e^{-z^2/4} dz = Ch(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/4} dz,$$

т.е. $C = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

¹Эти рассуждения имеют физический уровень строгости, однако нам этого достаточно, чтобы подобрать хотя бы одно решение уравнения.

2 Законы сохранения

2.1 Вывод уравнений

1. **Уравнение неразрывности.** В качестве примера разберем одномерный случай движения частиц ($n = 1$). Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) частицы сплошной среды заполняют отрезок $[a, b]$ на оси Ox , а функция $\rho(t, x)$ задает плотность частиц в этой среде, $\rho(\cdot)$, $\frac{\partial \rho}{\partial t}(\cdot)$ — непрерывные функции (на рис. (1) изображены несколько траекторий движения частиц во времени).

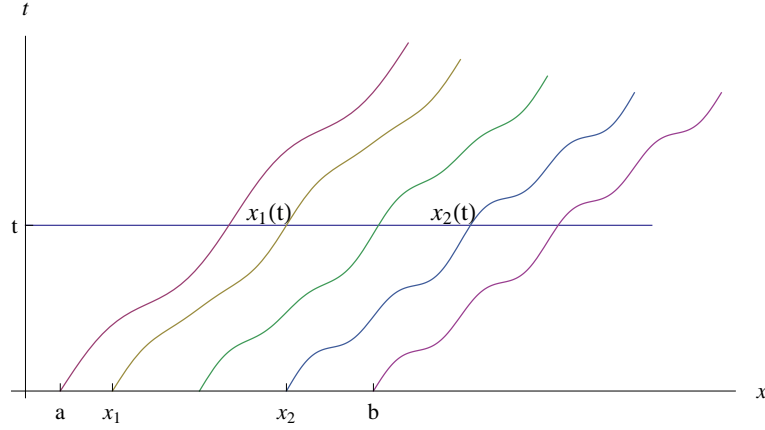


Рис. 1:

Будем предполагать, что в рассматриваемой области движения траектории всех частиц задаются непрерывно дифференцируемыми отображениями. Выберем произвольным образом частицы x_1 и x_2 в момент $t = 0$ и рассмотрим их траектории движения $x_1(t)$ и $x_2(t)$, $x_1(0) = x_1$, $x_2(0) = x_2$. Условие неразрывности сплошной среды означает, что масса всех частиц среды, заключенных между $x_1(t)$ и $x_2(t)$, не меняется со временем, т.е.

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho(t, x) dx \equiv C(x_1, x_2). \quad (2.1)$$

Продифференцируем уравнение (2.1) по переменной t :

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) dx + \rho(t, x_2(t)) \frac{dx_2(t)}{dt} - \rho(t, x_1(t)) \frac{dx_1(t)}{dt} = 0. \quad (2.2)$$

В этом уравнении $\frac{dx(t)}{dt} =: v(t)$ — скорость движения частицы в момент времени t . Предположим дополнительно, что произведение $(\rho \cdot v)$ непрерывно дифференцируемо по переменной x . Тогда по формуле Ньютона — Лейбница получаем

$$(\rho \cdot v)(t, x) \Big|_{x=x_1(t)}^{x=x_2(t)} = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial x}(t, x) dx \quad \text{и, значит,}$$

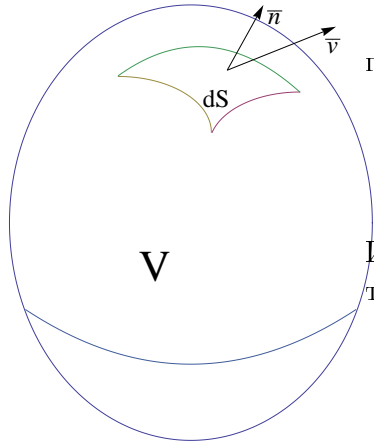
$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial x}(t, x) \right) dx = 0.$$

Величины $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в этом равенстве могут произвольными допустимыми (т.е. принадлежащими образу какой-либо из траекторий), а это означает, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial x} = 0. \quad (2.3)$$

Замечание. Как уже отмечалось, переход от (2.2) к (2.3) предполагает дополнительно непрерывную дифференцируемость произведения $\rho \cdot v$ по переменной x . Если это условие не выполняется, следует пользоваться уравнением неразрывности в форме (2.2).

Продемонстрированный здесь подход переносится и на многомерный случай (лемма о жидком объеме [3]; эту лемму мы докажем в Дополнении 4). Однако для большинства учебников (см. [1], [2]) принят иной подход к доказательству различных законов сохранения: фиксация в пространстве не зависящего от времени объема и рассмотрение баланса той или иной величины по времени для этого объема. Приведем пример соответствующих рассуждений для уравнения неразрывности (здесь рассмотрим более общий случай, учитывающий появление и исчезновение массы).



Выберем в сплошной среде произвольный объем V с границей $\partial V = \Gamma$. Рассмотрим массу этого объема:

$$\iiint_V \rho dV.$$

Изменение во времени этой массы будет происходить по трем причинам:

- 1) из-за зависимости плотности от времени

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV;$$

Рис. 2:
2) из-за переноса массы потоком сплошной среды через поверхность выбранного объема:

$$\iint_{\Gamma} \langle \rho \cdot \bar{v}, \bar{n} \rangle dS = \iint_{\Gamma} \rho \cdot v^n dS.$$

Здесь $\rho \cdot \bar{v}$ – вектор потока плотности, \bar{n} – внешняя нормаль к границе Γ , dS – элемент поверхности на этой границе; v^n здесь и далее обозначает проекцию вектора \bar{v} на нормаль \bar{n} к поверхности;

3) из-за процессов появления или исчезновения массы с плотностью появления и исчезновения $R(\cdot)$:

$$\iiint_V R dV.$$

В итоге получаем

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_{\Gamma} \langle \rho \cdot \bar{v}, \bar{n} \rangle dS = \iiint_V R dV. \quad (2.4)$$

Если произведение $\rho \cdot \bar{v}$ непрерывно дифференцируемо по пространственным переменным, то к (2.4) можно применить формулу Гаусса – Остроградского. В этом случае воспользуемся тем, что выделенный объем V произвольный:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \bar{v}) = R, \quad (2.5)$$

или в координатах

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial(\rho v^\alpha)}{\partial x^\alpha} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^\alpha)}{\partial x^\alpha} = R \quad (2.6)$$

(знак суммирования по повторяющимся индексам будем опускать).

Замечание 1. Еще раз повторим, что переход от (2.4) к (2.5) предполагает непрерывную дифференцируемость произведения $\rho \cdot \bar{v}$ по пространственным переменным. Если это условие не выполняется, то вместо (2.5) – (2.6) следует использовать (2.4).

Замечание 2. В выведенном здесь уравнении баланса плотности $\rho(\cdot)$ присутствуют три новых неизвестных v^1, v^2, v^3 — компоненты скорости движения сплошной среды.

Замечание 3. В дальнейшем мы не будем использовать обозначения кратных интегралов.

2. Уравнение сохранения количества движения. Будем рассматривать случай, когда в рассматриваемой области изменения переменных плотность ρ , скорость v и тензор напряжений σ (см. ниже) являются непрерывно дифференцируемыми отображениями. Пусть ρv^i — i -я компонента вектора потока, $i = 1, 2, 3$. Изменение во времени количества движения в объеме V с гладкой границей $\partial V = \Gamma$ будет происходить

1) из-за зависимости ρv^i от времени

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v^i dV;$$

2) из-за переноса ρv^i потоком сплошной среды через поверхность выделенного объема:

$$\int_{\Gamma} \langle \rho v^i \cdot \bar{v}, \bar{n} \rangle dS = \int_{\Gamma} \rho v^i v^n dS.$$

3) из-за сопротивления переносу ρv^i со стороны сплошной среды, находящейся вне выделенного объема, и действующей на выделенный объем через границу Γ :

$$- \int_{\Gamma} \langle (\sigma^{ij})_{j=1}^3, \bar{n} \rangle dS = - \int_{\Gamma} \sigma^{in} dS.$$

Здесь σ^{ij} — компоненты тензора напряжений. Требование независимости закона сохранения количества движения от системы координат приводит к тому, что преобразование величины σ^{ij} должно производиться так же, как и величины $\rho v^i v^j$, т.е. σ^{ij} — тензор 2-го порядка (более подробный вывод см. в [2]).

4) из-за воздействия внешних массовых сил (например, поля тяготения) с внешней стороны выделенного объема:

$$\int_V f^i dV.$$

В итоге

$$\int_V \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} dV + \int_{\Gamma} \langle \rho v^i \cdot \bar{v}, \bar{n} \rangle dS - \int_{\Gamma} \sigma^{in} dS = \int_V f^i dV. \quad (2.7)$$

Применяя формулу Гаусса – Остроградского и используя то, что выделенный объем V произволен, получим

$$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^i v^\alpha - \sigma^{i\alpha})}{\partial x^\alpha} = f^i. \quad (2.8)$$

Величина $(\sigma^{11} + \sigma^{22} + \sigma^{33})$ является инвариантом тензора σ^{ij} ; это позволяет ввести понятие давления:

$$p = - \frac{\sigma^{11} + \sigma^{22} + \sigma^{33}}{3}$$

(знак минус выбирается потому, что давление действует извне, со стороны сплошной среды на выделенный объем). Давление действует со всех сторон одинаково, не меняя формы выделенного объема, а лишь меняя его размеры.

Тензор напряжения представим в виде суммы

$$\sigma^{i\alpha} = -p\delta^{i\alpha} + \tau^{i\alpha},$$

где $\tau^{i\alpha}$ — тензор касательных напряжений.

Замечание. Можно провести аналогичные выкладки для закона изменения момента сил (подробнее см. в [2]) и получить, что $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$.

3. Закон сохранения энергии. Вновь будем рассматривать гладкий случай движения среды, когда в некоторой области изменения переменных имеется возможность применять формулу Гаусса – Остроградского, вычислить частную производную по переменной t и менять порядок этой производной с интегралом по объему. Изменение энергии в объеме V с гладкой границей Γ складывается

1) из изменения величины полной энергии во времени

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot \left(E + \frac{|v|^2}{2} \right) dV;$$

здесь ρE — внутренняя энергия в единице объема, $|v|^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$;

2) из переноса энергии потоком сплошной среды через поверхность выделенного объема:

$$\int_{\Gamma} \rho \cdot \left(E + \frac{|v|^2}{2} \right) \cdot \langle \bar{v}, \bar{n} \rangle dS;$$

3) из работы против поверхностных сил, действующих со стороны сплошной среды, находящейся вне выделенного объема:

$$\int_{\Gamma} (\sigma \bar{v})^n dS = \int_{\Gamma} \sigma^{\alpha\beta} v^\beta n^\alpha dS;$$

4) из тепла, выделяемого сплошной средой через поверхность Γ , при совершении работы против поверхностных сил и внутреннего трения среды:

$$\int_{\Gamma} \langle \bar{q}, \bar{n} \rangle dS = \int_{\Gamma} q^n dS;$$

здесь \bar{q} — вектор плотности потока тепла;

5) из источников энергии с плотностью ε :

$$\int_V \varepsilon dV.$$

В итоге получаем

$$\int_V \frac{\partial \left(\rho \cdot \left(E + \frac{|v|^2}{2} \right) \right)}{\partial t} dV + \int_{\Gamma} \rho \cdot \left(E + \frac{|v|^2}{2} \right) \cdot \langle \bar{v}, \bar{n} \rangle dS - \int_{\Gamma} (\sigma \bar{v})^n dS + \int_{\Gamma} q^n dS = \int_V \varepsilon dV. \quad (2.9)$$

Применяя формулу Гаусса – Остроградского и используя то, что выделенный объем V произволен, а тензор напряжений симметричен, получим:

$$\frac{\partial \left(\rho \cdot \left(E + \frac{|v|^2}{2} \right) \right)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\rho \cdot \left(E + \frac{|v|^2}{2} \right) v^\alpha - \sigma^{\alpha\beta} v^\beta + q^\alpha \right) = \varepsilon. \quad (2.10)$$

По закону Фурье, вектор плотности потока тепла \bar{q} пропорционален градиенту температуры сплошной среды:

$$\bar{q} = -\kappa \cdot \nabla T, \quad (2.11)$$

где κ — коэффициент теплопроводности.

Рассмотрим случай, когда источники массы отсутствуют ($R = 0$). Уравнение (2.6) умножим на v^i и это произведение вычтем из (2.8):

$$\rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} \right) = \frac{\partial \sigma^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} + f^i, \quad (2.12)$$

или

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} + \frac{f^i}{\rho}. \quad (2.13)$$

Полной производной по времени (или субстанциональной производной) от функции $\varphi(t, x)$ вдоль траектории движения частицы $x(t)$, $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, называют

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t, x(t))}{dt} &= \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha(t)}{dt} = \\ &= \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial t} + v^\alpha(t, x(t)) \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial x^\alpha}. \end{aligned}$$

Используя это определение, уравнение (2.12) можно переписать в виде

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial \sigma^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} + f^i, \quad (2.14)$$

что соответствует второму закону Ньютона (масса на ускорение равна сумме действующих сил). Отсюда следует, что σ^{in} связано с силой, действующей на единицу поверхности выделенного объема (поверхностной силой).

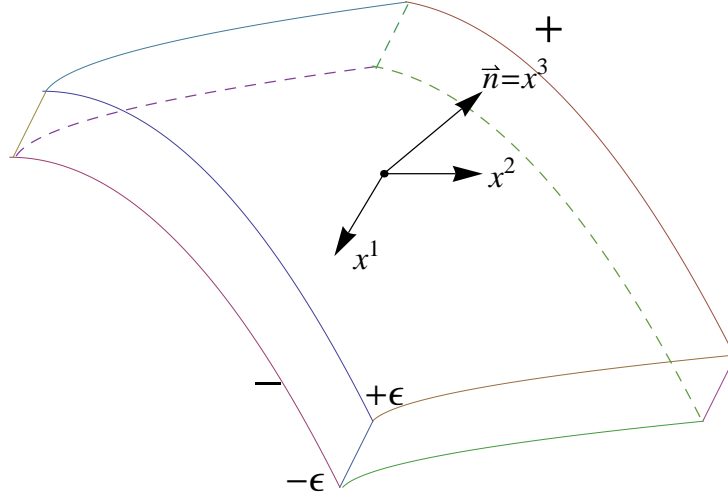
Таким образом, описание сплошной среды дается плотностью ρ ; компонентами скорости v^i , $i = 1, 2, 3$; 9-ю компонентами тензора напряжений σ^{ij} , $i, j = 1, 2, 3$; внутренней энергией E ; температурой T . Получилось 15 неизвестных и 5 уравнений. Поскольку число уравнений меньше числа неизвестных, то появляется проблема замыкания получившейся системы. Ее решают в зависимости от предположений о свойствах среды. При этом получают различные модели механики сплошной среды: гидродинамика, газовая динамика, теория упругости и др.

2.2 Соотношения Гюгонио

Рассмотрим случай, когда движение среды не является гладким (например, скорость имеет разрыв). Вернемся к интегральной форме законов сохранения:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_\Gamma \rho \cdot v^n dS = 0,$$

где Γ — поверхность разрыва. Введем систему координат, связанную с поверхностью разрыва. Пусть координата x^3 направлена вдоль нормали, а x^1 и x^2 лежат в касательной плоскости к этой поверхности.



Будем предполагать, что разрыв движется с постоянной скоростью. Поверхность разрыва разделяет (локально) пространство на две части. Точки, принадлежащие одной части, будем отличать от точек другой части при помощи индекса + и - (плюсовые и минусовые точки). Пусть $V(\varepsilon)$ — малая часть среды, заключенная между двумя близкими положениями поверхности разрыва в моменты t и $t + \varepsilon$. Так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ объём множества $V(\varepsilon)$ стремится к нулю, а площадь его поверхности $\Gamma(\varepsilon)$ к нулю не стремится, то необходимо, чтобы на поверхности разрыва

$$\rho_+ \cdot v_+^n = \rho_- \cdot v_-^n \quad (\text{уравнение неразрывности}). \quad (2.15)$$

Из закона сохранения количества движения следует

$$\int_V \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} dV + \int_\Gamma (\rho v^i \cdot v^n - \sigma^{in}) dS = \int_V f^i dV,$$

$\sigma^{in} = -p\delta^{in} + \tau^{in}$. Поэтому на поверхности разрыва

$$(\rho v^i \cdot v^n + p\delta^{in} - \tau^{in})_+ = (\rho v^i \cdot v^n + p\delta^{in} - \tau^{in})_-. \quad (2.16)$$

Аналогично из закона сохранения энергии

$$\int_V \frac{\partial\left(\rho \cdot \left(E + \frac{|v|^2}{2}\right)\right)}{\partial t} dV + \int_\Gamma \rho \cdot \left(E + \frac{|v|^2}{2}\right) \cdot \langle \bar{v}, \bar{n} \rangle dS + \int_\Gamma \langle \sigma, \bar{v} \rangle^n dS + \int_\Gamma q^n dS = \int_V \varepsilon dV$$

следует, что на поверхности разрыва

$$\left(\rho v^n \left(E + \frac{|v|^2}{2}\right) + \langle \sigma, \bar{v} \rangle^n + q^n\right)_+ = \left(\rho v^n \left(E + \frac{|v|^2}{2}\right) + \langle \sigma, \bar{v} \rangle^n + q^n\right)_-. \quad (2.17)$$

Если наблюдается прохождение частиц среды через поверхность разрыва, то такое явление называется ударной волной, если же такого прохождения не наблюдается, то разрыв называют тангенциальным; если разрыв тангенциален, то это означает $v_+^n = v_-^n = 0$, $\rho_+ = \rho_- = \rho$.

Уравнения (2.15) – (2.17) называются соотношениями Гюгонио на поверхности разрыва.

3 Проблема замыкания системы уравнений

3.1 Тензор скоростей деформации

Рассмотрим в области, заполненной сплошной средой, гладкую кривую $\bar{r}(s)$, $s \in (-\delta, \delta)$. Пусть частица с начальной координатой $\bar{r}(s)$ за время t перешла в точку $\bar{r}(s, t)$. Тогда $\frac{d\bar{r}(s, t)}{dt} = v(t, \bar{r}(s, t))$. Обозначив $\bar{\gamma}_s(t) = \bar{r}(s, t) - \bar{r}(0, t)$, получаем $\frac{d\bar{\gamma}_s(t)}{dt} = v(t, \bar{r}(s, t)) - v(t, \bar{r}(0, t))$. Пусть $\bar{\xi} = \bar{\xi}(t) = \frac{d\bar{\gamma}_s(t)}{ds}$. Тогда

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = \langle \bar{\xi}, \nabla \rangle \bar{v}. \quad (3.1)$$

Пусть $\bar{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$. Тогда (3.1) переписывается в виде

$$\frac{d\xi^i}{dt} = \xi^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^i} \right) \xi^\alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^i} \right) \xi^\alpha.$$

Введем тензор

$$\varepsilon^{i\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^i} \right).$$

Тогда

$$\frac{d\xi^i}{dt} = (\xi^\alpha \varepsilon^{i\alpha} + [\bar{\Omega}, \bar{\xi}]^i), \quad (3.2)$$

где $\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{v}$ — вихрь,

$$[\bar{\Omega}, \bar{\xi}]^i = \frac{\xi^\alpha}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^i} \right), \quad i = 1, 2, 3.$$

Из курса классической механики известно, что если среда является *абсолютно твердым телом*, то

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = [\bar{\Omega}, \bar{\xi}],$$

т.е. за время dt вектор $\bar{\xi}$ поворачивается на $d\bar{\xi} = [\bar{\Omega}, \bar{\xi}] dt$; здесь $\bar{\Omega}$ — угловая скорость вращения в точке $\bar{r}(0, t)$. Первое же слагаемое $\xi^\alpha \varepsilon^{i\alpha}$ в (3.2) указывает, что тело является не абсолютно твердым, а деформируемым.

Определение 1. Тензор $\varepsilon^{i\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^i} \right)$ называется тензором скоростей деформации.

Физический смысл тензора скоростей деформации. Рассмотрим сначала физический смысл диагональных элементов, например, элемента $\varepsilon^{11} = \frac{\partial v^1}{\partial x^1}$. Для этого представим одномерный стержень в направлении x_1 . Для него вектор $\bar{\xi}$ имеет единственную ненулевую компоненту ξ^1 , и (3.1) переписывается в виде

$$\frac{d\xi^1}{dt} = \xi^1 \cdot \frac{\partial v^1}{\partial x^1}.$$

Тем самым, если $\xi^1 = 1$, то за время dt длина $\bar{\xi}$ изменяется на величину $\frac{\partial v^1}{\partial x^1} dt$ в направлении x_1 .

Теперь рассмотрим элемент ε^{12} . Возьмем два вектора $\bar{\xi}(t)$ и $\bar{\eta}(t)$, удовлетворяющие уравнению (3.1). Пусть $\bar{\xi}(t_0) = (1, 0, 0)$, $\bar{\eta}(t_0) = (0, 1, 0)$ (момент времени t_0 фиксирован). Тогда

$$\frac{d\langle \bar{\xi}(t), \bar{\eta}(t) \rangle}{dt} = \left\langle \bar{\xi}, \frac{d\bar{\eta}}{dt} \right\rangle \Big|_{t=t_0} + \left\langle \bar{\eta}, \frac{d\bar{\xi}}{dt} \right\rangle \Big|_{t=t_0} \stackrel{(3.1)}{=} \frac{\partial v^1}{\partial x^2} + \frac{\partial v^2}{\partial x^1}.$$

Значит, за время dt квадрат $dx^1 \times dx^2$ перешел в параллелограмм, прямой угол изменился на величину $\left(\frac{\partial v^1}{\partial x^2} + \frac{\partial v^2}{\partial x^1}\right) dt$.

Таким образом, диагональные члены ($i = j$) тензора ε^{ij} скоростей деформации отвечают за скорость растяжения линейных элементов среды в направлении i , а остальные его элементы ($i \neq j$) — за скорость изменения углов плоских элементов среды в плоскости (i, j) .

3.2 Проблема замыкания системы уравнений, состоящей из законов сохранения.

Рассмотрим систему:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^\alpha)}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \text{— уравнение неразрывности,} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^i v^\alpha - \sigma^{i\alpha})}{\partial x^\alpha} = f^i \quad \text{— закон сохранения количества движения,} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial\left(\rho \cdot \left(E + \frac{|v|^2}{2}\right)\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho \cdot \left(E + \frac{|v|^2}{2}\right) v^\alpha\right)}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial(-\sigma^{\alpha\beta} v^\beta)}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \text{— закон сохранения энергии.} \quad (3.5)$$

Общее число уравнений этой системы — 5, а входящих в нее неизвестных — 14:

$$\rho, v^1, v^2, v^3, \sigma^{11}, \sigma^{12}, \sigma^{13}, \sigma^{21}, \sigma^{22}, \sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{32}, \sigma^{33}, E.$$

Все модели сплошной среды связаны с теми или иными предположениями о свойствах среды. Если среда деформируется быстро (пример — стальной шарик, ударившийся о пол), то будем говорить, что деформация упругая. Если же среда деформируется медленно, скажем, что деформация вязкая.

Введем характерные параметры среды.

Время, за которое среда принимает форму сосуда, называется характерным временем или *временем релаксации* Θ . Введем *характерное напряжение* σ_0 . Из материала среды сделаем однородный изотропный стержень. Характерным напряжением σ_0 назовем силу, приложение которой к единице поперечного сечения стержня приводит к растяжению стержня на 10% (или другое количество процентов, задаваемое ГОСТом для данного материала).

Пример: стекло — это жидкость, время релаксации которой $\Theta \sim 1000$ лет.

Итак, среда характеризуется временем релаксации Θ и характерным напряжением σ_0 . Проведем следующий опыт. К стандартному кубику, вырезанному из испытуемого материала среды, приложим силу внешнего воздействия.

Через время dt кубик превратился в параллелепипед. Скорость деформации характеризует скорость изменения угла γ :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}, \quad [\dot{\gamma}] = \frac{1}{T} \quad \text{— размерность скорости деформации,}$$

$\Theta \cdot \dot{\gamma}$ — безразмерная скорость деформации ($[\Theta \cdot \dot{\gamma}] = 1$). Величина $\dot{\gamma}$ зависит от напряжения внешнего воздействия, от скорости, с которой производится это внешнее воздействие и характеристик материала Θ, σ_0 :

$$\dot{\gamma} = f(\Theta, \sigma_0, \sigma, \dot{\sigma}).$$

Применим пи-теорему и получим

$$\Theta \cdot \dot{\gamma} = F \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}, \frac{\dot{\sigma}\Theta}{\sigma_0} \right).$$

Рассмотрим случай *вязких* тел. В этом случае $\dot{\sigma}$ мало (точнее, $\dot{\sigma}\Theta \ll \sigma_0$) и

$$\Theta \cdot \dot{\gamma} = F \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) = F(0) + F'(0) \frac{\sigma}{\sigma_0} + \dots$$

Заметим, что $F(0) = 0$, т.к. при отсутствии напряжений нет изменения формы среды, т.е. $\dot{\gamma} = 0$. Ограничиваясь линейным приближением, получаем

$$\sigma = \eta \cdot \dot{\gamma}, \quad \text{где} \quad \eta = \frac{\Theta \cdot \sigma_0}{F'(0)} \quad (3.6)$$

— коэффициент вязкости. Если выполнено (3.6), то среда называется линейно вязким телом.

Рассмотрим теперь другой случай, когда нагрузки малые, но быстрые (т.е. $\sigma \ll \sigma_0$). Тогда

$$\Theta \cdot \dot{\gamma} = F \left(\frac{\dot{\sigma}\Theta}{\sigma_0} \right),$$

и линейное приближение дает

$$\Theta \cdot \dot{\gamma} = A \frac{\dot{\sigma}\Theta}{\sigma_0}.$$

Интегрируя, получаем $\gamma = \frac{A}{\sigma_0} \sigma$ или

$$\sigma = G \cdot \gamma \quad \text{— закон Гука.}$$

Такое приближение называется линейно упругим.

Среда называется однородной, если ее свойства не зависят от конкретной точки среды (от выбора начала координат).

Среда называется изотропной, если ее свойства не зависят от направления. Пример неизотропной среды — пьезокристалл, дерево и т.п.

Рассмотрим случай вязкого материала

$$\Theta \cdot \gamma = F \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right), \quad [\dot{\gamma}] = \frac{1}{[T]} = [\varepsilon^{ij}].$$

Будем считать сплошную среду однородной и изотропной.

Проблема замыкания исходной системы (3.3) – (3.5) сводится к установлению связи между тензором касательных напряжений τ^{ij} и тензором скоростей деформации ε^{ij} . Общий вид такой связи в случае изотропной, однородной и линейно-вязкой среды следующий:

$$\tau^{ij} = 2\eta \cdot \left(\varepsilon^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \cdot \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} \right) + \zeta \cdot \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} \cdot \delta^{ij}, \quad (3.7)$$

где η и ζ — 1-й и 2-й коэффициенты вязкости. Соотношение (3.7) доказано в [2].

Проблема. Найти вид этой связи в случае изотропной, однородной и нелинейно-вязкой среды.

Здесь стоит обратить внимание на то, что в линейном случае есть только один инвариант — след матрицы. Вид (3.7) связи обеспечивает переход инвариантов в инварианты. Так,

$$\tau^{11} + \tau^{22} + \tau^{33} = 3 \cdot \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

по определению давления.

Скажем, что жидкость несжимаема, если

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial\rho}{\partial x^\alpha} \ll \rho \cdot \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha}.$$

Тогда уравнение неразрывности имеет вид:

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0.$$

Тем самым, из линейной связи между тензором напряжений и тензором скоростей деформации автоматически следует несжимаемость.

3.3 Система уравнений Навье – Стокса

Рассмотрим законы сохранения (3.3), (3.4). Пусть

$$\sigma^{i\alpha} = -p\delta^{i\alpha} + \tau^{i\alpha}, \quad (3.8)$$

$\tau^{i\alpha}$ — тензор касательных напряжений. Замыкание системы (3.3) – (3.4) будем осуществлять, связывая тензор касательных напряжений с тензором скоростей деформации соотношением (3.7). Коэффициенты η и ζ , вообще говоря, зависят как от температуры, так и от материала. Пока будем считать их постоянными. Умножим (3.3) на v^i и полученное произведение вычтем из (3.4):

$$\rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{\partial \tau^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} + f^i. \quad (3.9)$$

Вычислим $\frac{\partial \tau^{i\alpha}}{\partial x^\alpha}$:

$$\frac{\partial \tau^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = \eta \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} = \eta \Delta v^i + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

и подставим в (3.9):

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} + \nu \Delta v^i + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{f^i}{\rho} \quad (3.10)$$

(здесь $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ — кинематическая вязкость). Запишем это уравнение в векторном виде:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial \bar{v}}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \bar{v} + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \bar{v} + \frac{\bar{f}}{\rho} \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) называют уравнением Стокса; количество неизвестных для четырех уравнений (3.3), (3.11) равно пяти: ρ , v^1 , v^2 , v^3 , p . Навье предложил замкнуть систему (3.3), (3.11), введя требование несжимаемости, а именно, потребовав, чтобы выполнялось условия $\operatorname{div} v = 0$. Тогда система (3.3), (3.10) запишется в виде

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} + \nu \Delta v^i + \frac{f^i}{\rho}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v^\alpha)}{\partial x^\alpha} &= 0. \end{aligned}$$

Если считать, что $\rho \equiv \text{const}$ (т.е. плотность не зависит от t и x), то получим систему Навье – Стокса; в векторном виде она имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{v} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \langle \bar{v}, \nabla \rangle \bar{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \bar{v} + \frac{\bar{f}}{\rho}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Замечание 1. В системе Навье – Стокса не участвует второй коэффициент вязкости ζ .

Замечание 2. Как уже говорилось выше, если связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформации линейная, то есть задается соотношением (3.7), то условие несжимаемости выполнено автоматически.

3.4 Закон подобия для системы Навье – Стокса

Рассмотрим систему уравнений Навье – Стокса (3.12). Пусть поток жидкости со скоростью U на бесконечности обтекает тело диаметра L . Перейдём к безразмерным координатам

$$x^i = L\xi^i, \quad t = \frac{L}{U}\tau, \quad p = \rho U^2 P, \quad v^i = U u^i. \quad \text{Имеем}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i}{\partial \tau} + u^\alpha \frac{\partial u^i}{\partial \xi^\alpha} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi^i} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial^2 u^i}{(\partial \xi^\alpha)^2}, \\ \frac{\partial u^\alpha}{\partial \xi^\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Величина $\operatorname{Re} = \frac{\rho U L}{\eta}$ в этом уравнении называется числом Рейнольдса. Два течения называются подобными, если в безразмерных координатах они описываются одинаковыми уравнениями, в частности, у них **одинаковые числа Рейнольдса**. Это имеет принципиальное значение для численного моделирования реальных течений.

Для потоков, с которыми приходится иметь дело при таком моделировании, числа Re велики, а коэффициенты $\frac{1}{\operatorname{Re}}$ малы. Поэтому значительный интерес представляет модель *идеальной несжимаемой жидкости*, когда $\operatorname{Re} = \infty$ (система уравнений Эйлера). На примерах мы увидим, что решение системы уравнений Эйлера существенно отличается от решений системы Навье – Стокса в малой окрестности обтекаемого тела. Более того, при $\operatorname{Re} > \operatorname{Re}_{\text{кр}}$. (критический $\operatorname{Re} \sim 2500$) течение перестает быть ламинарным (гладким) и становится турбулентным.

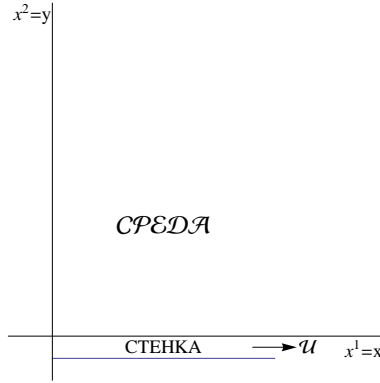
4 Задача Релея.

Рассмотрим вязкую сплошную среду, приводимую в движение стенкой, перемещающейся с постоянной скоростью U (см. рисунок). В задаче Релея движение среды происходит не за счет перепада давления и действия внешних сил, а за счет движения стенки, ограничивающей среду, т.е. предполагается, что $p = 0$ и $\bar{f} = 0$. Считаем, что $\rho = \text{const}$, среда несжимаема и связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформации линейна. Тогда движение описывается системой уравнений Навье – Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} &= 0, \\ \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} + \nu \Delta v^i. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для задачи Релея выполняются равенства

$$\bar{x} = (x, y, z), \quad \bar{v} = (v^1, v^2, v^3) = (u(y, t), 0, 0), \quad p = 0.$$



Поэтому (4.1) переписывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.2)$$

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$, т.е. получаем уравнение теплопроводности. Остальные уравнения (4.1) в этой задаче выполнены автоматически.

Рассмотрим следующие начальные и граничные условия

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= 0, \\ u|_{y=0} &= \mathcal{U} = \text{const}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Имеем $u = \varphi(t, y, \nu, U)$. Из физической постановки задачи следует, что $[y] = [L]$, $[t] = [T]$, $[U] = [u] = \frac{[L]}{[T]}$. Так как размерности правой и левой части (4.2) совпадают, то $[\nu] = \frac{[L]^2}{[T]}$. Мы будем рассматривать решение, которое пропорционально скорости U , т.е. решение вида $u = U \cdot f_0(t, y, \nu)$. Применим пи-теорему так же, как в задаче о фундаментальном решении, и получим

$$\frac{u}{\mathcal{U}} = f\left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}}\right). \quad (4.4)$$

Обозначим $\xi = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{U}} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} &= f'(\xi) \cdot \left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}}\right)_t = -f'(\xi) \cdot \frac{y}{2\sqrt{\nu t^3}}, \\ \frac{1}{\mathcal{U}} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} &= f'(\xi) \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu t}}, \quad \frac{1}{\mathcal{U}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(\xi) \cdot \frac{1}{\nu t}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Подставим (4.5) в уравнение (4.2), а также в начальные и граничные условия (4.3):

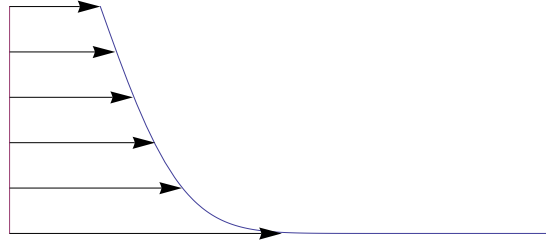
$$\begin{aligned} -f'(\xi) \cdot \frac{y}{2\sqrt{\nu t^3}} &= \nu \cdot f''(\xi) \cdot \frac{1}{\nu t}, \quad f(0) = 1, \quad f(+\infty) = 0, \quad \text{или} \\ f''(\xi) &= -\frac{1}{2} \xi f'(\xi), \quad \ln f'(\xi) = -\frac{\xi^2}{4} + \ln C, \\ f'(\xi) &= C e^{-\frac{\xi^2}{4}}, \quad f(0) = 1, \quad f(+\infty) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Поэтому

$$f(\xi) = C \int_0^\xi e^{-\frac{z^2}{4}} dz + 1, \quad 0 = C \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{4}} dz + 1, \quad C = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \text{и}$$

$$f(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{2\xi}^\infty e^{-z^2} dz, \quad u = \frac{2 \cdot \mathcal{U}}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2y}{\sqrt{\nu t}}}^\infty e^{-z^2} dz.$$

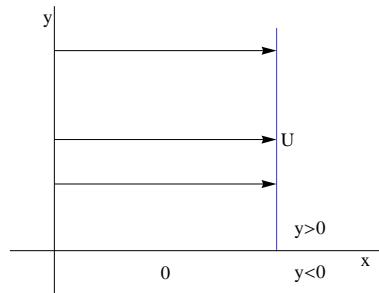
Таким образом, решение задачи Релея найдено и оно удовлетворяет всем требованиям о гладкости, которые предполагались при выводе (4.1). Фронт движущейся части среды в момент времени $t > 0$ при этом имеет вид



Однако почему у исходной системы, следствием которой является система уравнений Навье – Стокса, должны быть только достаточно гладкие решения (в предположении гладкости можно воспользоваться теоремой Гаусса – Остроградского и перейти от поверхностного интеграла к интегралу по области)? Например, почему нет решений, содержащих тангенциальные разрывы, и почему

$$u(y, t) = \begin{cases} \mathcal{U} & , y > 0, \\ 0 & , y \leq 0, \end{cases}$$

$t \geq 0$, не есть решение?



Рассмотрим соотношения Гюгонио (2.15) – (2.17). В нашем случае $p = 0$, направление нормали совпадает с осью y и поэтому $v^2 = 0$, а соотношения Гюгонио примут вид:

$$\rho \cdot v^2|_+ = \rho \cdot v^2|_-, \quad (4.7)$$

$$(\rho v^1 \cdot v^2 + \sigma^{12})|_+ = (\rho v^1 \cdot v^2 + \sigma^{12})|_-, \quad (4.8)$$

$$(\rho v^2 \cdot v^2 + \sigma^{22})|_+ = (\rho v^2 \cdot v^2 + \sigma^{22})|_-, \quad (4.9)$$

$$(\rho v^3 \cdot v^2 + \sigma^{32})|_+ = (\rho v^3 \cdot v^2 + \sigma^{32})|_-, \quad (4.10)$$

$$\left(\rho v^2 \left(E + \frac{(v^2)^2}{2} \right) + \langle \sigma, \bar{v} \rangle^2 + q^2 \right) \Big|_+ = \left(\rho v^2 \left(E + \frac{(v^2)^2}{2} \right) + \langle \sigma, \bar{v} \rangle^2 + q^2 \right) \Big|_-, \quad (4.11)$$

или (т.к. $v^2 = 0$)

$$\sigma^{i2}|_+ = \sigma^{i2}|_-, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(\sigma^{21}u + q^2)|_+ = (\sigma^{21}u + q^2)|_-.$$

Так как $\sigma^{i2} = -p\delta^{i2} + \tau^{i2} = \tau^{i2}$, то

$$\tau^{i2}|_+ = \tau^{i2}|_-, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\sigma^{21}u + q^2)|_+ = (\sigma^{21}u + q^2)|_-.$$

Тензор касательных напряжений связан с тензором скоростей деформации соотношением (3.7):

$$\tau^{ij} = 2\eta \left(\varepsilon^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} \right) + \zeta \delta^{ij} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha},$$

где $\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right)$. Отсюда $\tau^{12} = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$, $\tau^{22} = 2\eta \frac{\partial v^2}{\partial x^2} - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} + \zeta \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} = \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \operatorname{div} \bar{v} = 0$, $\tau^{32} = \eta \left(\frac{\partial v^3}{\partial x^2} + \frac{\partial v^2}{\partial x^3} \right) = 0$. Поэтому

$$\sigma^{21} = -\tau^{21} = -\eta \frac{\partial u}{\partial y} = -\tau^{12} = \sigma^{12},$$

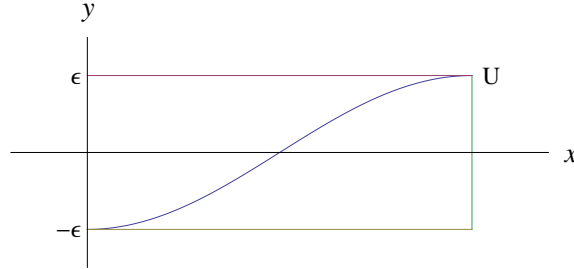
$$\left(-\eta \frac{\partial u}{\partial y} \cdot u + q^2 \right) \Big|_+ = \left(-\eta \frac{\partial u}{\partial y} \cdot u + q^2 \right) \Big|_-.$$

Нетривиальными соотношениями на поверхности разрыва будут:

$$\eta \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_+ = \eta \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_- \quad \text{и} \quad (4.12)$$

$$\left(-\eta \frac{\partial u}{\partial y} \cdot u + q^2 \right) \Big|_+ = \left(-\eta \frac{\partial u}{\partial y} \cdot u + q^2 \right) \Big|_-. \quad (4.13)$$

Рассмотрим эти соотношения подробнее. Введем силу f_ε и сгладим разрыв:



Тогда уравнение (4.1) примет вид

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_\varepsilon. \quad (4.14)$$

Проинтегрируем (4.14) по y :

$$\eta \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \eta \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon dy.$$

Соотношение (4.12) означает отсутствие сосредоточенной силы на поверхности разрыва. Умножим (4.14) на y и проинтегрируем

$$\eta \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \eta y \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} - \eta \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial y} dy = \eta y \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} - \eta u \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} y f_\varepsilon dy.$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Получаем, что непрерывность скорости $u(t, y)$ на поверхности разрыва (при $y = 0$) означает отсутствие сосредоточенного момента.

Теперь умножим (4.14) на u и проинтегрируем:

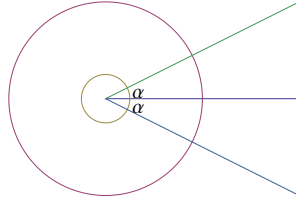
$$\begin{aligned} \eta \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u f_{\varepsilon} dy, \\ \eta u \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} - \eta \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u f_{\varepsilon} dy, \\ q^2 \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} &= \eta \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u f_{\varepsilon} dy. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем, что количество тепла, выделяемого на поверхности разрыва, определяется работой, производимой силами, сосредоточенными на поверхности разрыва.

5 Течение в конфузоре и диффузоре (источник-сток)

Исследование уравнений, описывающих состояние вязкой несжимаемой жидкости, обычно связано с трудностями, которые возникают из-за нелинейных членов. Точное решение для них может быть получено редко и именно поэтому задачи, которые имеют такое точное решение, представляют большой интерес. Одной из таких задач как раз и является задача о течении жидкости в конфузоре и диффузоре.

Определим движение жидкости между двумя плоскими стенками, расположенными друг к другу под углом.



Введем цилиндрические координаты $\bar{x} = (r, \theta, z)$ и обозначим через $v_r(\bar{x})$ проекцию вектора \bar{v} на прямую, проходящую через 0 и \bar{x} , а через $v_{\theta}(\bar{x})$ — проекцию \bar{v} на прямую, ортогональную вектору \bar{x} . Рассмотрим течение вида:

$$\begin{cases} v_r = v(r, \theta), \\ v_{\theta} = v_z = 0, \\ p = p(r, \theta). \end{cases}$$

Для такого течения система Навье – Стокса имеет вид:

$$v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (5.1)$$

$$-\frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad (5.3)$$

(см. в [5] систему уравнений Навье – Стокса, записанную в полярной системе координат).

Для идеальной жидкости ($\nu = 0, \text{Re} = \infty$) решение в цилиндрической системе координат имеет вид

$$v_r = \frac{Q}{2\pi r}, \quad v_{\theta} = 0, \quad v_z = 0; \quad (5.4)$$

здесь Q — мощность источника ($Q > 0$) или стока ($Q < 0$), трение о стенки при $\theta = \pm\alpha$ отсутствует.

Заметим, что неизвестные $\frac{p}{\rho}$ и v зависят от следующих переменных (ниже указаны их размерности):

$$\frac{p}{\rho} = \varphi_1(Q, r, \theta, \alpha, \nu), \quad v = \varphi_2(Q, r, \theta, \alpha, \nu).$$

Так как $[p] = \frac{[M] \cdot [L]}{[T]^2} \cdot \frac{1}{[L]^2}$ (давление — это отношение силы к площади), а $[\rho] = \frac{[M]}{[L]^3}$ (плотность — это отношение массы к объему), то $\left[\frac{p}{\rho}\right] = \frac{[L]^2}{[T]^2}$. Далее, $[v] = \frac{[L]}{[T]}$, $[Q] = \frac{[L]^2}{[T]}$, $[r] = [L]$, $[\theta] = 1$, $[\alpha] = 1$, $[\nu] = \frac{[L]^2}{[T]}$.

Применим пи-теорему. В качестве максимальной независимой системы выберем (Q, r) и получим

$$v = \frac{Q}{r} u \left(\theta, \alpha, \frac{\nu}{Q} \right), \quad \frac{p}{\rho} = \frac{Q^2}{r^2} P \left(\theta, \alpha, \frac{\nu}{Q} \right), \quad (5.5)$$

где u и P — неизвестные функции. Условие несжимаемости (5.3) выполняется автоматически. Подставим выражения для v и $\frac{p}{\rho}$ из (5.5) в (5.2):

$$-\frac{Q^2}{r^3} \frac{dP}{d\theta} + \frac{2\nu Q}{r^3} \frac{du}{d\theta} = 0,$$

или

$$\frac{Q}{\nu} \frac{dP}{d\theta} = 2 \frac{du}{d\theta}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$P(\theta) = \frac{2\nu}{Q} (u(\theta) - C_1). \quad (5.6)$$

Подставим выражения (5.5) и (5.6) в (5.1):

$$-\frac{Q^2}{r^3} u^2 = \frac{4Q\nu}{r^3} (u - C_1) + \nu \left(\frac{2Q}{r^3} u - \frac{Q}{r^3} u + \frac{Q}{r^3} u'' - \frac{Q}{r^3} u \right)$$

или

$$u'' + 4u + \frac{Q}{\nu} u^2 = 4C_1.$$

Умножив равенство на u' и проинтегрировав, получаем

$$\frac{(u')^2}{2} + 2u^2 + \frac{Q}{3\nu} u^3 = 4C_1 u + 4C_2.$$

Отсюда

$$2\theta = \pm \int \frac{du}{\sqrt{2C_2 + 2C_1 u - \frac{Q}{6\nu} u^3 - u^2}}. \quad (5.7)$$

Константы интегрирования однозначно определяются из условий прилипания при $\theta = \pm\alpha$ и мощностью источника (стока). Здесь роль числа Рейнольдса играет отношение $Re = \frac{Q}{\nu}$ (безразмерная величина).

Это выражение определяет искомую зависимость скорости u от Q . Величина Q может быть как положительной, так и отрицательной.

Если $Q < 0$, то жидкость направлена в точку 0, которая является стоком. В этом случае говорят о течении в конфузоре. В этом случае интеграл положителен. Влияние вязкости проявляется только в узком слое вблизи стенок, где значение скорости, соответствующее истоку, падает до нуля.

Если $Q > 0$, то такое течение называется диффузорным.

В случае, если мощность источника невелика, под корнем в подынтегральном выражении будет положительная величина. С увеличением Q (т.е. увеличением числа Рейнольдса) выражение под знаком корня может стать отрицательным. Поэтому симметричное расходящееся течение в диффузоре возможно при условии, $0 < \frac{Q}{\nu} < Re_1$, то есть чисел Рейнольдса, не превышающих значения Re_1 .

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса, определяющихся условием $Re_1 \leq \frac{Q}{\nu} \leq Re_2$ будет решение, соответствующее одному максимуму и одному минимуму, при этом движение будет асимметричным. Далее при увеличении Re возникает симметричное решение с одним максимумом и двумя минимумами.

При $Re \rightarrow \infty$ число чередующихся максимумов и минимумов возрастает так, что не существует никакого предельного решения.

Сделаем вывод: при $Re \rightarrow \infty$ решение при конфузоре стремится к уравнению Эйлера, а при диффузоре в случае $Re > Re_{\max}$ движение делается неустойчивым — возникает турбулентность.

6 Идеальная несжимаемая жидкость.

Жидкость называется идеальной, если коэффициенты вязкости равны нулю. Предположим, что $\rho(t, x)$ является константой (здесь x — трехмерный вектор). Тогда уравнения, описывающие движение идеальной несжимаемой жидкости, имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \langle v, \nabla \rangle v = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{f}{\rho}, \quad \operatorname{div} v = 0. \quad (6.1)$$

Это уравнение называется уравнением Эйлера.

Будем считать, что жидкость все время заполняет область Ω . В частности, для любых $t, \tilde{t} \in \mathbb{R}$ и для любой точки $x \in \Omega$ найдется точка $\tilde{x} \in \Omega$ такая, что если частица жидкости в момент времени t расположена в точке x , то в момент \tilde{t} она перейдет в точку \tilde{x} .

Имеет место теорема Лагранжа.

Теорема 3. *Предположим, что сила f потенциальна, т.е. $f = \nabla U$. Тогда если $\operatorname{rot} v|_{t=0} = 0$, то $\operatorname{rot} v = 0$.*

Доказательство. Движение жидкости задается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = v(t, x). \quad (6.2)$$

Тогда каждому $t \geq 0$ можно сопоставить диффеоморфизм $g^t : \Omega \rightarrow \Omega$ следующим образом: если $y \in \mathbb{R}^3$, то $g^t(y)$ — решение уравнения с начальным условием $x(0) = y$. При этом $g^t(y)$ гладко по совокупности (t, y) .

Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ — параметризация гладкой замкнутой кривой, $\gamma_t = g^t \circ \gamma$. Покажем, что

$$\int_{\gamma_t} v(t, x(t)) dl = \operatorname{const}. \quad (6.3)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} v(t, x(t)) dl &= \frac{d}{dt} \int_0^1 v(t, g^t \circ \gamma(s)) \frac{d}{ds} g^t \circ \gamma(s) ds = \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t}(t, \gamma_t(s)) + \langle v, \nabla \rangle v(t, \gamma_t(s)) \right) \frac{d}{ds} \gamma_t(s) ds + \\
&\quad + \int_0^1 v(t, \gamma_t(s)) \frac{d}{ds} v(t, \gamma_t(s)) ds = \\
&= \frac{1}{\rho} \int_0^1 (-\nabla p + \nabla U) \frac{d}{ds} \gamma_t(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^1 d|v|^2(t, \gamma_t(s)) = \frac{1}{\rho} \int_{\gamma_t} (-\nabla p + \nabla U) dl = 0.
\end{aligned}$$

Если γ является границей поверхности S , то по формуле Стокса из (6.3) получаем

$$\int_{g^t S} \operatorname{rot} v(t, x(t)) dS = \operatorname{const}.$$

В частности, если $\operatorname{rot} v(0, x) = 0$ для любого x , то для любого t выполнено $\operatorname{rot} v(t, x(t)) = 0$. В самом деле, если $\operatorname{rot} v(t, x) \neq 0$ в некоторой точке x , то возьмем достаточно малый участок плоскости S , проходящий через точку x и ортогональный вектору $\operatorname{rot} v(t, x)$, и для него получим, что $\int_S \operatorname{rot} v dS \neq 0$ — противоречие. \square

Есть другой способ доказательства теоремы Лагранжа. Обозначим $\omega = \operatorname{rot} v$. Непосредственной проверкой доказывается, что

$$\langle v, \nabla \rangle v = \frac{1}{2} \nabla(|v|^2) + [\operatorname{rot} v, v], \quad (6.4)$$

$$\operatorname{rot} [a, b] = \langle b, \nabla \rangle a - \langle a, \nabla \rangle b + a \operatorname{div} b - b \operatorname{div} a.$$

Уравнение (6.1) переписывается в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(|v|^2) + [\operatorname{rot} v, v] = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nabla \left(\frac{U}{\rho} \right), \quad \operatorname{div} v = 0.$$

Применив к этому равенству операцию rot , учитывая условие $\operatorname{div} v = 0$ и соотношения $\operatorname{rot} \nabla = 0$, $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$, получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \langle v, \nabla \rangle \omega - \langle \omega, \nabla \rangle v = 0.$$

Пусть $\omega(t) = \omega(t, x(t))$, где $x(t)$ — траектория движения частицы жидкости, и пусть $\omega(0) = 0$. Тогда $\frac{d\omega}{dt} = \langle \omega, \nabla \rangle v$. По теореме единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения, $\omega(t) = 0$ для любого t .

Если область, в которой находится жидкость, односвязна, то условие $\operatorname{rot} v = 0$ эквивалентно существованию скалярной функции φ такой, что $v = \nabla \varphi$ (для неодносвязной области иногда рассматривают многозначную функцию φ). Из условия несжимаемости следует, что

$$\Delta \varphi = 0. \quad (6.5)$$

Если граница области Γ задана и неподвижна, то для функции v , как правило, пишется условие непроницаемости $\langle v, n \rangle = 0$, где n — нормаль к Γ . Значит, $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. Учитывая (6.5), получаем задачу Неймана. Если область ограничена, то нетривиальное (не являющееся константой) решение возможно только при наличии особенностей. Если область бесконечна, то для корректной постановки задачи еще нужно задать условие на бесконечности.

Поскольку $\operatorname{rot} v = 0$, то $\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{|v|^2}{2} \stackrel{(6.4)}{=} \langle v, \nabla \rangle v^i$. Значит, из

$$v_t + \langle v, \nabla \rangle v = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nabla \left(\frac{U}{\rho} \right)$$

следует, что

$$\nabla \left(\varphi_t + \frac{|v|^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \frac{U}{\rho} \right) = 0,$$

т.е.

$$\varphi_t + \frac{|v|^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \frac{U}{\rho} = \Phi(t).$$

Последнее равенство называется *интегралом Коши–Лагранжа*.

Если движение стационарное, т.е. все функции не зависят от t , то

$$\frac{|v|^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \frac{U}{\rho} = \text{const.}$$

Это равенство называется *тождеством* или *интегралом Бернулли*.

6.1 Интеграл Бернулли в случае непотенциального течения

Оказывается, тождество Бернулли в двумерном случае будет верно и в случае непотенциального течения.

Линией тока (вихря) называется кривая, касательная к которой в каждой точке совпадает со скоростью (соответственно с вихрем):

$$\frac{dx^1}{v^1} = \frac{dx^2}{v^2}, \quad \text{соответственно} \quad \frac{dx^1}{\omega^1} = \frac{dx^2}{\omega^2}.$$

Рассмотрим более общий случай, когда плотность зависит от точки, а потенциальным является поле $\frac{f}{\rho}$, т.е. $\frac{f}{\rho} = \nabla V$. Если движение стационарно, то

$$\frac{1}{2} \nabla (|v|^2) + [\operatorname{rot} v, v] = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla V, \quad \operatorname{div} v = 0.$$

Рассмотрим проекцию на линию тока (вихря):

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{|v|^2}{2} \right) = -\frac{\partial V}{\partial s} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}. \quad (6.6)$$

Здесь s — параметр на линии тока (вихря). Обозначим через N “номер” линии (т.е. каждая линия из семейства определяется параметром N). Имеем $p = p(s, N)$, $\rho = \rho(s, N)$. Предположим, что из последних соотношений можно исключить s (т.е. выполнены условия теоремы о неявной функции). Тогда $\rho = \varphi(p, N)$. Положим

$$\Phi(\rho, N) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp}{\varphi(p, N)}.$$

Уравнение (6.6) переписывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{|v|^2}{2} \right) = -\frac{\partial V}{\partial s} - \frac{\partial \Phi}{\partial s}.$$

Значит,

$$\frac{|v|^2}{2} + V + \Phi = C(N)$$

(величина зависит от линии тока или вихря, но не зависит от параметра этой линии).

6.2 Плоскопараллельное течение

Движение называется плоскопараллельным, если существует такая декартова система координат (x, y, z) , в которой вектор скорости имеет вид $(u(x, y), v(x, y), 0)$. Условия несжимаемости и потенциальности записываются соответственно в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Тогда существуют такие функции φ и ψ , что $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v$, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u$. Отсюда видно, что функция $f(x + iy) := \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ удовлетворяет условиям Коши – Римана, поэтому является аналитической. Заметим также, что линии уровня функций φ и ψ взаимно ортогональны, при этом линии уровня функции ψ совпадают с траекториями движения (поэтому ψ называется функцией тока).

Рассмотрим задачу обтекания. Пусть в \mathbb{R}^2 задана односвязная ограниченная область с гладкой границей. Требуется в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ найти такую гармоническую функцию φ , что на $\partial\Omega$ выполнено условие непроницаемости $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, а на бесконечности — $\nabla \varphi(x, y) \xrightarrow{x^2+y^2 \rightarrow \infty} (U_\infty, V_\infty)$.

По теореме Римана и теореме о соответствии границ, найдется конформное отображение w области $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ на дополнение единичного круга, непрерывное вплоть до границы, при этом $\partial\Omega$ переходит в единичную окружность. Итак, наша задача распалась на две:

1. найти это конформное отображение,
2. решить задачу обтекания для круга.

Мы рассмотрим задачу обтекания круга радиуса R . Подберем такую аналитическую функцию $f(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$, что $\psi|_{|z|=R} = \text{const}$. Тогда окружность переходит в горизонтальный отрезок. Вспоминаем, что для $R = 1$ таким свойством обладает функция Жуковского $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. Для круга радиуса R и условия на бесконечности $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \nabla \varphi(x, y) = (U_\infty, 0)$ искомой является функция $f(z) = U_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right)$. Перейдя снова к вещественным переменным, получаем

$$\varphi(x, y) = U_\infty \left(x + \frac{R^2 x}{x^2 + y^2} \right), \quad \psi(x, y) = U_\infty \left(y - \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \right).$$

Задача о построении конформного отображения круга на односвязную область в общем случае является сложной. Различные приближенные методы описаны в [4, 6, 7]. Кратко опишем идею некоторых из них.

1. Приближим область многоугольником. Если ее граница достаточно хорошая, то соответствующее конформное отображение близко к искомому в равномерной метрике. Единичный круг на многоугольник отображается с помощью интеграла Кристоффеля – Шварца

$$w(z) = A \int_1^z (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1} d\zeta + B,$$

где α_j — значение угла при j -й вершине, A, B, a_j — неопределенные постоянные. Трудность состоит в нахождении a_j . Один из способов их определения состоит в использовании так называемых обобщенных степенных рядов [6].

2. М.А. Лаврентьевым были найдены приближенные формулы для конформных отображений областей, близких к тем областям, отображения которых на канонические известны. При этом использовался вариационный принцип Линдлефа и его обобщения.
3. В [6] описан метод последовательных конформных отображений области, содержащейся в верхней полуплоскости, на верхнюю полуплоскость. Для широкого класса областей он позволяет получить сколь угодно высокую степень точности приближения. Сначала строится отображение области

$$G = \left\{ x + iy : y > 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1 \right\}$$

на верхнюю полуплоскость так, чтобы полуэллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y \geq 0$, перешел в отрезок $|x| \leq a + b, y = 0$. Для этого сначала полуэллипс с помощью отображения $\tau = \frac{z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2}}{a + b}$ переводится в единичную полуокружность, которая с помощью функции Жуковского и гомотетии переводится в отрезок. Затем для области $\{x + iy : y > \varphi(x)\}$, где φ — положительная гладкая функция, строится последовательность конформных отображений. На каждом шаге берутся три точки на границе области, через них проводится полуэллипс, и затем строится отображение, переводящее его в горизонтальный отрезок. Обратное отображение полуплоскости на область получается как композиция обратных отображений, которые явно вычисляются по уже найденным точкам.

В [7] рассмотрены методы отображения более сложных областей.

6.3 Теория Жуковского.

Пусть идеальная жидкость обтекает плоское тело, имеющее форму сечения крыла самолета (соответствующая область имеет заострение в одной точке, в остальных точках граница гладкая). Такую область можно построить, применив функцию Жуковского к разности двух касающихся кругов. Считаем, что на острие скорость и давление равны нулю.

Применив конформное отображение, сводим исходную задачу к задаче обтекания круга. Здесь граничные условия будут отличаться от тех, которые были рассмотрены в предыдущем параграфе. Снова считаем, что $f(\zeta) = \varphi(\zeta) + i\psi(\zeta)$, $\psi|_{r=R} = \text{const}$. Пусть острие перешло при конформном отображении в точку $\zeta_0 = Re^{i\theta_0}$. Тогда

$$\left. \frac{df}{d\zeta} \right|_{\zeta=\zeta_0} = 0. \quad (6.7)$$

Рассмотрим функцию

$$f(\zeta) = V \left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta.$$

Первое слагаемое совпадает с функцией, рассмотренной в предыдущем параграфе. Мнимая часть второго слагаемого равна $-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$ и поэтому постоянна при $r = R$. Условие (6.7) имеет вид $V - \frac{VR^2}{\zeta_0^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i \zeta_0} = 0$. Сделав подстановку $\zeta_0 = Re^{i\theta_0}$, получаем $\Gamma = 4\pi RV \sin \theta_0$.

Пусть p — давление идеальной жидкости. Тогда сила, действующая на бесконечно малую площадку $d\bar{S}$ границы обтекаемого тела, равна

$$dF = -p d\bar{S} = p \cdot R(-\cos \theta, -\sin \theta) d\theta.$$

Давление найдем, воспользовавшись постоянством интеграла Бернулли $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \frac{U}{\rho}$. Функция U — это потенциал гравитационной силы, считаем, что обтекаемое тело имеет достаточно малые размеры и $U = \text{const}$. Так как в точке ζ_0 выполнено $v = 0$, $p = 0$, то $p = -\frac{\rho v^2}{2}$. Далее, $v = \nabla \varphi$, $\varphi = Vr \cos \theta + \frac{VR^2}{r} \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$, так что

$$v_r|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad v_\theta|_{r=R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{r=R} = \frac{1}{R} \left(2VR \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \right)$$

(здесь v_r — проекция вектора скорости $v(r, \theta)$ на ось, проходящую через 0 и точку (r, θ) , v_θ — проекция вектора скорости, перпендикулярная v_r). Отсюда

$$p = -\frac{\rho}{2} \left(2V \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2.$$

Подъемная сила равна проекции силы F на ось y , то есть

$$\frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \left(2V \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 R \sin \theta d\theta = -\rho V \Gamma.$$

Соппротивление равно проекции силы F на ось x , то есть

$$\frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \left(2V \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 R \cos \theta d\theta = 0$$

(парадокс Даламбера).

6.4 Осесимметрическое течение.

Пусть \bar{r} — трехмерный вектор, \bar{v} — вектор скорости. Течение называется осесимметрическим, если найдется цилиндрическая система координат (x, r, α) со следующим свойством: все векторы скорости $\bar{v}(\bar{r})$ лежат в полуплоскости, проходящей через ось x и точку \bar{r} , и не зависят от координаты α . Если движение потенциально и жидкость несжимаема, то соответствующая гармоническая функция φ зависит только от x и r .

Рассмотрим одну из таких полуплоскостей и функцию $\varphi = \varphi(x, r)$ в этой полуплоскости. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \equiv \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right) = 0.$$

Это равенство можно рассматривать как условие потенциальности для векторного поля $(-r\frac{\partial\varphi}{\partial r}, r\frac{\partial\varphi}{\partial x})$. Введем сопряженную функцию ψ , удовлетворяющую равенствам

$$r\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (6.8)$$

Функция $f = \varphi + i\psi$ не является аналитической. Все функции такого вида, являющиеся решением системы (6.8), задают класс квазиконформных отображений (определение и свойства таких отображений приведены, например, в [4]; в частности, имеет место аналог теоремы Римана о конформном отображении).

Рассмотрим некоторые примеры решений уравнения Лапласа. Решения, зависящие только от r или только от x , имеют соответственно вид $\varphi = a \ln r + b$ и $\varphi = ax + b$. Подбирая функции ψ , удовлетворяющие (6.8), и выбирая некоторую нормировку, получаем функции

$$Z^1 = \ln r - ix, \quad Z^2 = 2x + ir^2.$$

Аналогично можно найти гармонические полиномы φ произвольной степени² и соответствующие функции Z^n .

Теперь рассмотрим решение трехмерного оператора Лапласа с особенностью в нуле: $\varphi = \frac{1}{R}$, где $R = \sqrt{r^2 + x^2}$. Найдем сопряженную функцию ψ . Учитывая вид уравнений (6.8) и функции φ , удобно искать решение в виде $\psi(x, r) = \frac{g(x, r)}{R}$. Тогда получается система

$$R^2\frac{\partial g}{\partial r} - rg = -rx, \quad R^2\frac{\partial g}{\partial x} - xg = r^2.$$

Умножим первое уравнение на x , второе на r и вычтем одно из другого. Сократив на R^2 , получаем $r\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial r} = r$. Отсюда видно, что $g(x, r) = x$ является решением. Тем самым, $\psi = \frac{x}{R}$, так что получается комплекснозначная функция $Z^{-1} = \frac{1+ix}{R}$. Функции Z^{-n} определяются по формулам

$$Z^{-n} = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{1}{R} + i\frac{x}{R} \right) = \varphi + i\psi,$$

при этом $\Delta\varphi = 0$ и ψ удовлетворяет (6.8). В частности, $Z^{-2} = \frac{-x+ir^2}{R^3}$.

Посмотрев на эти решения, можно подобрать такую функцию $f = \varphi + i\psi$, что $\psi|_{R=R_0} = \text{const}$:

$$f = \beta Z^2 - \mu Z^{-2}.$$

Тогда $\psi(x, r) = \beta r^2 - \mu\frac{r^2}{R^3}$, поэтому $\psi|_{r=0} = 0$, $\psi|_{R=R_0} = 0$, где $R_0 = \left(\frac{\mu}{\beta}\right)^{1/3}$. Для функции $\varphi(x, r) = 2\beta x + \frac{\mu x}{R^3}$ выполнено $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2\beta$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$ (т.е. скорость течения на бесконечности параллельна оси x и равна $U_\infty = 2\beta$).

Если $\beta = \mu$, то $\varphi = \beta x \left(2 + \frac{1}{R^3}\right)$. Если ввести полярные координаты $x = R \cos \theta$, то касательная к окружности радиуса R составляющая вектора скорости равна $\frac{1}{R} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$. Значит, на единичной окружности $v = -3\beta \sin \theta = -\frac{3}{2}U_\infty \sin \theta$.

Тем самым, мы решили задачу обтекания шара и нашли скорость проскальзывания. Это мы будем использовать при рассмотрении задач о пограничном слое.

²Например, через шаровые функции, которые, в свою очередь, находятся методом разделения переменных — см. [9].

7 Теорема вложения Соболева.

7.1 Пространства Соболева и их свойства.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область. Для $1 < p < \infty$ пространством Соболева $W_p^1(\Omega)$ называется множество функций

$$\left\{ f \in L_p(\Omega) \mid \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_p(\Omega), j = \overline{1, d} \right\},$$

где производные понимаются в обобщенном смысле. Норма на этом пространстве задается формулой

$$\|f\|_{W_p^1(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \left(\sum_{j=1}^d \int_{\Omega} |f_{x_j}(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Предложение 1. *Пространство Соболева является полным.*

Скажем, что $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, если существует функция $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ такая, что $f = \tilde{f}|_{\Omega}$; $f \in C^\infty(\Omega)$, если f бесконечно дифференцируема на (открытом) множестве Ω .

Область Ω называется областью с липшицевой границей, если для любого $x \in \partial\Omega$ найдется окрестность $U(x)$ и декартова система координат такие, что $U(x) \cap \partial\Omega$ в этой системе координат представляется в виде графика липшицевой функции.

Предложение 2. *Если Ω — ограниченная область, то множество $C^\infty(\Omega)$ плотно в $W_p^1(\Omega)$. Если Ω — ограниченная область с липшицевой границей, то множество $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $W_p^1(\Omega)$.*

Доказательство этих утверждений будет приведено в Дополнении (первое из них простое; второе будет доказано в частном случае для областей, звездных относительно некоторого шара³).

Пространством $\mathring{W}_p^1(\Omega)$ называется замыкание в $W_p^1(\Omega)$ множества $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно гладких функций с компактным носителем.

Сформулируем теорему вложения Соболева [10, 11].

Теорема 4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ограничена.*

1. *если $p > d$, то $\mathring{W}_p^1(\Omega) \subset C(\Omega)$ и существует такое $M = M(p, d, \Omega)$, что*

$$\|f\|_{C(\Omega)} \leq M \|\nabla f\|_{L_p(\Omega)}, f \in \mathring{W}_p^1(\Omega).$$

При этом, оператор вложения является компактным;

2. *если $p \leq d$, $1 \leq q < \infty$ и $\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$, то $\mathring{W}_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ и существует такое $M = M(p, q, d, \Omega)$, что*

$$\|f\|_{L_q(\Omega)} \leq M \|\nabla f\|_{L_p(\Omega)}, f \in \mathring{W}_p^1(\Omega).$$

При этом, оператор вложения является компактным.

³Общий случай сводится к этому с помощью гладкого разбиения единицы.

Эта теорема будет доказана в следующем параграфе.

Простым следствием теорем вложения является неравенство Фридрикса: если область Ω ограничена, то существует число $\tilde{M}(p, d, \Omega) > 0$ такое, что для любого $f \in \dot{W}_p^1(\Omega)$ выполнено

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq \tilde{M}(p, d, \Omega) \|\nabla f\|_{L_p(\Omega)}. \quad (7.1)$$

Поэтому на пространстве $\dot{W}_p^1(\Omega)$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|f\|_{\dot{W}_p^1(\Omega)} = \|\nabla f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Подробнее о пространствах Соболева написано, например, в [10], [12]. В частности, там доказаны различные усиления и обобщения теорем вложения.

7.2 Доказательство теорем вложения Соболева.

Лемма 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $l > 0$,

$$Tf(x) = \int_{\Omega} |x - y|^{l-d} f(y) dy, \quad x \in \Omega.$$

1. Если $\frac{l}{d} > \frac{1}{p}$, то для любой функции $f \in L_p(\Omega)$ выполнено $Tf \in C(\Omega)$ и оператор $T : L_p(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ ограничен.
2. Если $1 \leq q < \infty$, $\frac{l}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$, то для любой функции $f \in L_p(\Omega)$ выполнено $Tf \in L_q(\Omega)$ и оператор $T : L_p(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega)$ ограничен.

Доказательство. Всюду будем считать, что функция f продолжена нулем вне Ω . Обозначим через R диаметр множества Ω . Из условия $f(y) \neq 0$ следует, что $y \in \Omega$, поэтому если $x \in \Omega$, то $|x - y| \leq R$.

Пусть $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Покажем, что функция Tf непрерывна. В самом деле,

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |x - y|^{l-d} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} |z|^{l-d} f(x - z) dz = \int_{B_R(0)} |z|^{l-d} f(x - z) dz,$$

$$|Tf(x) - Tf(x_0)| \leq \int_{B_R(0)} |z|^{l-d} |f(x - z) - f(x_0 - z)| dz \leq$$

$$\leq c(d) \sup_{|z| \leq R} |f(x - z) - f(x_0 - z)| \int_0^R r^{l-1} dr \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

в силу равномерной непрерывности функции f . Здесь $c(d)$ — положительная величина, зависящая только от d , возникающая при переходе к сферическим координатам.

Докажем первое утверждение. Из неравенства Гельдера следует, что для любого $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} |x - y|^{l-d} f(y) dy \right| &\leq \left(\int_{\Omega} |x - y|^{p'(l-d)} dy \right)^{1/p'} \|f\|_{L_p(\Omega)} \leq \\ &\leq \left(\int_{B_R(0)} |z|^{p'(l-d)} dz \right)^{1/p'} \|f\|_{L_p(\Omega)} \leq c(d)^{1/p'} \left(\int_0^R r^{p'(l-d)+d-1} dr \right)^{1/p'} \|f\|_{L_p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Неравенство $\frac{l}{d} > \frac{1}{p}$ эквивалентно неравенству $p'(l-d) + d > 0$, так что интеграл в правой части сходится.

Докажем второе утверждение. Без ограничения общности можно считать, что $p < q$. В самом деле, пусть $p \geq q$. Выберем такое $q_1 > p$, что $\frac{l}{d} + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p} > 0$. Так как $L_{q_1}(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ и это вложение непрерывно, то из $\|T\|_{L_p(\Omega) \rightarrow L_{q_1}(\Omega)} < \infty$ следует, что $\|T\|_{L_p(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega)} < \infty$.

Пусть $l-d = a+b$ (числа a и b выберем позже). Из неравенства Гельдера следует, что

$$\left(\int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} f(y) |x-y|^{l-d} dy \right|^q dx \right)^{1/q} \leq M_1 M_2,$$

где

$$M_1 = \sup_{x \in \Omega} \left(\int_{\Omega} |x-y|^{bp'} dy \right)^{1/p'}, \quad M_2 = \left(\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |f(y)|^p |x-y|^{ap} dy \right)^{q/p} dx \right)^{1/q}.$$

Оценим M_1 :

$$M_1^{p'} \leq \int_{B_R(0)} |z|^{bp'} dz = c(d) \int_0^R r^{bp'+d-1} dr < \infty,$$

если $bp' + d > 0$, т.е.

$$a < l - \frac{d}{p}. \tag{7.2}$$

Оценим M_2 . Пусть $\theta = \frac{q}{p}$. В силу неравенства Гельдера,

$$\begin{aligned} M_2 &\leq \left(\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |f(y)|^p |x-y|^{ap\theta} dy \right)^{\frac{q}{p\theta}} \left(\int_{\Omega} |f(z)|^p dz \right)^{\frac{q}{p\theta}} dx \right)^{1/q} = \\ &= \|f\|_{L_p(\Omega)}^{\frac{1}{\theta}} \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} |f(y)|^p |x-y|^{ap\theta} dy dx \right)^{1/q} = \\ &= \|f\|_{L_p(\Omega)}^{\frac{1}{\theta}} \left(\int_{\Omega} |f(y)|^p \int_{\Omega} |x-y|^{ap\theta} dx dy \right)^{1/q} =: M_3. \end{aligned}$$

Для любого $y \in \Omega$ выполнено

$$\int_{\Omega} |x-y|^{ap\theta} dx \leq \int_{B_R(0)} |z|^{ap\theta} dz = c(d) \int_0^R r^{ap\theta+d-1} dr = C(a, d, p, q, R) < \infty,$$

если $ap\theta + d > 0$, то есть

$$a > -\frac{d}{q}. \tag{7.3}$$

В этом случае

$$M_3 \leq C^{\frac{1}{q}}(a, d, p, q, R) \left(\int_{\Omega} |f(y)|^p dy \right)^{1/q} \|f\|_{L_p(\Omega)}^{1/\theta'} = C^{\frac{1}{q}}(a, d, p, q, R) \|f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Остается заметить, что существование числа a , удовлетворяющего (7.2) и (7.3), следует из условия $\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$. \square

Замечание 1. Мы будем использовать эту лемму для $l = 1$.

Замечание 2. В [10] доказано, что при $1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = 0$ оператор $T : L_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_q(\mathbb{R}^d)$ ограничен (теорема Адамса о потенциалах). Отсюда следует второе утверждение леммы 1.

Лемма 2. Пусть $K = [0, 1]^d$, $K' = [0, 1]^{d-1} \times [\frac{1}{4}, 1]$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$. Тогда для каждой функции $f \in W_p^1(K)$ найдется константа $a = a(f)$ такая, что

$$\|f - a\|_{L_q(K')} \leq C \|\nabla f\|_{L_p(K)}. \quad (7.4)$$

Доказательство. Для каждого $z \in [0, 1]^{d-1} \times \{0\}$ положим $\varphi_z(t) = f((1-t)z + tx)$, $t \in [0, 1]$. Тогда

$$f(x) - f(z) = \varphi_z(1) - \varphi_z(0) = \int_0^1 \frac{d\varphi_z(t)}{dt} dt = \int_0^1 \langle \nabla f((1-t)z + tx), x - z \rangle dt. \quad (7.5)$$

Для $\zeta \in [0, 1]^{d-1}$ обозначим $z(\zeta) = (\zeta, 0)$. Проинтегрировав (7.5) по $\zeta \in [0, 1]^{d-1}$ и положив $a = \int_{[0, 1]^{d-1}} f(z(\zeta)) d\zeta$, получаем

$$f(x) - a = \int_{[0, 1]^{d-1}} \int_0^1 \langle \nabla f((1-t)z(\zeta) + tx), x - z(\zeta) \rangle dt d\zeta,$$

$$|f(x) - a| \leq \int_{[0, 1]^{d-1}} d\zeta \int_0^1 |\nabla f((1-t)z(\zeta) + tx)| \cdot |x - z(\zeta)| dt.$$

Пусть $G_x = \{(1-t)z(\zeta) + tx : \zeta \in [0, 1]^{d-1}, t \in [0, 1]\}$. Перейдем от повторного интеграла к кратному по множеству G_x , сделав замену переменных $y = (1-t)z(\zeta) + tx$. Определитель матрицы Якоби имеет вид

$$J = \begin{vmatrix} x^1 - \zeta^1 & 1-t & 0 & \dots & 0 \\ x^2 - \zeta^2 & 0 & 1-t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{d-1} - \zeta^{d-1} & 0 & 0 & \dots & 1-t \\ x^d & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Пусть $x \in K'$. Так как $x^d \geq \frac{1}{4}$ и $y - x = (1-t)(z(\zeta) - x)$, то

$$|J^{-1}| = (1-t)^{1-d} |x^d|^{-1} \leq 4 \left(\frac{|y-x|}{|z(\zeta)-x|} \right)^{1-d}.$$

Наконец, $|x - z(\zeta)| \leq \sqrt{d}$, так что

$$|f(x) - a| \leq 4d^{\frac{d}{2}} \int_{G_x} |\nabla f(y)| \cdot |x - y|^{1-d} dy \leq 4d^{\frac{d}{2}} \int_K |\nabla f(y)| \cdot |x - y|^{1-d} dy.$$

Остается воспользоваться леммой 1. \square

Замечание 1. Построенное отображение $f \mapsto a(f)$ линейно.

Замечание 2. Если $f|_{[0,1]^{d-1} \times \{0\}} = 0$ или $f|_{[0,1]^{d-1} \times \{1\}} = 0$, то в лемме 2 можно взять $a = 0$.

Следствие 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $1 \leq q < \infty$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$. Тогда $\dot{W}_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ и оператор вложения непрерывен. Если $p > d$, то $\dot{W}_p^1(\Omega) \subset C(\Omega)$ и оператор вложения непрерывен.

Следующее утверждение усиливает лемму 2.

Лемма 3. Пусть $K = [0, 1]^d$, $1 \leq q \leq \infty$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$. Тогда для каждой функции $f \in \dot{W}_p^1(K)$ найдется константа a такая, что

$$\|f - a\|_{L_q(K)} \leq \tilde{C} \|\nabla f\|_{L_p(K)}.$$

Доказательство. Пусть $\psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ — бесконечно дифференцируемая функция, $\psi|_{[0, \frac{1}{2}]} = 0$, $\psi|_{[\frac{3}{4}, 1]} = 1$. Положим $\varphi(x_1, \dots, x_d) = \psi(x_d)$. Для функции f выберем константу $a = a(f)$ в соответствии с леммой 2. Пусть $K' = [0, 1]^{d-1} \times [\frac{1}{2}, 1]$. Тогда (с учетом замечания 2 при оценке $\|(1 - \varphi)(f - a)\|_{L_q(K)}$) получаем

$$\begin{aligned} \|f - a\|_{L_q(K)} &\leq \|\varphi(f - a)\|_{L_q(K)} + \|(1 - \varphi)(f - a)\|_{L_q(K)} \leq \|f - a\|_{L_q(K')} + \|(1 - \varphi)(f - a)\|_{L_q(K)} \stackrel{(7.4)}{\leq} \\ &\leq C \|\nabla f\|_{L_p(K)} + C \|\nabla[(1 - \varphi)(f - a)]\|_{L_p(K)} \leq C_1 \|\nabla f\|_{L_p(K)} + C \|(f - a)(\nabla \varphi)\|_{L_p(K)} \leq \\ &\leq C_1 \|\nabla f\|_{L_p(K)} + C_2 \|f - a\|_{L_p(K')} \stackrel{(7.4)}{\leq} C_3 \|\nabla f\|_{L_p(K)} \end{aligned}$$

(константы C, C_1, C_2, C_3 не зависят от f). \square

Обозначим $\text{mes } E$ меру Лебега измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^d$.

Задача 1. Доказать, что если K — произвольный куб, то для любой функции $f \in \dot{W}_p^1(K)$ найдется такая константа a , что

$$\|f - a\|_{L_q(K)} \leq \tilde{C} (\text{mes } K)^{\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|\nabla f\|_{L_p(K)}. \quad (7.6)$$

Напомним критерий предкомпактности Хаусдорфа. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $M \subset X$, $\varepsilon > 0$. Множество $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ называется ε -сетью для M , если для любого $x \in M$ найдется такое $i \in \{1, \dots, n\}$, что $\rho(x, x_i) < \varepsilon$.

Критерий Хаусдорфа: $M \subset X$ предкомпактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечная ε -сеть для M .

Задача 2. Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$ — ограниченное множество. Показать, что M предкомпактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечномерное пространство $L \subset X$, что

$$\sup_{x \in M} \text{dist}(x, L) \equiv \sup_{x \in M} \inf_{y \in L} \|x - y\| < \varepsilon.$$

Теорема 5. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $1 \leq q \leq \infty$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$. Тогда оператор вложения $\dot{W}_p^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ компактен.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $p < q$. В этом случае выполнено неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \quad (7.7)$$

(это легко проверяется с помощью принципа Лагранжа; см., например, [13], задача 2.68).

Покажем, что множество $B = \{f \in C_0^\infty(\Omega) : \|\nabla f\|_{L_p(\Omega)} \leq 1\}$ предкомпактно в $L_q(\Omega)$. Так как B ограничено в силу следствия 1, то достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечномерное пространство $L \subset L_q(\Omega)$ такое, что $\text{dist}(f, L) < \varepsilon$ для любой функции $f \in B$.

Продолжив функции нулем вне Ω , можем считать, что $\Omega = K$ — куб. Разобьем K на n равных кубов K_j . В качестве L возьмем пространство функций, постоянных на K_j .

Для каждого j в силу (7.6) найдется такая константа a_j , что

$$\|f - a_j\|_{L_q(K_j)} \leq \tilde{C}(\text{mes } K_j)^{\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|\nabla f\|_{L_p(K_j)} = \tilde{C} \left(\frac{\text{mes } K}{n} \right)^{\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|\nabla f\|_{L_p(K_j)}.$$

Обозначим через P_f кусочно-постоянную функцию, такую, что $P_f|_{K_j} = a_j$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f - P_f\|_{L_q(K)} &= \left(\sum_{j=1}^n \|f - a_j\|_{L_q(K_j)}^q \right)^{1/q} \stackrel{(7.7)}{\leq} \left(\sum_{j=1}^n \|f - a_j\|_{L_p(K_j)}^p \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \tilde{C} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\text{mes } K}{n} \right)^{\frac{p}{d} + \frac{p}{q} - 1} \|\nabla f\|_{L_p(K_j)}^p \right)^{1/p} = \\ &= \tilde{C} \left(\frac{\text{mes } K}{n} \right)^{\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|\nabla f\|_{L_p(K)} \leq \tilde{C} \left(\frac{\text{mes } K}{n} \right)^{\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Так как $\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$, то величина справа стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. \square

Сделаем несколько заключительных замечаний о теоремах вложения для общих областей. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область. Скажем, что Ω удовлетворяет условию Джона, если найдутся константа $a > 0$ и точка $x_* \in \Omega$ такие, что для любого $x \in \Omega$ существует кривая $\gamma_x : [0, T(x)] \rightarrow \Omega$ со следующими свойствами:

1. $\gamma_x \in AC[0, T(x)]$, $|\dot{\gamma}_x| = 1$ п.в.,
2. $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(T(x)) = x_*$,
3. для любого $t \in [0, T(x)]$ выполнено включение $B_{at}(\gamma_x(t)) \subset \Omega$.

В [14] было показано, что если область Ω удовлетворяет условию Джона, то при $\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$ оператор вложения $W_p^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ ограничен. Более того, можно доказать, что это вложение компактно и выполнена такая же оценка скорости приближения кусочно-постоянными функциями, как и в случае куба. В работах О.В. Бесова были получены условия непрерывного и компактного вложения для нерегулярных областей, при этом они отличаются от условий вложения на “хороших” областях. В частности, для множества $K = \{(x_1, \dots, x_{d-1}, x_d) = (x', x_d) : |x'|^{\frac{1}{\sigma}} < x_d < 1\}$, $\sigma > 1$, условие компактного вложения имеет вид $1 - [\sigma(d-1) + 1] \max\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, 0\right) > 0$ (см., например, [15]).

8 Принцип Лере – Шаудера.

8.1 Формулировка теоремы.

Принцип Лере – Шаудера был доказан в работе [16] (см. также [17]). Этот топологический результат часто используется при доказательстве теорем существования решения уравнений математической физики.

Сначала введем необходимые понятия.

Пусть X, Y — банаховы пространства, $M \subset X$. Отображение $A : M \rightarrow Y$ называется вполне непрерывным, если оно непрерывно и переводит ограниченное множество в предкомпактное.

Если отображение A линейно и вполне непрерывно, то оно переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся. В случае нелинейных отображений это, вообще говоря, неверно. Пусть $X = l_2, Y = \mathbb{R}, M = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — множество стандартных базисных векторов, $A(e_{2n}) = 0, A(e_{2n-1}) = 1$. Тогда A вполне непрерывно, $e_n \xrightarrow{w} 0$ при $n \rightarrow \infty$, но $\{A(e_n)\}$ не сходится.

Если X рефлексивно, то выполнено и обратное утверждение (это будет доказано ниже). В общем случае оно неверно даже для линейных отображений (например, тождественный оператор на l_1 некомпактен, но переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся).

Дадим определение рефлексивного пространства. Канонический оператор вложения $i : X \rightarrow X^{**}$ определяется равенством $\langle i(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle, x^* \in X^*$. Банахово пространство X называется рефлексивным, если оператор i сюръективен. Примерами рефлексивных пространств являются $L_p(\Omega, \mu)$ и пространства Соболева $W_p^r(\Omega)$ при $1 < p < \infty$.

Следующую теорему сформулируем без доказательства.

Теорема 6. *Следующие условия равносильны:*

1. X рефлексивно,
2. единичный шар в X слабо компактен,
3. из любой ограниченной последовательности можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.

Отметим, что для сепарабельного гильбертова пространства импликацию $1 \Rightarrow 3$ можно доказать, применяя канторовский диагональный процесс.

Предложение 3. *Пусть X — рефлексивное пространство, $A : X \rightarrow Y$ переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся. Тогда отображение A вполне непрерывно.*

Доказательство. Непрерывность отображения A следует из того, что оно переводит сильно сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся. Предположим, что существует ограниченное множество M такое, что $A(M)$ не является предкомпактным. Тогда существует последовательность $\{y_n\} \subset A(M)$ такая, что $\|y_m - y_n\| \geq r > 0$ для любых $m \neq n$. Пусть $y_n = A(x_n)$. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, а пространство X рефлексивно, то можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Тогда $\{y_{n_k}\}$ сильно сходится, что противоречит неравенству $\|y_{n_k} - y_{n_j}\| \geq r$ при $k \neq j$. \square

Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$. Векторным полем на M называется непрерывное отображение $\Phi : M \rightarrow X$. Векторное поле называется вполне непрерывным, если оно представимо в виде суммы тождественного и вполне непрерывного отображений.

Пусть $U \subset X$ — открытое связное ограниченное множество, \bar{U} — его замыкание. Вполне непрерывные векторные поля $I - A_0, I - A_1 : \bar{U} \rightarrow X$ называются гомотопными на \bar{U} , если существует вполне непрерывное отображение $A : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow X$ такое, что

1. $A(\cdot, 0) = A_0(\cdot), A(\cdot, 1) = A_1(\cdot),$
2. $x - A(x, \lambda) \neq 0$ для любых $\lambda \in [0, 1], x \in \partial U.$

Отображение $A(\cdot, \cdot)$ называется невырожденной деформацией.

Для самой общей формулировки принципа Лере – Шаудера нужно понятие степени вполне непрерывного отображения. Оно будет позже дано только для гладкого отображения в конечномерном пространстве. В общем случае степень отображения определяется через аппроксимацию, и необходимо проверять корректность. Поэтому мы сформулируем частный случай теоремы Лере – Шаудера, который затем будет применяться.

Теорема 7. Пусть X — банахово пространство, $\Phi_1 = I - A_1$ — вполне непрерывное векторное поле на X и существует такое $R > 0$, что векторные поля Φ_1 и I гомотопны на $B_R(0)$. Тогда существует $x \in B_R(0)$ такое, что $\Phi_1(x) = 0$. (То есть отображение A_1 имеет неподвижную точку в $B_R(0)$.)

Эту теорему мы докажем, следуя книге [18].

Для выполнения условий принципа Лере – Шаудера достаточно построить вполне непрерывное отображение $A : X \times [0, 1] \rightarrow X$ со следующими свойствами: 1) $A(\cdot, 0) = 0, A(\cdot, 1) = A_1(\cdot)$ и 2) существует такое $R > 0$, что $x - A(\lambda, x) \neq 0$ для любого $\lambda \in [0, 1], x \in S_R(0)$. Для выполнения условия 2) достаточно выполнения *априорной оценки* решения уравнения $x = A(\lambda, x)$: найдется такое $R > 0$, что для любого $\lambda \in [0, 1]$ все решения уравнения $x = A(\lambda, x)$ принадлежат открытому шару радиуса R .

В качестве невырожденной деформации часто используется отображение $A(x, \lambda) = \lambda A(x)$. Таким образом, получаем

Следствие 2. Пусть X — банахово пространство, $A : X \rightarrow X$ — вполне непрерывное отображение. Пусть существует такое $R > 0$, что для любого $\lambda \in [0, 1]$ любое решение уравнения $x = \lambda A(x)$ принадлежит шару радиуса R . Тогда уравнение $x = A(x)$ имеет хотя бы одно решение в этом шаре.

Для доказательства теоремы существования решения стационарной системы Навье – Стокса будет использоваться это следствие.

Пример применения принципа Лере – Шаудера: доказательство теоремы Брауэра. Теорема Брауэра утверждает, что непрерывное отображение f единичного шара в \mathbb{R}^n в себя имеет неподвижную точку. Для доказательства продолжим отображение f на \mathbb{R}^n до непрерывного отображения F следующим образом: $F(x) = f(cx)$, где $c = \min \left\{ 1, \frac{1}{\|x\|} \right\}$. Тогда для любого $\lambda \in [0, 1]$ решение уравнения $x = \lambda F(x)$ принадлежит единичному шару. Значит, отображение F имеет неподвижную точку x_* в единичном шаре. Так как $F(x_*) = f(x_*)$, то x_* — неподвижная точка для f .

Упражнение. Доказать, применяя принцип Лере – Шаудера, что если отображение $v : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно, то для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется $\delta > 0$ такое, что на отрезке $[0, \delta]$ существует решение задачи $\dot{x} = v(t, x)$, $x(0) = x_0$.⁴ (Указание: сначала рассмотреть случай, когда функция v ограничена, а общий случай свести к этому.)

8.2 Доказательство принципа Лере – Шаудера.

Мы начнем со случая, когда пространство конечномерно, а векторное поле гладкое.

Нам понадобится понятие степени отображения.

Пусть M, N — гладкие ориентируемые конечномерные многообразия с фиксированным ориентирующим атласом, M компактно, N связно, $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Точка $x_0 \in M$ называется *регулярной*, если матрица оператора $f'(x_0)$ имеет максимальный ранг (отметим, что ранг матрицы производной отображения не зависит от выбора локальных координат). Точка $x_0 \in M$ называется *критической*, если x_0 не является регулярной. Точка $y_0 \in N$ называется *регулярным значением*, если все точки $x \in f^{-1}(y_0)$ являются регулярными (если $y_0 \notin f(M)$, то считаем, что y_0 также является регулярным значением). Легко видеть, что множество регулярных значений открыто. Точка $y_0 \in N$ называется *критическим значением*, если y_0 не является регулярным значением.

Теорема 8. (теорема Сарда). *Множество критических значений гладкого отображения имеет меру нуль.⁵ В частности, множество регулярных значений всюду плотно в N .*

Эту теорему мы докажем в Дополнении 3. Заметим, что если размерности M и N совпадают, то она сразу следует из формулы замены переменных под знаком интеграла.

Если размерности M и N совпадают, то прообразом регулярного значения является конечный набор точек, в окрестности которых f является диффеоморфизмом. Это следует из компактности M и теоремы об обратном отображении.

Предположим, что $\dim M = \dim N$, $x \in M$. Определим функцию $\operatorname{sgn} \det f'(x)$ следующим образом. Пусть точки x и $f(x)$ принадлежат соответственно картам $U_\alpha \subset M$ с локальными координатами (x_α^i) и $V_\beta \subset N$ с локальными координатами (y_β^j) . В этих локальных координатах отображение f задается равенствами $y_\beta^j = f_{\alpha\beta}^j(x_\alpha^i)$. Положим

$$\operatorname{sgn} \det f'(x) = \operatorname{sgn} \det \left(\frac{\partial f_{\alpha\beta}^j(x_\alpha^i)}{\partial x_\alpha^i} \right)_{i,j}.$$

Определение корректно, так как атласы на M и N ориентирующие.

Пусть y_0 — регулярное значение f . *Степенью отображения f по отношению к регулярному значению y_0 называется*

$$\deg(f, y_0) = \sum_{x_i: f(x_i)=y_0} \operatorname{sgn} \det f'(x_i).$$

⁴При доказательстве принципа Лере – Шаудера в некоторый момент используется теорема существования решения дифференциального уравнения, но функция v там гладкая, так что “порочного круга” не возникает.

⁵Множество критических значений содержится в компакте $f(M)$; множество $f(M)$ можно покрыть конечным числом локальных карт, а в каждой карте множество меры нуль уже определяется стандартным образом.

Если y находится в достаточно малой окрестности точки y_0 , то $\deg(f, y) = \deg(f, y_0)$ (**упражнение:** провести подробное доказательство). Ниже будет показано, что степень отображения и глобально не зависит от выбора регулярного значения (даже если множество регулярных значений несвязно).

Отображения $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ называются *гладко гомотопными*, если существует гладкое отображение $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ такое, что $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$.

Введем на $M \times [0, 1]$ атлас, состоящий из произведений $U_\alpha \times [0, 1]$, где множества U_α принадлежат атласу на M . Аналогично определяется атлас на $N \times \Delta$, где Δ — произвольный отрезок.

Теорема 9. *Степень отображения не зависит от выбора регулярного значения y_0 и не меняется при гладких гомотопиях.*

Сначала нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 4. *Пусть M, N — гладкие n -мерные многообразия, M компактно, $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ — гладкое отображение, $f_0(x) = F(x, 0)$, $f_1(x) = F(x, 1)$. Пусть $y \in N$ — регулярное значение F , f_0 и f_1 . Тогда $F^{-1}(y)$ является объединением следов гладких простых кривых. Для каждой из них возможны четыре случая:*

1. оба конца кривой принадлежат $M \times \{0\}$;
2. оба конца кривой принадлежат $M \times \{1\}$;
3. один конец принадлежит $M \times \{0\}$, второй — $M \times \{1\}$;
4. кривая замкнута и ее след содержится в $M \times (0, 1)$.

При этом, в случаях 1–3 кривая незамкнута и $M \times (\{0\} \cup \{1\})$ содержит только ее концы.

В окрестности точки y выберем локальные координаты. Тогда можно считать, что в окрестности $F^{-1}(y)$ отображение F задается как вектор-функция со значениями в \mathbb{R}^n , $F(x, t) = (F^1(x, t), \dots, F^n(x, t))$.

Предложение 5. *Пусть выполнены условия предложения 4, γ — связная компонента $F^{-1}(y)$, являющаяся следом незамкнутой кривой. Тогда существует ее окрестность U и диффеоморфизм $\varphi : U \rightarrow B_\varepsilon(y) \times [a, b]$, задаваемый равенством*

$$\varphi(x, t) = (F^1(x, t), \dots, F^n(x, t), s(x, t)). \quad (8.1)$$

При этом, в случае 1 в окрестности концов кривой $s(x, t) = t + a$ и $s(x, t) = b - t$, в случае 2 $s(x, t) = 1 - t + a$ и $s(x, t) = b + t - 1$, в случае 3 $s(x, t) = t + a$ и $s(x, t) = b + t - 1$.

Доказательство этих двух технических утверждений вынесено в Дополнение 2.

Предложение 6. *Пусть y — регулярное значение f_0, f_1 и F . Тогда $\deg(f_0, y) = \deg(f_1, y)$.*

Доказательство. Так как y — регулярное значение f_0, f_1 и F , то $F^{-1}(y)$ — объединение конечного числа окружностей и дуг, причем дуги бывают трех типов (см. предложение 4).

Пусть γ — дуга, являющаяся связной компонентой $F^{-1}(y)$. Докажем следующие утверждения.

1. если $\gamma(a) = (x_0, 0)$, $\gamma(b) = (x_1, 0)$, то $\operatorname{sgn} \det f'_0(x_0) = -\operatorname{sgn} \det f'_0(x_1)$.
2. если $\gamma(a) = (x_0, 1)$, $\gamma(b) = (x_1, 1)$, то $\operatorname{sgn} \det f'_1(x_0) = -\operatorname{sgn} \det f'_1(x_1)$.
3. если $\gamma(a) = (x_0, 0)$, $\gamma(b) = (x_1, 1)$, то $\operatorname{sgn} \det f'_0(x_0) = \operatorname{sgn} \det f'_1(x_1)$.

Поскольку $f_i^{-1}(y)$ совпадает с множеством концов дуг, лежащих на $M \times \{i\}$, $i = 0, 1$, то отсюда следует равенство $\deg(f_0, y) = \deg(f_1, y)$.

Докажем первое утверждение (остальные доказываются аналогично). Из предложения 5 следует, что существует окрестность U дуги γ и диффеоморфизм $\Phi : U \rightarrow B_\varepsilon(y) \times [a, b]$, $\Phi(x, t) = (F(x, t), s(x, t))$. При этом, $s(x, t) = t + a$ в окрестности точки x_0 и $s(x, t) = b - t$ в окрестности точки x_1 .

Так как на $M \times [0, 1]$ и $N \times \Delta$ выбраны ориентирующие атласы, то знак якобиана отображения Φ не зависит от карты и, значит, не зависит от точки на γ . Поэтому $\operatorname{sgn} \det \Phi'(x_0, 0) = \operatorname{sgn} \det \Phi'(x_1, 0)$. Далее, $\operatorname{sgn} \det \Phi'(x_0, 0) = \operatorname{sgn} \det F'_x(x_0, 0) = \operatorname{sgn} \det f'_0(x_0)$ и $\operatorname{sgn} \det \Phi'(x_1, 0) = -\operatorname{sgn} \det F'_x(x_1, 0) = -\operatorname{sgn} \det f'_0(x_1)$. Отсюда получаем, что $\operatorname{sgn} \det f'_0(x_0) = -\operatorname{sgn} \det f'_0(x_1)$. \square

Следствие 3. Если f_0, f_1 гладко гомотопны и y является регулярным значением f_0 и f_1 , то $\deg(f_0, y) = \deg(f_1, y)$.

Доказательство. Пусть y — регулярное значение отображения f_0 . По теореме Сарда, множество регулярных значений отображений f_0, f_1 и F плотно в N и открыто. Поэтому в достаточно малой окрестности y существует точка y' , являющаяся одновременно регулярным значением отображений f_0, f_1 и F и такая, что $\deg(f_0, y) = \deg(f_0, y')$, $\deg(f_1, y) = \deg(f_1, y')$. Из предложения 6 следует, что $\deg(f_0, y') = \deg(f_1, y')$. \square

Доказательство теоремы 9. Пусть y_0, y_1 — регулярные значения f . Построим гладкое отображение $\varphi : N \times [0, 1] \rightarrow N$ такое, что $\varphi(\cdot, 0) = I$, $\varphi(y_0, 1) = y_1$ и $\varphi_t(\cdot) := \varphi(\cdot, t)$ для любого $t \in [0, 1]$ является диффеоморфизмом. Для этого соединим y_0 и y_1 гладкой несамопересекающейся кривой $\gamma : [0, 1] \rightarrow N$ ($\gamma(0) = y_0, \gamma(1) = y_1$), на ней зададим гладкое векторное поле $w(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$ и гладко его продолжим⁶ на все многообразие N (при этом считаем, что это продолжение не равно нулю только в некоторой предкомпактной окрестности образа кривой); обозначим это продолжение через v . Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\dot{y} = v(y)$ на N . Решение $y(t)$ этой системы существует при любых начальных условиях $y(0) = y$ и для любого $t \in \mathbb{R}$.⁷ Положим $\varphi(y, t) = y(t)$. Тогда φ является однопараметрической группой диффеоморфизмов, и если $y(0) = y_0$, то $y(t) = \gamma(t)$. Значит, φ является искомым.

⁶Идея доказательства существования гладкого продолжения состоит в следующем. Для каждого $t \in [0, 1]$ находим предкомпактную окрестность точки $\gamma(t)$ и локальные координаты, в которых векторное поле постоянно. Продолжаем его до постоянного векторного поля во всей окрестности. Выбираем конечное подпокрытие $\{U_i\}_{i=1}^k$ образа кривой такими окрестностями. Пусть v_i — векторное поле в U_i . Строим гладкое разбиение единицы $\{\varphi_i\}_{i=1}^k$, подчиненное этому покрытию, и полагаем $v(x) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x)v_i(x)$, $x \in \cup_{i=1}^k U_i$. На все многообразие N это векторное поле продолжаем нулем.

⁷В самом деле, пусть решение продолжается на интервал $(0, t_*)$ и не продолжается на полуинтервал $(0, t_*]$. Тогда для любого $t \in [0, t_*)$ точки $y(t)$ принадлежат компакту $\cup_{i=1}^k \bar{U}_i$ (иначе $y(t) \equiv \text{const}$, так как $v(y(t)) = 0$ для некоторого $\hat{t} \in [0, t_*)$; см. сноску 6). Пусть $\{t_n\}$ — возрастающая последовательность, $t_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} t_*$. Из $\{y(t_n)\}$ выбираем подпоследовательность $\{y(t_{n_k})\}$, сходящуюся к точке y_* . Длина интервала, на который продолжается решение дифференциального уравнения, оценивается через константу Липшица функции $v(x)$. Значит, найдутся окрестность U точки y_* и $\delta > 0$ такие, что для любого $z \in U$ решение уравнения с начальными условиями в точке z продолжается на интервал $(0, \delta)$. Взяв $z = y(t_{n_k})$ для достаточно большого k , получаем противоречие.

Точка y_1 является регулярным значением отображения $\varphi_1 \circ f$. Так как $\operatorname{sgn} \det \varphi_1'(y_0) = \operatorname{sgn} \det \varphi_0'(y_0) = 1$, то $\deg(f, y_0) = \deg(\varphi_1 \circ f, y_1)$. Отображения f и $\varphi_1 \circ f$ гладко гомотопны, поэтому $\deg(f, y_1) = \deg(\varphi_1 \circ f, y_1)$. Первое утверждение теоремы доказано.

Чтобы завершить доказательство второго утверждения теоремы, остается с помощью теоремы Сарда найти точку, являющуюся одновременно регулярным значением f_0 и f_1 . \square

Далее степень отображения будем обозначать $\deg f$.

Пусть M — n -мерное гладкое многообразие, $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, $\xi(x) \neq 0$ для любого $x \in M$. Гауссовым отображением называется $\Gamma_\xi : M \rightarrow S_1(0)$, $\Gamma_\xi(x) = \frac{\xi(x)}{|\xi(x)|}$. Вращением поля ξ на M называется степень отображения Γ_ξ .

Теорема 10. Пусть $\xi : B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое векторное поле, $\xi(x) \neq 0$ при $x \in S_R(0)$. Пусть $\Gamma_\xi : S_R(0) \rightarrow S_1(0)$ — гауссово отображение для поля ξ на $S_R(0)$, $\deg \Gamma_\xi \neq 0$. Тогда $\xi(x) = 0$ для некоторого $x \in B_R(0)$.

Отсюда будет следовать доказательство принципа Лере – Шаудера в гладком конечномерном случае: если векторное поле Φ гомотопно единичному, то его вращение на сфере совпадает с вращением тождественного векторного поля и поэтому не равно нулю. Значит, $\Phi(x) = 0$ для некоторого $x \in B_R(0)$.

Для доказательства теоремы 10 докажем утверждение об интеграле прообраза дифференциальной формы.

Пусть многообразия M, N имеют одинаковую размерность n , $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Рассмотрим на N дифференциальную форму ω , которая в локальных координатах y_α имеет вид $\omega(y) = \varphi(y_\alpha) dy_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dy_\alpha^n$. Тогда на M определена дифференциальная форма $f^*\omega(x) = \varphi(f(x)) df_\alpha^1(x) \wedge \cdots \wedge df_\alpha^n(x)$, где $f_\alpha^j(x)$ — j -я координата точки $f(x)$.

Теорема 11. Выполнено равенство

$$\int_M f^*\omega = \deg f \int_N \omega.$$

Сначала докажем

Предложение 7. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное открытое множество и для каждого $x \in \Omega$ задан шар U_x с центром в точке x , содержащийся в Ω . Тогда

$$\Omega = \Lambda \sqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k \right),$$

где $\operatorname{mes} \Lambda = 0$, Ω_k — открытые множества, содержащиеся в некотором U_{x_k} , $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть

$$W_m = \left\{ x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{m} \right\}.$$

Эти множества компактны, поэтому можно выбрать конечные покрытия $\{U_{x_{m,l}}\}_{l=1}^{l_m}$. Объединив эти семейства множеств по m , получим счетное покрытие Ω открытыми шарами U_{x_k} , $k \in \mathbb{N}$. Множества

$$\Lambda = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_+} \bigcup_{l=1}^{l_m} \partial U_{x_{m,l}}, \quad \Omega_k = U_{x_k} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} \bar{U}_{x_j} \right)$$

являются искомыми. \square

Доказательство теоремы 11. Воспользовавшись определением интеграла от дифференциальной формы с помощью разбиения единицы, без ограничения общности можем считать, что ω имеет носитель в одной карте U с локальными координатами $(y_\beta^1, \dots, y_\beta^n)$. Пусть $U = K \cup R$, где K — множество критических значений, R — множество регулярных значений. Из предложения 7 следует, что

$$R = \Lambda \sqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} U_k \right),$$

где $\text{mes } \Lambda = 0$, а U_k — открытые множества такие, что

$$f^{-1}(U_k) = \bigsqcup_{j=1}^{r_k} V_{j,k},$$

$V_{j,k}$ содержится в одной локальной карте и $f|_{V_{j,k}}$ является диффеоморфизмом. Выберем локальные координаты $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ на $V_{j,k}$. Тогда для $x \in V_{j,k}$

$$f^*\omega(x) = \varphi(f(x)) dy_\beta^1(x_\alpha) \wedge \dots \wedge dy_\beta^n(x_\alpha) = \varphi(f(x)) \det \frac{\partial y_\beta(x)}{\partial x_\alpha} dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n.$$

Из теоремы о замене переменных под знаком интеграла получаем

$$\begin{aligned} \int_{V_{j,k}} f^*\omega &= \int_{V_{j,k}} \varphi(f(x)) \det \frac{\partial y_\beta(x)}{\partial x_\alpha} dx_\alpha^1 \dots dx_\alpha^n = \\ &= \text{sgn } \det f'|_{V_{j,k}} \int_{U_k} \varphi(y) dy_\beta^1 \dots dy_\beta^n = \text{sgn } \det f'|_{V_{j,k}} \int_{U_k} \omega. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_{f^{-1}U_k} f^*\omega = \text{deg } f \int_{U_k} \omega,$$

так что

$$\int_{f^{-1}R} f^*\omega = \text{deg } f \int_R \omega = \text{deg } f \int_N \omega$$

(мы воспользовались тем, что множества K , Λ и $f^{-1}(\Lambda)$ имеют меру нуль). Наконец, множество регулярных точек в $f^{-1}K$ также имеет меру нуль, а в критических точках $f^*\omega = 0$. Значит, $\int_M f^*\omega = \int_{f^{-1}R} f^*\omega$ и теорема доказана. \square

Доказательство теоремы 10. Предположим обратное: $\xi(x) \neq 0$ для любого $x \in B_R(0)$. Тогда гауссово отображение Γ_ξ определено на всем шаре $B_R(0)$. Рассмотрим форму объема на $S_1(0)$:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Тогда $d\Omega = n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Из теоремы 11 и формулы Стокса получаем, что

$$0 \neq \text{deg } \Gamma_\xi \int_{B_1(0)} d\Omega = \text{deg } \Gamma_\xi \int_{S_1(0)} \Omega = \int_{S_R(0)} \Gamma_\xi^* \Omega = \int_{B_R(0)} d(\Gamma_\xi^* \Omega) = 0.$$

Последнее равенство верно, так как $\Gamma_\xi(B_R(0)) \subset S_1(0)$ и поэтому $\det \left(\frac{\partial \Gamma_\xi^i}{\partial x^j}(x) \right) = 0$. \square

Итак, в конечномерном гладком случае принцип Лере – Шаудера доказан. Следующий шаг доказательства состоит в рассмотрении непрерывного векторного поля в конечномерном пространстве. Пусть $\xi : B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное векторное поле, гомотопное единичному, $F : B_R(0) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, такое, что $F(x, 0) = \xi(x)$, $F(x, 1) = x$ и $F(x, t) \neq 0$ для любого $x \in B_R(0)$. Покажем, что найдется точка $x \in B_R(0)$ такая, что $\xi(x) = 0$.

Сначала рассмотрим случай, когда норма в \mathbb{R}^n евклидова.

Предложение 8. Для любого $\varepsilon > 0$ существует гладкое отображение $F_\varepsilon : B_R(0) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $\|F - F_\varepsilon\|_C < \varepsilon$ и $F_\varepsilon(x, 1) = x$.

Доказательство. Возьмем малое $\delta > 0$ и положим для $(x, t) \in B_{R+\delta}(0) \times [-\delta, 1 + \delta]$

$$\tilde{F}_\delta(x, t) = \begin{cases} \frac{R+\delta}{R} \cdot F\left(\frac{R}{R+\delta}x, t + \delta\right), & \text{если } -\delta \leq t \leq 1 - \delta, \\ x, & \text{если } 1 - \delta \leq t \leq 1 + \delta. \end{cases}$$

Эту функцию мы сгладим с помощью усреднения по Стеклову – Шварцу (см. Дополнение 1). Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ — неотрицательная функция, такая, что $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \psi(x, t) dx dt = 1$ и $\text{supp } \psi \subset B_1(0) \times [-1, 1]$. Для каждого $h > 0$ положим $\psi_h(x, t) = \frac{1}{h^{n+1}} \psi\left(\frac{x}{h}, \frac{t}{h}\right)$,

$$\tilde{F}_{\delta,h}(x, t) = x + \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\tilde{F}_\delta(y, s) - y \right) \psi_h(x - y, t - s) dy ds, \quad (x, t) \in B_R(0) \times [0, 1].$$

Тогда $\tilde{F}_\delta \in C^\infty(B_R(0) \times [0, 1])$. Из равномерной непрерывности F следует, что при малых δ и h выполнено

$$\|F - \tilde{F}_{\delta,h}\|_{C(B_R(0) \times [0, 1])} < \varepsilon$$

(см. также Дополнение 1). Так как $\tilde{F}_\delta(x, t) - x = 0$ при $t \in (1 - \delta, 1 + \delta)$, то $\tilde{F}_{\delta,h}(x, 1) = x$ для малых h . \square

Если ε достаточно мало, то $\xi_\varepsilon(x) = F_\varepsilon(x, 0)$ является гладким векторным полем, гладко гомотопным единичному. Поэтому при малых ε существует точка $x_\varepsilon \in B_R(0)$ такая, что $\xi_\varepsilon(x_\varepsilon) = 0$. Взяв сходящуюся последовательность, получаем точку $x \in B_R(0)$ такую, что $\xi(x) = 0$.

Рассмотрим случай произвольной нормы в \mathbb{R}^n . Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — стандартный евклидов шар радиуса R . Определим $\varphi : D \rightarrow B_R(0)$ следующим образом. Если $x \in \partial D$, то положим $\varphi(x) = \lambda(x)x$, где $\lambda(x) > 0$, $\|\lambda(x)x\| = R$. Если $x = cx'$, $x' \in \partial D$, $c \in [0, 1]$, то $\varphi(x) := c\varphi(x')$.

Упражнение. Доказать, что это отображение является гомеоморфизмом D и $B_R(0)$.

Положим $\tilde{F}(x, t) = F(\varphi(x), t)$, $x \in D$, $t \in [0, 1]$. Тогда $\tilde{F}(x, 1) = \varphi(x)$. Отображение $(x, \theta) \mapsto (1 - \theta)\varphi(x) + \theta x$ задает невырожденную гомотопию $\tilde{F}(\cdot, 1)$ и тождественного отображения. Остается заметить, что гомотопия является отношением эквивалентности и, в частности, транзитивна, так что отображение $\tilde{F}(\cdot, 0)$ гомотопно тождественному. В силу доказанного, найдется точка $x \in D$ такая, что $\xi(\varphi(x)) = 0$. Значит, $\xi(y) = 0$ для некоторого $y \in B_R(0)$.

Теперь рассмотрим бесконечномерный случай. Пусть $n \in \mathbb{N}$, X_n — конечномерные подпространства, $A_1^n : B_R(0) \rightarrow X_n$ — непрерывные отображения, $\|A_1^n - A_1\|_{C(B_R(0))} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $x_n \in B_R(0)$, $A_1^n(x_n) = x_n$. Тогда существует $x \in B_R(0)$ такое, что $A_1(x) = x$. В самом деле, так как отображение A_1 вполне непрерывно, то $\{A_1(x_n)\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности можно считать, что $A_1(x_n) \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\|x_n - y\| = \|A_1^n(x_n) - y\| \leq \|A_1(x_n) - y\| + \|A_1^n(x_n) - A_1(x_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Отсюда, воспользовавшись непрерывностью A_1 , получаем

$$\|y - A_1(y)\| \leq \|y - A_1(x_n)\| + \|A_1(x_n) - A_1(y)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Значит, $A_1(y) = y$.

Итак, нужно построить последовательность отображений A_1^n . Пусть A — гомотопия между $I - A_1$ и I , $X_n \subset X$ — подпространство, натянутое на конечную n^{-1} -сеть множества $A(B_R(0) \times [0, 1])$, которую обозначим $\{y_i\}_{i=1}^m$. Положим

$$P_n(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^m y_i f_i(\xi)}{\sum_{i=1}^m f_i(\xi)}, \quad \xi \in A(B_R(0) \times [0, 1]),$$

где

$$f_i(\xi) = \begin{cases} 2n^{-1} - \|\xi - y_i\|, & \text{если } \|\xi - y_i\| < 2n^{-1}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отображение P_n корректно определено (так как $\|\xi - y_i\| \leq n^{-1}$ для некоторого i) и непрерывно.

Положим $A^n(x, t) = P_n \circ A(x, t)$, $A_1^n(x) = P_n \circ A_1(x)$. Покажем, что

- $\|A^n - A\|_{C(B_R(0) \times [0, 1])} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (а значит, $\|A_1^n - A_1\|_{C(B_R(0))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$),
- $I - A_1^n$ гомотопно I на подпространстве X_n при достаточно больших n (тогда ограничение A_1^n на X_n имеет неподвижную точку).

В самом деле, пусть $J(x) = \{i = \overline{1, m} : \|A(x, t) - y_i\| \leq 2n^{-1}\}$. Тогда

$$\|A^n(x, t) - A(x, t)\| = \|P_n(A(x, t)) - A(x, t)\| \leq \frac{\sum_{i \in J(x)} \|y_i - A(x, t)\| f_i(A(x, t))}{\sum_{i \in J(x)} f_i(A(x, t))} \leq 2n^{-1}.$$

Докажем второе утверждение. Покажем, что при достаточно больших n выполнено $x - A^n(x, t) \neq 0$ для любого $x \in S_R(0)$, $t \in [0, 1]$. Для этого достаточно проверить, что

$$\|x - A(x, t)\| \geq \alpha > 0, \quad x \in S_R(0), \quad t \in [0, 1].$$

Предположим обратное: $x_n - A(x_n, t_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Можно считать, что $t_n \rightarrow t$ и $A(x_n, t_n) \rightarrow y$, $n \rightarrow \infty$. Тогда $x_n \rightarrow y$, $n \rightarrow \infty$. Из непрерывности A получаем, что $A(x_n, t_n) \rightarrow A(y, t)$, $n \rightarrow \infty$, так что $y = A(y, t)$ — противоречие. Тем самым, $I - A_1^n$ гомотопно отображению $I - A^n(\cdot, 0) = I - P_n(0)$ (напомним, что $A(x, 0) = 0$). Нетрудно видеть, что $I - P_n(0)$ гомотопно тождественному при достаточно больших n (достаточно рассмотреть отображение $x \mapsto x - \lambda P_n(0)$, $\lambda \in [0, 1]$). Остается воспользоваться транзитивностью гомотопии.

Теорема полностью доказана.

9 Теорема существования и единственности решения стационарного уравнения Навье — Стокса.

Мы докажем теорему существования и единственности обобщенного решения системы уравнений Навье — Стокса с нулевыми граничными условиями. Результаты принадлежат О.А. Ладыженской, доказательства следуют ее книге [19].

9.1 Теорема существования.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ограничена, Γ — граница Ω . Рассмотрим стационарную систему

$$\begin{cases} -\nu \Delta v_j + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + f_j(x), j = 1, 2, 3, \\ \operatorname{div} v = 0 \end{cases} \quad (9.1)$$

с краевыми условиями

$$v|_{\Gamma} = 0. \quad (9.2)$$

Сначала нужно задать класс функций $H(\Omega)$, в котором рассматриваются решения этой системы, и если он содержит функции, которые не являются достаточно гладкими, то определить понятие обобщенного решения. Требование к выбору класса состоит в том, чтобы для него выполнялась теорема существования и теорема единственности в малом (т.е. для областей достаточно малого размера).

Исходя из вида уравнений и граничных условий, класс $H(\Omega)$ естественно определить следующим образом.

Сначала рассмотрим пространство пробных функций

$$\mathring{J}(\Omega) = \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \varphi_j \in C_0^\infty(\Omega), j = 1, 2, 3, \operatorname{div} \varphi = 0\}$$

с нормой из $\mathring{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, т.е.

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \right)^2 dx.$$

Обозначим через $H(\Omega)$ пополнение $\mathring{J}(\Omega)$ по этой норме, $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ — скалярное произведение в пространстве $H(\Omega)$.

Теперь определим обобщенное решение системы уравнений Навье – Стокса.

Пусть сначала v является гладкой функцией и удовлетворяет (9.1), (9.2), $\varphi \in \mathring{J}(\Omega)$. Домножив (9.1) скалярно на $\varphi(x)$ и проинтегрировав по Ω , получаем

$$\int_{\Omega} \left(-\nu \sum_{j=1}^3 \Delta v_j \cdot \varphi_j + \sum_{j,k=1}^3 v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \varphi_j \right) dx = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 f_j \cdot \varphi_j dx - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \varphi_j(x) \frac{\partial p}{\partial x_j}(x) dx. \quad (9.3)$$

Воспользовавшись формулой Стокса, граничными условиями (9.2) и равенствами $\operatorname{div} v = 0$, $\operatorname{div} \varphi = 0$, получаем, что

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^3 \varphi_j \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) \right) dx = \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^3 \Delta v_j \cdot \varphi_j \right) dx + \int_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \right), \\ 0 &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (v_k v_j \varphi_j) \right) dx = \int_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^3 v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \varphi_j + \sum_{j,k=1}^3 v_k v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \right) dx, \\ 0 &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial (p \varphi_j)}{\partial x_j} \right) dx = \end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} \left(p \operatorname{div} \varphi + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) dx = \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^3 \varphi_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) dx.$$

Поэтому из (9.3) следует, что

$$\int_{\Omega} \left(\nu \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} - \sum_{j,k=1}^3 v_k v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \right) dx = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 f_j \varphi_j dx. \quad (9.4)$$

Скажем, что функция $v \in H(\Omega)$ является обобщенным решением задачи (9.1) с краевыми условиями (9.2), если для любой функции $\varphi \in \mathring{J}(\Omega)$ выполнено (9.4).

Теорема 12. Пусть функция $f = (f_1, f_2, f_3)$ такова, что отображение

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 f_j(x) \varphi_j(x) dx$$

является линейным непрерывным функционалом в $\mathring{J}(\Omega)$. Тогда задача (9.1), (9.2) имеет хотя бы одно обобщенное решение.

Теорема единственности в малом будет доказана в следующем параграфе.

Заметим, что из теорем вложения следует, что $\mathring{W}_2^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ для $q < 6$, поэтому если $f \in L_s(\Omega)$, $s > \frac{6}{5}$, то выполнены условия теоремы существования.⁸

Также из теоремы вложения получается неравенство

$$\|v\|_{L_4(\Omega)} \leq C \|v\|_H. \quad (9.5)$$

Доказательство теоремы существования. Доказательство основывается на принципе Лере – Шаудера. Сначала мы перепишем условие (9.4) в виде операторного уравнения $v = Av$ в пространстве $H(\Omega)$, а затем проверим, что для него выполнены условия следствия 2.

Воспользуемся теоремой Рисса о виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Так как $\mathring{J}(\Omega)$ плотно в $H(\Omega)$, то из условий теоремы следует, что найдется функция $F \in H(\Omega)$ такая, что

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 f_j(x) \varphi_j(x) dx = \langle F, \varphi \rangle_{H(\Omega)}. \quad (9.6)$$

Теперь покажем, что линейный функционал

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 v_k(x) v_j(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x) dx$$

непрерывен в $H(\Omega)$. В самом деле, из неравенства Коши – Буняковского и теоремы вложения Соболева получаем

$$\left| \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 v_k(x) v_j(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x) dx \right| \leq \|v\|_{L_4(\Omega)}^2 \|\nabla \varphi\|_{L_2(\Omega)} \stackrel{(9.5)}{\leq} C_1 \|v\|_{H(\Omega)}^2 \|\varphi\|_{H(\Omega)},$$

⁸Мы доказывали теорему вложения для $q < 6$; для $q = 6$ имеет место непрерывное (но не компактное) вложение, которое следует из теоремы Адамса о потенциалах. Значит, для $s = \frac{6}{5}$ также выполнены условия теоремы существования.

где C_1 не зависит от v и φ . Значит, по теореме Рисса, каждому элементу $v \in H(\Omega)$ можно сопоставить единственный элемент $A_0v \in H(\Omega)$ такой, что

$$\int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 v_k(x)v_j(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x) dx = \langle A_0v, \varphi \rangle_{H(\Omega)}.$$

Наконец,

$$\int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_k}(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x) dx = \langle v, \varphi \rangle_{H(\Omega)}.$$

Таким образом, (9.4) переписывается в виде

$$\nu \langle v, \varphi \rangle_{H(\Omega)} - \langle A_0v, \varphi \rangle_{H(\Omega)} = \langle F, \varphi \rangle_{H(\Omega)}, \quad \varphi \in \dot{J}(\Omega).$$

В силу произвольности φ , получаем операторное уравнение

$$v = \frac{1}{\nu} (A_0v + F). \quad (9.7)$$

Проверим условия теоремы Лере – Шаудера. Сначала покажем, что отображение A_0 вполне непрерывно. В силу предложения 3, достаточно проверить, что A_0 переводит слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся. Мы воспользуемся тем, что пространство $\dot{W}_2^1(\Omega)$ компактно вкладывается в пространство $L_4(\Omega)$ (здесь существенно использовалось то, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$; в случае \mathbb{R}^4 компактного вложения уже нет). Пусть $v^m = (v_1^m, v_2^m, v_3^m)$ слабо сходится в $H(\Omega)$ к $v = (v_1, v_2, v_3)$. Тогда, в силу компактности вложения, v^m сходится к v по норме $L_4(\Omega)$. Для любой функции $\varphi \in \dot{J}(\Omega)$ выполнено

$$\begin{aligned} \langle A_0v^m - A_0v^n, \varphi \rangle_{H(\Omega)} &= \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 (v_k^m(x)v_j^m(x) - v_k^n(x)v_j^n(x)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x) dx = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 (v_k^m(x) - v_k^n(x))v_j^m(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x) dx + \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 v_k^n(x)(v_j^m(x) - v_j^n(x)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x) dx. \end{aligned}$$

Применив два раза неравенство Коши – Буняковского и теорему вложения Соболева, получаем

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 (v_k^m(x) - v_k^n(x))v_j^m(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x) dx \right| \leq \\ &\leq C_2 \|v^m - v^n\|_{L_4(\Omega)} \|v^m\|_{L_4(\Omega)} \|\varphi\|_{H(\Omega)} \stackrel{(9.5)}{\leq} C_3 \|v^m - v^n\|_{L_4(\Omega)} \|v^m\|_{H(\Omega)} \|\varphi\|_{H(\Omega)}, \end{aligned}$$

где C_2, C_3 не зависят от v^m и φ . Аналогично

$$\left| \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 (v_j^m(x) - v_j^n(x))v_k^n(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x) dx \right| \leq C_4 \|v^m - v^n\|_{L_4(\Omega)} \|v^n\|_{H(\Omega)} \|\varphi\|_{H(\Omega)}.$$

Взяв $\varphi = A_0v^m - A_0v^n$, получаем

$$\|A_0v^m - A_0v^n\|_{H(\Omega)}^2 \leq C_5 \|v^m - v^n\|_{L_4(\Omega)} (\|v^m\|_{H(\Omega)} + \|v^n\|_{H(\Omega)}) \|A_0v^m - A_0v^n\|_{H(\Omega)},$$

откуда

$$\|A_0v^m - A_0v^n\|_{H(\Omega)} \leq C_6 \|v^m - v^n\|_{L_4(\Omega)}$$

(т.к. слабо сходящаяся последовательность ограничена). Значит, по критерию Коши, $\{A_0 v^m\}$ сходится по норме $H(\Omega)$.

Из доказанного следует, что оператор $v \mapsto Av := \frac{1}{\nu}(A_0 v + F)$ также вполне непрерывен.

Осталось показать, что множество всех решений уравнений $v = \lambda Av$, $\lambda \in [0, 1]$, ограничено в $H(\Omega)$ (в этом месте будут использоваться граничные условия и равенство $\operatorname{div} v = 0$). Пусть

$$v - \mu(A_0 v + F) = 0,$$

где $\mu = \frac{\lambda}{\nu}$. Умножим это равенство скалярно на v в пространстве $H(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 \left(\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}(x) \right)^2 - \mu v_k(x) v_j(x) \frac{\partial v_j}{\partial x_k}(x) \right) dx = \mu \langle F, v \rangle_{H(\Omega)}.$$

Заметим, что интеграл от второго слагаемого равен 0. Выкладки, которые проведены ниже, проходят в случае $v \in \dot{J}(\Omega)$. В общем случае равенство получается с помощью предельного перехода (**упражнение**). Применяя формулу Гаусса – Остроградского, условия $\operatorname{div} v = 0$ и $v|_{\Gamma} = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 v_k(x) v_j(x) \frac{\partial v_j}{\partial x_k}(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial(|v|^2)}{\partial x_k}(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(|v|^2 v_k)}{\partial x_k}(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v|^2(x) \operatorname{div} v(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$\int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}(x) \right)^2 dx = \mu \langle F, v \rangle_{H(\Omega)},$$

т.е.

$$\|v\|_{H(\Omega)}^2 = \mu \langle F, v \rangle_{H(\Omega)} \leq \mu \|F\|_{H(\Omega)} \|v\|_{H(\Omega)},$$

откуда

$$\|v\|_{H(\Omega)} \leq \frac{1}{\nu} \|F\|_{H(\Omega)}. \quad (9.8)$$

□

В случае неоднородных граничных условий также была доказана теорема существования обобщенного решения. Идея ее доказательства такая же, как в случае однородных граничных условий, но технически оно несколько сложнее.

9.2 Теорема единственности в малом.

Рассмотрим случай однородных граничных условий. Мы покажем, что при малых значениях обобщенного числа Рейнольдса (ниже поясним, что это означает) решение будет единственным. Тем самым, класс функций, в котором рассматриваются обобщенные решения, выбран удачно.

Сначала докажем два мультипликативных неравенства.

Лемма 4. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$. Тогда

$$\|u\|_{L_4(\Omega)}^4 \leq 4 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \|u_{x_1}\|_{L_2(\Omega)} \|u_{x_2}\|_{L_2(\Omega)} \leq 2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \|u\|_{\dot{W}_2^1(\Omega)}^2. \quad (9.9)$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. Достаточно рассмотреть $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Продолжим функцию u нулем вне Ω . Тогда

$$u^2(x_1, x_2) = 2 \int_{-\infty}^{x_1} u(t, x_2) u_{x_1}(t, x_2) dt,$$

$$u^2(x_1, x_2) = 2 \int_{-\infty}^{x_2} u(x_1, t) u_{x_2}(x_1, t) dt.$$

Поэтому

$$\max_{y_1} u^2(y_1, x_2) \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |u_{x_1}(x_1, x_2) u(x_1, x_2)| dx_1, \quad \max_{y_2} u^2(x_1, y_2) \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |u_{x_2}(x_1, x_2) u(x_1, x_2)| dx_2. \quad (9.10)$$

Отсюда и из неравенства Коши – Буняковского получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} u^4(x) dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \max_{y_1} u^2(y_1, x_2) \cdot \max_{y_2} u^2(x_1, y_2) dx_1 dx_2 \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \max_{y_1} u^2(y_1, x_2) dx_2 \int_{\mathbb{R}} \max_{y_2} u^2(x_1, y_2) dx_1 \stackrel{(9.10)}{\leq} \\ &\leq 4 \int_{\mathbb{R}^2} |u_{x_1} u| dx \int_{\mathbb{R}^2} |u_{x_2} u| dx \leq 4 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \|u_{x_1}\|_{L_2(\Omega)} \|u_{x_2}\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Второе неравенство в (9.9) выполнено, поскольку $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$. \square

Лемма 5. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$. Тогда

$$\|u\|_{L_4(\Omega)}^4 \leq 8 \|u\|_{L_2(\Omega)} \|u_{x_1}\|_{L_2(\Omega)} \|u_{x_2}\|_{L_2(\Omega)} \|u_{x_3}\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2} \|u\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{\dot{W}_2^1(\Omega)}^3.$$

Доказательство. Второе неравенство является следствием неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим $abc \leq \frac{1}{\sqrt{27}}(a^2 + b^2 + c^2)^{3/2}$.

Докажем первое неравенство. Снова можно считать, что $u \in C_0^\infty(\Omega)$ и $u|_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega} = 0$. Применив (9.9) и неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} u^4(x) dx &\leq 4 \int_{\mathbb{R}} \|u(\cdot, x_3)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2 \|u_{x_1}(\cdot, x_3)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \|u_{x_2}(\cdot, x_3)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} dx_3 \leq \\ &\leq 4 \max_{x_3} \|u(\cdot, x_3)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2 \int_{\mathbb{R}} \|u_{x_1}(\cdot, x_3)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \|u_{x_2}(\cdot, x_3)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} dx_3 \leq \\ &\leq 4 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \max_{x_3} |u(x_1, x_2, x_3)|^2 dx_1 dx_2 \right) \|u_{x_1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \|u_{x_2}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \stackrel{(9.10)}{\leq} \\ &\leq 8 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{x_3} u| dx \right) \|u_{x_1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \|u_{x_2}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leq 8 \|u\|_{L_2(\Omega)} \prod_{k=1}^3 \|u_{x_k}\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

\square

Замечание. Если $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $u = (u_1, \dots, u_m)$,

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m u_j^2(x) dx, \quad \|u\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^m \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_k}(x) \right|^2 dx,$$

то аналогично доказывается неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^m u_j^2(x) \right)^2 dx \leq \\ & \leq 8 \|u\|_{L_2(\Omega)} \|u_{x_1}\|_{L_2(\Omega)} \|u_{x_2}\|_{L_2(\Omega)} \|u_{x_3}\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{4}{3} \right)^{3/2} \|u\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}^3. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Упражнение. Доказать (9.11).

Рассмотрим неравенство Фридрикса для пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \hat{C} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)},$$

где $\hat{C} = \hat{C}(\Omega)$ — наименьшая константа. Заметим, что в силу (7.6) выполнено $\hat{C}(\Omega) \rightarrow 0$ при $\text{diam } \Omega \rightarrow 0$. Кроме того, из определения нормы в H и в $L_2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ следует, что для $u \in H$ выполнено неравенство Фридрикса с той же константой \hat{C} :

$$\|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \leq \hat{C} \|u\|_H.$$

Обозначим через $\|f\|^*$ норму функционала $\varphi \mapsto \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 f_j(x) \varphi_j(x) dx$ в $H(\Omega)$.

Теорема 13. Пусть

$$\left(\frac{4}{3} \right)^{3/4} \hat{C}(\Omega)^{1/2} \nu^{-2} \|f\|^* < 1. \quad (9.12)$$

Тогда уравнение (9.1) с граничными условиями (9.2) имеет единственное обобщенное решение.

Доказательство. Пусть v, \tilde{v} — два обобщенных решения, $u = v - \tilde{v}$. Тогда $u \in H(\Omega)$ удовлетворяет равенству

$$\int_{\Omega} \left(\nu \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} - \sum_{j,k=1}^3 u_k v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} - \sum_{j,k=1}^3 \tilde{v}_k u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \right) dx = 0, \quad \varphi \in H(\Omega).$$

Положив $\varphi = u$, отсюда получаем

$$0 = \nu \|u\|_{H(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 \left(u_k v_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \tilde{v}_k u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx = \nu \|u\|_{H(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 u_k v_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx$$

(мы воспользовались тем, что $u|_{\Gamma} = 0$ и $\text{div } \tilde{v} = 0$). Применив неравенство Гельдера, (9.11) и неравенство Фридрикса, получаем

$$\nu \|u\|_{H(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 u_k v_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^3 v_j^2(x) \right)^2 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^3 u_k^2(x) \right)^2 dx \right)^{1/4} \|u\|_{H(\Omega)} \stackrel{(9.11)}{\leq} \\
&\leq \left(\frac{4}{3} \right)^{3/4} \|u\|_{L_2(\Omega)}^{1/4} \|u\|_{H(\Omega)}^{3/4} \|v\|_{L_2(\Omega)}^{1/4} \|v\|_{H(\Omega)}^{3/4} \|u\|_{H(\Omega)} \leq \left(\frac{4}{3} \right)^{3/4} \hat{C}(\Omega)^{1/2} \|u\|_{H(\Omega)}^2 \|v\|_{H(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись (9.8), получаем

$$\nu \|u\|_{H(\Omega)}^2 \leq \left(\frac{4}{3} \right)^{3/4} \hat{C}(\Omega)^{1/2} \frac{1}{\nu} \|f\|^* \|u\|_{H(\Omega)}^2.$$

Поэтому если выполнено (9.12), то $u = 0$. \square

Упражнение. Доказать, что если выполнено (9.12), то решение задачи (9.1), (9.2) устойчиво по правой части уравнения: если $\|f_n - f\|^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, v — решение (9.1), (9.2), v_n — решение (9.1), (9.2) с f_n вместо f в правой части, то $\|v_n - v\|_{H(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

10 Плоское течение вблизи критической точки (точки останова).

Система уравнений Навье – Стокса для стационарного $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$ плоского течения

$$v^1 = u(x, y), \quad v^2 = v(x, y), \quad v^3 = 0$$

имеет вид:

$$\begin{aligned}
uu_x + vv_y &= -\frac{1}{\rho} p_x + \nu \Delta u, \\
uv_x + vv_y &= -\frac{1}{\rho} p_y + \nu \Delta v, \\
u_x + v_y &= 0
\end{aligned} \tag{10.1}$$

(см. [8]). Жидкость перемещается из бесконечности к стенке, поставленной поперек течения, и далее двигается вдоль этой стенки в противоположные стороны от критической точки \mathcal{O} (точки останова). Положим в (3.12) $\nu = 0$ (система Эйлера). Тогда в качестве решения системы (3.12) можно выбрать

$$U = a \cdot x, \quad V = -a \cdot y, \quad a = \text{const} > 0$$

— составляющие скорости потенциального течения (без трения). Давление для такого течения определится из уравнения Бернулли:

$$P_0 - P = \frac{\rho}{2}(U^2 + V^2) = \frac{\rho a^2}{2}(x^2 + y^2). \tag{10.2}$$

Принимая во внимание явный вид этого решения, попробуем искать решение (3.12) в вязком случае в виде

$$u = x \cdot f'(y), \quad v = -f(y), \quad p_0 - p = \frac{\rho a^2}{2}(x^2 + F(y)) \tag{10.3}$$

(p_0 — давление в точке \mathcal{O}). Подставляя u , v , p в систему (10.1), получим

$$\begin{aligned} (f')^2 - f \cdot f'' &= a^2 + \nu f''', \\ f \cdot f' &= \frac{a^2}{2} F' - \nu f'' \end{aligned} \quad (10.4)$$

при условиях

$$\begin{aligned} u|_{y=0} = v|_{y=0} &= 0, \quad u(x, y)|_{y=\infty} = U = a \cdot x, \\ f|_{y=0} = f'|_{y=0} &= 0, \quad f'|_{y=\infty} = a, \quad f|_{y=0} = 0. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Система распадается, сначала находят f (и определяют неизвестные u , v), затем F (для определения давления).

Сделаем аффинное преобразование

$$\eta = \alpha y, \quad f(y) = A\varphi(\eta) \quad (10.6)$$

Подставляя в (10.4), получим:

$$\alpha^2 A^2 (\varphi'^2 - \varphi\varphi'') = a^2 + \nu A\alpha^3 \varphi'''$$

(здесь $\varphi' = \frac{d\varphi}{d\eta}$). Выберем α и A так, чтобы

$$\alpha^2 A^2 = a^2, \quad \nu \alpha^3 A = a^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\nu a}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{a}{\nu}},$$

$$\eta = \sqrt{\frac{a}{\nu}} y, \quad f(y) = \sqrt{\nu a} \varphi(\eta), \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned} \varphi''' + \varphi \cdot \varphi'' - (\varphi')^2 + 1 &= 0, \\ \varphi(0) = \varphi'(0) &= 0, \quad \varphi'(\infty) = 1. \end{aligned} \quad (10.7)$$

11 Пространственное осесимметричное течение в окрестности критической точки

Точное решение системы уравнений Навье – Стокса в этом случае получается при набегаии жидкости на стенку, перпендикулярную к направлению течения [20]. При этом жидкость оттекает от критической точки вдоль этой стенки во все стороны по радиусам. Начало координат расположим в критической точке, плоскость $z = 0$ совместим со стенкой, ось z направим противоположно направлению набегающего потока. Вследствие осевой симметрии $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, $\vec{v} = \{v_r, 0, v_z\}$. Стационарная система уравнений Навье – Стокса в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (11.1)$$

Здесь $u = v_r$, $w = v_z$. Граничными условиями будут

$$u|_{z=0} = w|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=\infty} = U. \quad (11.2)$$

Для невязкого осесимметричного течения ($\nu = 0$) с критической точкой имеем решение

$$U = ar, \quad W = -2az, \quad p_0 - P = \frac{\rho}{2}(U^2 + W^2) = \frac{\rho}{2}a^2(r^2 + 4z^2), \quad (11.3)$$

где a — постоянная, p_0 — давление в критической точке. Решение вязкого течения ищем в виде

$$u = rf'(z), \quad w = -2f(z), \quad p_0 - p = \frac{\rho}{2}a^2(r^2 + F(z)). \quad (11.4)$$

После подстановки (11.7) в систему Навье – Стокса (11.1) получаем

$$(f')^2 - 2ff'' = a^2 + \nu f''', \quad 2ff' = \frac{1}{4}a^2F' - \nu f'' \quad (11.5)$$

при граничных условиях

$$f|_{z=0} = f'|_{z=0} = 0, \quad F|_{z=0} = 0, \quad f'|_{z=\infty} = a. \quad (11.6)$$

Применив аффинное преобразование

$$\zeta = \sqrt{\frac{a}{\nu}}z, \quad f(z) = \sqrt{a\nu}\varphi(\zeta),$$

получим

$$\varphi''' + 2\varphi\varphi'' - (\varphi')^2 + 1 = 0 \quad (11.7)$$

с граничными условиями

$$\varphi|_{\zeta=0} = 0, \quad \varphi'|_{\zeta=0} = 0, \quad \varphi'|_{\zeta=\infty} = 1. \quad (11.8)$$

Задача (11.7), (11.8) впервые была решена Ф. Хоманом, значения φ' вычислены Н. Фресслингом [20]. Распределение скоростей при плоском и пространственном течении в окрестности критической точки приведены на следующем рисунке.

Рис

Как и в случае плоского течения при $\zeta > \zeta_0 \simeq 2,8$, вязкое течение практически не отличается от невязкого. Толщина пограничного слоя пропорциональна $\sqrt{\nu}$. Решение годится для описания стационарного осесимметрического течения вблизи критической точки (останова) для затупленных осесимметрических тел.

Для воздуха $\nu = 16 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$, для воды — $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$, критическое значение числа Рейнольдса $Re_k \sim 2800$, после чего наступает так называемое *турбулентное* течение. Так, для пластины длины $l = 2 - 200$ м при скорости набегающего потока воды $U_\infty = 1 - 10$ м/сек величина $Re \sim 10^6 - 10^9$ и толщина пограничного слоя $\delta \sim 40 - 1000$ мм. Аналогичные показатели для воздуха: длина пластины $l \sim 1 - 10$ м при скорости набегающего потока $U_\infty \sim 50 - 200$ м/сек величина $Re \sim 10^6 - 10^8$ и толщина пограничного слоя $\delta \sim 18 - 90$ мм.

12 Математический пример Прандтля перехода $Re \rightarrow \infty$

Рассмотрим затухающее колебание материальной точки (см. [20]):

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0, \quad (12.1)$$

где m — масса точки, k — коэффициент затухания, c — коэффициент восстанавливающей силы, x — расстояние колеблющейся точки от положения равновесия, t — время. Исследуем поведение решения уравнения(12.1) при очень малых m ($m = \frac{1}{Re}$). При $m = 0$ уравнение примет вид:

$$k\dot{x} + cx = 0,$$

его решение $x_1 = Ae^{-ct/k}$, где A — произвольная постоянная. Полное решение при $m \ll k^2/(4c)$ есть $x_2 = A_1e^{-ct/k} + A_2e^{-kt/m}$ (это следует из разложения $\sqrt{k^2 - 4mc} \simeq k - \frac{2mc}{k}$ при малых m). Видно, что вне малой окрестности $t = 0$ при $A_1 = A$ решение $x_2 \rightarrow x_1$, если $m \rightarrow 0$. Из условия $x|_{t=0} = 0$ следует $A_2 = -A_1$. Решение упрощенного же уравнения не может удовлетворять этому условию.

13 Система уравнений пограничного слоя

Знаменательный успех в исследованиях движения жидкости при больших числах Рейнольдса был достигнут в 1904 году и связан с именем Л. Прандтля. Прандтль показал, как можно упростить систему уравнений Навье – Стокса для того, чтобы получить её приближённое решение в предельном случае очень малой вязкости.

Как видно из автомодельных решений системы Навье – Стокса, действие вязкости на некотором расстоянии от поверхности тела почти не проявляется. Картина линий тока, а также распределение скоростей внутри жидкости в этом случае практически имеют такой же вид, как и при потенциальном течении жидкости без трения. Однако жидкость не скользит по поверхности тела, как при потенциальном течении, а прилипает к ней. Переход от нулевой скорости на стенке к скорости, фактически совпадающей со скоростью движения жидкости в модели без препятствия, совершается в очень тонком слое, называемым **пограничным** слоем. Толщина пограничного слоя $\delta \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$ и при $\text{Re} \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Принято различать две области, между которыми нельзя, правда, провести резкой границы:

1. Тонкий слой в непосредственной близости от тела. Здесь $\frac{\partial}{\partial y}$ — производная в направлении, перпендикулярном к стенке, очень велика, вязкость оказывает существенное влияние на течение, **касательные напряжения** $\tau = \eta \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$ велики;

2. Область, где вязкость не играет существенной роли, течение здесь практически потенциальное.

Рассмотрим систему уравнений Навье – Стокса в безразмерной форме в плоском двумерном случае. Пусть ось x направлена вдоль стенки, ось y — перпендикулярно стенке:

Тогда система Навье – Стокса имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned} \tag{13.1}$$

при условиях прилипания

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0 \tag{13.2}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad v|_{t=0} = v_0(x, y).$$

Кроме того, считаем, что $u(t, x, y) \rightarrow U(t, x)$ при $y \rightarrow \infty$ и толщина пограничного слоя $\delta \ll 1$. Будем считать также, что все скорости отнесены к скорости набегающего потока U , а все длины — к характерному линейному размеру тела L , так что безразмерная величина $\frac{\partial u}{\partial x}$ в рассматриваемой области по порядку равна $O(1)$, $\text{Re} = \frac{UL}{\nu} = \rho \frac{UL}{\eta}$. Воспользуемся уравнением неразрывности. Тогда из $\frac{\partial u}{\partial x} \sim 1$ следует, что $\frac{\partial v}{\partial y} \sim 1$. Так как $v|_{y=0} = 0$, то $v|_{y=\delta} \sim \delta$, $\frac{\partial v}{\partial x}|_{y=\delta} \sim \delta$, $\frac{\partial v}{\partial t}|_{y=\delta} \sim \delta$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}|_{y=\delta} \sim \delta$, но $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{y=\delta} \sim 1$.

Примем, что $\frac{\partial u}{\partial t}$ ведет себя по порядку как $u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$, т.е. локальное ускорение приблизительно равно конвективному $u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$. Это означает, что очень внезапные ускорения, например подобные тем, которые возникают при сильных волнах давления, исключаются из рассмотрения. Оценим в величинах δ величины, входящие в первые два уравнения Навье – Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad \delta \quad \frac{1}{\delta} \quad \delta^2 \quad 1 \quad \frac{1}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\delta \quad 1 \quad \delta \quad \delta \quad 1 \quad \delta^2 \quad \delta \quad \frac{1}{\delta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$1 \quad 1$$

Сохраняя в уравнениях величины порядка 1, получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (13.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

при условиях $u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0$, $u|_{t=0} = u_0(x, y)$, $u(t, x, y) \rightarrow U(t, x)$ при $y \rightarrow \infty$. Обращаем внимание, что получившаяся система включает три неизвестных функции p, u, v . Величина ρ не меняется из-за несжимаемости, т.к.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0,$$

а количество уравнений в системе пограничного слоя Прандтля равно двум. По предложению Прандтля, в силу условия $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ давление считается заданным из внешнего потенциального течения и определяется уравнением Бернулли

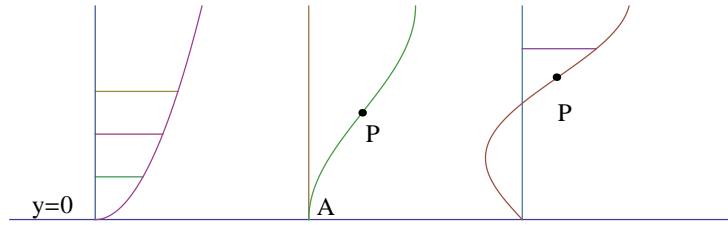
$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

где $U(t, x)$ есть скорость “проскальзывания” внешнего потенциального течения на границе $y = 0$. Заметим, что написанная здесь система (13.3) составлена уже в размерных величинах.

13.1 Отрыв пограничного слоя

Рассмотрим обтекание осесимметричного тела вязкой несжимаемой жидкостью.

Можно сделать некоторые существенные выводы о физических свойствах пограничного слоя. Выясним, при каких обстоятельствах происходит перенос жидкости,



заторможенной в пограничном слое, во внешнее течение или отрыв течения от стенки.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0 > 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0 < 0$$

Точка P — точка перегиба. В точке отрыва A не соблюдаются условия, при которых из уравнения Навье – Стокса получена система Прандтля. Обычно точка отрыва — та точка, до которой только и возможен расчет пограничного слоя. В этом случае давление, создаваемое в пограничном слое внешним течением, перестает быть известной величиной. При стационарном течении отрыв возможен лишь при $\frac{dp}{dx} > 0$. Так как

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0$$

и на стенке контура тела имеется область возрастающего давления, то жидкость, заторможенная в пограничном слое и обладающая небольшой кинетической энергией, не в состоянии далеко продвинуться в область высокого давления. Она отклоняется в сторону, отрывается от тела и оттесняется во внешнее течение. Кроме того, вблизи стенки заторможенные частицы жидкости под действием градиента давления обычно начинают двигаться в сторону, противоположную направлению внешнего течения. Точка отрыва — граница между прямым и возвратным течениями в прилегающем к стенке слое:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.$$

Из уравнения

$$uu_x + vu_y = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu u_{yy}$$

при $y = 0$ (на стенке) получим

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{dp}{dx}. \quad (13.4)$$

Так как $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ (предположение Прандтля), то, дифференцируя (13.4) по переменной y , получаем

$$(uu_x + vu_y = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu u_{yy})_y \Big|_{y=0} \Rightarrow u_{yyy} \Big|_{y=0} = 0.$$

Если $dp/dx < 0$, то и $\partial^2 u / \partial y^2 \Big|_{y=0} < 0$ (профиль скоростей выпуклый). В случае замедленного течения $dp/dx > 0$ и $\partial^2 u / \partial y^2 \Big|_{y=0} > 0$. Так как $\partial^2 u / \partial y^2 < 0$ на некотором расстоянии от стенки, то существует точка P внутри пограничного слоя, такая что $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$. Точка P — точка перегиба профиля скоростей.

13.2 Сопротивление трения в пограничном слое.

Если в случае идеальной несжимаемой жидкости тело не испытывает сопротивления трения (парадокс Д'Аламбера), то в случае движения в приближении пограничного слоя можно определить не только распределение скоростей и точку отрыва, но и сопротивление, которое возникает вследствие трения движущейся жидкости о поверхность тела.

Касательное напряжение на стенке тела равно

$$\tau_0 = \eta \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}.$$

В случае плоского обтекания для сопротивления получим формулу

$$W_{\text{тр}} = b \sum_{k=0}^l \tau_0 \cos \varphi \Delta S_k,$$

где b — высота тела, φ — угол между касательной и направлением U_∞ набегающего потока, S — координата вдоль тела. Так как $\cos \varphi dS = dx$, то

$$W_{\text{тр}} = b \cdot \eta \int_{x_0}^l \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} dx.$$

13.3 Закон подобия в системе Прандтля.

Рассмотрим стационарную систему уравнений пограничного слоя

$$uu_x + vv_y = UU_x + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u_x + v_y = 0,$$

при условиях $u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0$, $u \rightarrow U(x)$ при $y \rightarrow \infty$. Здесь $\text{Re} = \frac{U_\infty L}{\nu}$, где U_∞ — скорость набегающего потока, L — размер тела, ν — кинематическая вязкость. Сделаем замену

$$v' = v\sqrt{\text{Re}}, \quad y' = y\sqrt{\text{Re}}, \quad u' = u, \quad U' = U.$$

Тогда

$$\begin{cases} u'u'_x + vv'_{y'} = U'U'_x + \frac{\partial^2 U'}{\partial y'^2} \\ u'_x + v'_{y'} = 0 \\ u'|_{y'=0} = v'|_{y'=0} = 0, \quad u'(x, y) \rightarrow U'(x), \quad \text{при } y' \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (13.5)$$

В системе исчезла зависимость от числа Re . В пограничном слое можно считать $\text{Re} = 1$, зависимость поля скоростей от Re определяется лишь аффинным преобразованием (сравните со случаем автомодельного решения системы Навье – Стокса в окрестности критической точки). Следовательно, точка отрыва не зависит от числа Re , от Re зависит лишь угол, под которым частицы жидкости отходят от поверхности тела.

14 Решение уравнений пограничного слоя

14.1 Преобразование Мизеса

Рассмотрим систему Прандтля

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u|_{t=0} &= u_0(x, y), \quad u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0, \end{aligned}$$

$$U_t + UU_x = -\frac{P_x}{\rho}, \quad u(t, x, y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} U(x, y).$$

В стационарном случае

$$\begin{aligned} uu_x + vu_y &= UU_x + \nu u_{yy}, \\ u_x + v_y &= 0, \\ u|_{y=0} = v|_{y=0} &= 0, \quad u(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} U(x), \quad UU_x = -p_x \frac{1}{\rho}. \end{aligned} \quad (14.1)$$

Из последнего соотношения следует, что

$$p = p_0 - \rho \frac{U^2}{2}.$$

В 1927 году Мизес предложил следующее преобразование: введем функцию тока

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Тогда будет выполнено уравнение неразрывности. Введем следующие координаты:

$$\xi = x, \quad \eta = \psi(x, y).$$

Значит,

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + u_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi - vu_\psi, \\ u_y &= u_\xi \frac{\partial \xi}{\partial y} + u_\eta \frac{\partial \eta}{\partial y} = uu_\psi. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в первое уравнение системы Прандтля:

$$uu_\xi - uvu_\psi + vuu_\psi = -\frac{1}{\rho} p_\xi + \nu u \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right).$$

Введем так называемое полное давление $g = p + \rho(u^2/2)$. Малой величиной $\rho(v^2/2)$ пренебрегаем. Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \nu u \frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2}, \quad u = \sqrt{\frac{2}{\rho} [g - p(x)]}$$

при условиях $g|_{\psi=0} = p(x)$, $g|_{\psi=\infty} = p(x) + \rho(u^2/2)$.

Обратное преобразование имеет вид

$$y = \int \frac{\partial \psi}{u} = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \int_{\psi=0} \frac{\partial \psi}{\sqrt{g - p(x)}}.$$

Это уравнение нелинейное, имеет особую точку при $\psi = 0$: $u|_{\psi=0} = 0$. Следовательно, так как $g|_{\psi=\infty} = p(x) + \frac{\rho u^2}{2}$, то

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\psi=0} \neq 0.$$

Так как

$$u|_{\psi=0} = 0, \quad a \quad u \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \Big|_{\psi=0} \neq 0,$$

то

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \Big|_{\psi=0} = \infty.$$

Это уравнение сложно для исследования. Впервые теорема существования, единственности в физическом классе решений, т.е. функций, при которых имеет место обратное преобразование в переменные (x, y) , была доказана О.А. Олейник в 1963 году. В частности, в этой работе доказана теорема существования в целом, если $\partial g/\partial x \leq 0$.

Для осесимметрического течения система уравнений имеет вид

$$(ru)_x + (rv)_y = 0$$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi r)}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial(\psi r)}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \psi$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \psi \right) \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = UU_x + \nu \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3},$$

$$\psi = \psi_y = 0, \quad \text{при } y = 0,$$

$$\psi_y = U(x), \quad \text{при } y = \infty$$

15 Теорема существования и единственности решения уравнения, описывающего стационарный осесимметрический пограничный слой

Пусть жидкость обтекает выпуклое тело. Мы рассмотрим два случая — плоский и осесимметрический. В плоском случае тело занимает область вида $G \times \mathbb{R}$, где G — плоская область с гладкой границей, симметричная относительно прямой l . Через γ обозначим кривую, задающую часть границы, лежащую по одну сторону от l . В осесимметрическом случае обозначим через l ось вращения, через γ — образующую тела. При этом будем считать, что хотя бы один из концов кривой γ лежит на l .

Рассмотрим плоскость, содержащую l и γ . Она разбивается на выпуклую замкнутую область G , которую занимает тело, и дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus G$, которое заполняет жидкость. Обозначим через x натуральный параметр на γ , через $r(x)$ — расстояние от точки $\gamma(x)$ до оси l . Теперь введем координаты x и y в $\mathbb{R}^2 \setminus G$. Пусть $a \in \mathbb{R}^2 \setminus G$, p_a — ближайшая к a точка на G (так как область G выпукла, то точка p_a единственна). Тогда p_a принадлежит границе G и отрезок $[a, p_a]$ перпендикулярен кривой γ . Если $p_a = \gamma(x)$, y — расстояние от a до G , то точке a сопоставим координаты (x, y) .

Всюду далее будем предполагать, что

$$r(0) = 0, \quad r_x(0) \neq 0, \quad r(x) > 0 \text{ при } x > 0. \quad (15.1)$$

Пусть $U(t, x)$ — продольная скорость внешнего потока. При этом предполагается, что

$$U(t, 0) = 0, \quad U(t, x) > 0 \text{ при } x > 0, \quad U_x(t, x) > 0 \text{ при } x \geq 0. \quad (15.2)$$

В плоском случае система уравнений Прандтля имеет вид

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = U_t + UU_x + \nu u_{yy}, \\ u_x + v_y = 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=0} = v_0(t, x), \\ u(t, x, y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} U(t, x), \\ 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq y < \infty, \end{cases} \quad (15.3)$$

в осесимметрическом —

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = U_t + UU_x + \nu u_{yy}, \\ (ru)_x + (rv)_y = 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x, y), u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = 0, v|_{y=0} = v_0(t, x), \\ u(t, x, y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} U(t, x), \\ 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X, 0 \leq y < \infty \end{cases} \quad (15.4)$$

(см. предыдущие лекции).

15.1 Переход к переменным Крокко в осесимметрическом случае.

Пусть u — решение системы (15.4). Предположим, что $u_y > 0$ при $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X, 0 \leq y < \infty$. Сделаем следующую замену переменных:

$$\tau = t, \xi = x, \eta = \frac{u(t, x, y)}{U(t, x)}, w = \frac{u_y(t, x, y)}{U(t, x)}. \quad (15.5)$$

Обратная замена имеет вид

$$y = \int_0^\eta \frac{ds}{w(t, x, s)}, \quad u(t, x, y) = U(t, x)\eta.$$

Переменные (15.5) называются *переменными Крокко*.

Пусть каждого t, x выполнено

$$\frac{u_y(t, x)}{U(t, x)} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty. \quad (15.6)$$

Покажем, что функция w удовлетворяет уравнению

$$\nu w^2 w_{\eta\eta} - w_\tau - \eta U w_\xi + A w_\eta + B w = 0, \quad 0 \leq \xi \leq X, 0 \leq \eta < 1 \quad (15.7)$$

и граничным условиям

$$w|_{\tau=0} = w_0 \equiv \frac{u_{0y}}{U}, \quad w|_{\eta=1} = 0, \quad (\nu w w_\eta - v_0 w + C)|_{\eta=0} = 0, \quad (15.8)$$

где

$$A = (\eta^2 - 1)U_x + (\eta - 1)\frac{U_t}{U}, \quad B = -\eta U_x + \eta \frac{r_x U}{r} - \frac{U_t}{U}, \quad C = U_x + \frac{U_t}{U}.$$

Сначала исключим v . Для этого умножим первое уравнение (15.4) на r , продифференцируем по y , воспользуемся вторым уравнением и получим

$$r(uu_x)_y - (ru)_x u_y + rvu_{yy} + r(u_t)_y = \nu r u_{yyy}.$$

Чтобы исключить v из этого уравнения, умножим его на u_y и воспользуемся первым уравнением (15.4). Тогда получится уравнение

$$u_y(u_{ty} + uu_{xy}) - \frac{r_x}{r} u u_y^2 + (U_t + UU_x)u_{yy} - (u_t + uu_x)u_{yy} = \nu(u_y u_{yyy} - u_{yy}^2). \quad (15.9)$$

Теперь перейдем к переменным Крокко. Имеем $\eta_y = w$,

$$u_{yy} = U w_\eta \eta_y = U w w_\eta, \quad (15.10)$$

$u_{yyy} = U(w_\eta w)_y = U(w_{\eta\eta}w^2 + ww_\eta^2)$. Значит,

$$u_y u_{yyy} - u_{yy}^2 = U^2 w^3 w_{\eta\eta},$$

$$\begin{aligned} u_y u_{xy} - u_x u_{yy} &= (Uw)_x U w - (U\eta)_x (Uw)_y = \\ &= U_x w \cdot U w + U w_x \cdot U w - (U_x \eta + U \eta_x) U w_\eta w = U U_x w^2 + U^2 w w_x - U_x U w w_\eta - U^2 w w_\eta \eta_x = \\ &= U U_x w^2 + U^2 w w_\xi + U^2 w w_\eta \eta_x - U U_x w w_\eta - U^2 w w_\eta \eta_x = U U_x w^2 + U^2 w w_\xi - U U_x w w_\eta, \end{aligned}$$

и аналогично

$$u_y u_{ty} - u_t u_{yy} = U w (U_t w + U w_\tau - U_t \eta w_\eta).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} u(u_y u_{xy} - u_x u_{yy}) + (u_y u_{ty} - u_t u_{yy}) &= \\ &= U w ((U_t + \eta U U_x) w + U(w_\tau + \eta U w_\xi) - (U_t + \eta U U_x) \eta w_\eta). \end{aligned}$$

Наконец, $u u_y^2 = U^3 w^2 \eta$. Подставив все это в (15.9) и сократив на $U^2 w$, получаем (15.7).

Теперь докажем (15.8). Первое равенство следует из третьего соотношения в (15.4), второе равенство — из (15.6) и условия $u(t, x, y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} U(t, x)$. Так как $(u_t + u u_x + v u_y)|_{y=0} = U_t + U U_x + \nu u_{yy}$, то в силу (15.10) получаем третье равенство (так как $u|_{y=0} = 0$ для любого t, x , то $u_t|_{y=0} = 0$ и $u u_x|_{y=0} = 0$).

15.2 Теорема существования и единственности для стационарного осесимметрического пограничного слоя.

В стационарном случае уравнения Прандтля в переменных Крокко имеют вид

$$\nu w^2 w_{\eta\eta} - \eta U w_\xi + A w_\eta + B w = 0, \quad 0 \leq \xi \leq X, \quad 0 \leq \eta < 1, \quad (15.11)$$

$$w|_{\eta=1} = 0, \quad (\nu w w_\eta - v_0 w + C)|_{\eta=0} = 0, \quad (15.12)$$

где

$$A = (\eta^2 - 1)U_x, \quad B = -\eta U_x + \eta \frac{r_x U}{r}, \quad C = U_x.$$

Заметим, что

$$-U_x + \frac{r_x U}{r} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow 0. \quad (15.13)$$

В самом деле, функция $\frac{U}{r}$ непрерывно дифференцируема в нуле и ее производная при $x \neq 0$ равна $\frac{1}{r} (U_x - \frac{r_x U}{r})$ и ограничена, а $r(0) = 0$.

В работе О.А. Олейник [21] были доказаны существование и единственность решения задачи (15.11), (15.12) для достаточно малых X и найдена асимптотика функции $w(\xi, \eta)$ при $\eta \rightarrow 1$. В частности, было показано, что производные решения не являются ограниченными.

Теорема 14. Пусть r, U дважды непрерывно дифференцируемы, $U_x > 0$, $U(0) = 0$, $|U_{xx}| \leq N_1 x$, $v_0 \leq N_2 x$ ($N_i > 0$ — константы), v_0 имеет ограниченную производную, и выполнены условия (15.1) и (15.2). Тогда найдется такое $X_1 = X_1(U, r, v_0) > 0$, что в области $G_{X_1} = \{0 \leq \xi \leq X_1, 0 \leq \eta < 1\}$ существует решение задачи (15.11), (15.12), обладающее следующими свойствами:

1. w непрерывна в G_{X_1} , w_η непрерывна по η при $\eta < 1$, $ww_{\eta\eta}$ ограничена в G_{X_1} ;

2. найдутся такие $\mu \in (0, 1)$ и константы $M_i > 0$, $1 \leq i \leq 6$, что

$$\begin{aligned} M_1(1 - \eta)\sqrt{-\ln \mu(1 - \eta)} &\leq w \leq M_2(1 - \eta)\sqrt{-\ln \mu(1 - \eta)}, \\ -M_3\sqrt{-\ln \mu(1 - \eta)} &\leq w_\eta \leq -M_4\sqrt{-\ln \mu(1 - \eta)}, \\ |w_\xi| &\leq M_5(1 - \eta)\sqrt{-\ln \mu(1 - \eta)}, \quad ww_{\eta\eta} < -M_6. \end{aligned}$$

В любой замкнутой области, лежащей строго внутри G_{X_1} , функция w и ее производные, входящие в уравнение (15.11), удовлетворяют условию Гельдера. Функция w удовлетворяет уравнению (15.11) во всех внутренних точках G_{X_1} , при $0 \leq \xi \leq X_1$ выполняется условие (15.12).

Эту теорему мы докажем частично: докажем существование и порядковые оценки для $w|_{\xi=0}$. Затем изложим схему доказательства в общем случае.

Теорема 15. *Задача (15.11), (15.12) может иметь только единственное решение, непрерывное в G_X , обладающее непрерывными производными w_η , w_ξ , $w_{\eta\eta}$ внутри G_X и такое, что*

1. $w_{\eta\eta} \leq 0$,
2. $w \geq 0$ внутри G_X , $w > 0$ при $\eta = 0$,
3. w_η непрерывна по η при $\eta = 0$.

Заметим, что если $X \leq X_1$, то условия, обеспечивающие единственность, выполнены.

15.3 Доказательство теоремы единственности.

Идея состоит в следующем: рассматривается функция $\bar{w} = e^{-\alpha\xi}(w_1 - w_2)$, где w_1, w_2 — решения, а α подбирается позже. Для функции \bar{w} выписывается дифференциальное уравнение второго порядка и граничные условия. Далее рассуждения похожи на доказательство принципа максимума для уравнения теплопроводности и опираются на необходимое условие максимума функции в терминах второй производной внутри области или первой производной на границе. Этот же прием будет потом использоваться несколько раз при доказательстве априорных оценок.

Доказательство теоремы 15. Пусть w_1, w_2 — два решения, $\bar{w} = e^{-\alpha\xi}(w_1 - w_2)$. Вычитая равенства (15.11) с $w := w_1$ и $w := w_2$ и умножив разность на $e^{-\alpha\xi}$, получаем, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$\nu w_1^2 \bar{w}_{\eta\eta} - \eta U \bar{w}_\xi + A \bar{w}_\eta + [B + \nu(w_1 + w_2)w_{2\eta\eta} - \alpha U \eta] \bar{w} = 0, \quad (\xi, \eta) \in G_X,$$

и граничным условиям

$$\bar{w}|_{\eta=1} = 0, \quad \left(\nu \bar{w}_\eta - \frac{U_x}{w_1 w_2} \bar{w} \right) \Big|_{\eta=0} = 0. \quad (15.14)$$

Если $\alpha > 0$ достаточно велико, то коэффициент при \bar{w} в уравнении будет отрицательным для любого $\xi > 0$. В самом деле, из условий теоремы, определения B , (15.2) и (15.13) следует, что

$$B + \nu(w_1 + w_2)w_{2\eta\eta} - \alpha U \eta \leq \eta \left(-U_x + \frac{r_x U}{r} - \alpha U \right) < 0$$

при достаточно большом α , так как $U(x) \geq c_1 x$, $|-U_x + \frac{r_x U}{r}| \leq c_2 x$ для некоторых положительных констант c_1, c_2 .

Покажем, что функция \bar{w} не может иметь положительного максимума. Предположим обратное.

- Пусть точка максимума расположена внутри области. Тогда в ней $w_\xi = w_\eta = 0$, поэтому

$$\nu w_1^2 \bar{w}_{\eta\eta} = -[B + \nu(w_1 + w_2)w_{2\eta\eta} - \alpha U \eta] \bar{w} > 0,$$

т.е. $\bar{w}_{\eta\eta} > 0$, что для точки максимума невозможно.

- Пусть точка максимума расположена на отрезке $0 \leq x \leq X$, $\eta = 0$. Из условий теоремы следует, что в этой точке $w_1 > 0$, $w_2 > 0$. Кроме того, $U_x > 0$ и $\bar{w} > 0$, так что $\bar{w}_\eta > 0$ в силу (15.14), что опять невозможно для точки максимума.
- Пусть $(0, \eta_*)$ — точка максимума, $0 < \eta_* < 1$. Здесь мы будем обозначать ограничения всех функций на отрезок $\{\xi = 0\}$ так же, как сами эти функции. Тогда $\bar{w}_\eta(\eta_*) = 0$ и в силу условий $U(0) = 0$, $B(0) = 0$ получаем

$$\nu w_1^2(\eta_*) \bar{w}_{\eta\eta}(\eta_*) = -\nu(w_1(\eta_*) + w_2(\eta_*))w_{2\eta\eta}(\eta_*) \bar{w}(\eta_*).$$

Если $w_{2\eta\eta}(\eta_*) > 0$, то $\bar{w}_{\eta\eta}(\eta_*) > 0$ — противоречие. Если $w_{2\eta\eta}(\eta_*) = 0$, то $\bar{w}_{\eta\eta}(\eta_*) = 0$, откуда $w_{1\eta\eta}(\eta_*) = 0$. Так как $\bar{w}(\eta_*) > 0$ и $w_2(\eta_*) \geq 0$, то $w_1(\eta_*) > 0$. Рассмотрим уравнение

$$\nu w_1^2 \varphi_\eta + A \varphi = 0.$$

Тогда функция $w_{1\eta}$ является его решением. Если φ_1 — решение, $\varphi_{1\eta}(\eta_*) = 0$, то $\varphi_1(\eta_*) = 0$. Пусть $I \subset [0, 1]$ — максимальный интервал, содержащий точку η_* , на котором функция w_1 строго положительна. По теореме существования и единственности решения дифференциального уравнения, $\varphi_1|_I \equiv 0$. В частности, $w_{1\eta}|_I \equiv 0$ и $w_1|_I \equiv \text{const}$. Значит, в концах интервала I функция w_1 положительна, так что $I = (0, 1)$. Это противоречит условию $w_1(1) = 0$.

- Пусть точка максимума расположена на интервале $\xi = X$, $0 < \eta < 1$. Тогда $\bar{w}_\eta = 0$, $\bar{w}_\xi \geq 0$, откуда $U(X)\bar{w}_\xi \geq 0$, т.е.

$$\nu w_1^2 \bar{w}_{\eta\eta} = \eta U(X) \bar{w}_\xi - [B + \nu(w_1 + w_2)w_{2\eta\eta} - \alpha U(X)\eta] \bar{w} > 0$$

— противоречие.

□

15.4 Доказательство теоремы существования и асимптотика в точке останова.

Рассмотрим решение (15.11), (15.12) при $\xi = 0$. Так как $U(0) = 0$, $B(0) = 0$, $v_0(0) = 0$, то это решение удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\nu w^2 w_{\eta\eta} + A w_\eta = 0, \quad 0 \leq \eta < 1, \quad (15.15)$$

и граничным условиям

$$w(1) = 0, \quad (\nu w w_\eta + C)|_{\eta=0} = 0. \quad (15.16)$$

Трудность в доказательстве существования решения состоит в том, что уравнение нелинейно и при $\eta = 1$ имеется вырождение коэффициента при старшей производной. Кроме того, если w является решением (15.15), (15.16), то $-w$ также является решением.

Лемма 6. Уравнение (15.15) с граничными условиями (15.16) имеет решение $w(\eta)$, непрерывное при $0 \leq \eta \leq 1$ и бесконечно гладкое при $0 \leq \eta < 1$. Для этого решения справедлива оценка

$$M_7(1 - \eta) \leq w(\eta) \leq M_8(1 - \eta)\sqrt{-\ln \mu(1 - \eta)}, \quad (15.17)$$

где M_7, M_8, μ — положительные константы.

Доказательство. Сначала рассмотрим регуляризованное уравнение

$$L_\varepsilon(w) := (\nu w^2 + \varepsilon) w_{\eta\eta} + Aw_\eta = 0, \quad 0 \leq \eta < 1, \quad (15.18)$$

с граничными условиями (15.16), для него докажем теорему существования и априорные оценки, а затем сделаем предельный переход.

Обозначим

$$\lambda_\varepsilon(w) = \left(\nu w_\eta + \frac{U_x}{w} \right) \Big|_{\eta=0}.$$

Априорная оценка снизу.

Пусть w — решение (15.18), (15.16), $w(0) > 0$. Положим $V = M_9(1 - \eta)$, где $M_9 > 0$. Мы покажем, что $y := V - w \leq 0$ при достаточно малом M_9 . Имеем

$$L_\varepsilon(V) = M_9(1 - \eta^2)U_x > 0,$$

поэтому

$$L_\varepsilon(V) - L_\varepsilon(w) > 0 \text{ при } \eta < 1.$$

При достаточно малом M_9 выполнено

$$\lambda_\varepsilon(V) = \left(-\nu M_9 + \frac{U_x}{M_9} \right) > 0, \quad (15.19)$$

откуда следует

$$\left(\nu y_\eta - \frac{U_x y}{wV} \right) \Big|_{\eta=0} > 0.$$

Для доказательства неравенства $y \leq 0$ применим принцип максимума. Для любого $0 \leq \eta < 1$

$$L_\varepsilon(V) - L_\varepsilon(w) = (\nu w^2 + \varepsilon)y_{\eta\eta} + Ay_\eta > 0.$$

Пусть $y(\eta_*) = \max_\eta y(\eta) > 0$. Если $0 < \eta_* < 1$, то $y_\eta(\eta_*) = 0$, откуда $y_{\eta\eta}(\eta_*) > 0$. Пусть $\eta_* = 0$. Тогда из условий $y_\eta(0) > 0$, $w(0) > 0$, $V(0) > 0$ и $U_x > 0$ следует, что $y_\eta(0) > 0$. В обоих случаях получаем противоречие.

Замена граничных условий.

Мы получили априорную нижнюю оценку в предположении, что $w(0) > 0$. Поэтому нужно доказать существование именно такого решения. Рассмотрим то же дифференциальное уравнение, но с модифицированным граничным условием в нуле, и покажем, что решение в нуле будет положительным и совпадает с решением исходной системы. Существование решения мы будем доказывать для уравнения с модифицированным граничным условием.

Пусть $\psi(u)$, $u \in \mathbb{R}$, — бесконечно дифференцируемая функция, $\psi(u) = u$ при $u \geq M_9$, $\psi(u) = \frac{M_9}{2}$ при $u \leq \frac{M_9}{4}$, $0 \leq \psi'(u) \leq 1$ при $\frac{M_9}{4} \leq u \leq M_9$. Рассмотрим уравнение (15.18) с граничным условием

$$w(1) = 0, \quad \left(\nu w_\eta + \frac{U_x}{\psi(|w|)} \right) \Big|_{\eta=0} = 0. \quad (15.20)$$

Пусть \tilde{w} — произвольное решение (15.18), (15.20), такое что $\tilde{w}(0) \geq 0$ (тогда модуль можно убрать). Покажем, что $\tilde{w} \geq V$. Пусть $\tilde{y} = V - \tilde{w}$. Имеем

$$\left(\nu V_\eta + \frac{U_x}{\psi(V)} \right) \Big|_{\eta=0} = -\nu M_9 + \frac{U_x}{M_9} \stackrel{(15.19)}{>} 0.$$

Так как

$$\left(\nu V_\eta + \frac{U_x}{\psi(V)} \right) - \left(\nu w_\eta + \frac{U_x}{\psi(w)} \right) = \nu \tilde{y}_\eta - \frac{U_x \psi'(\chi) \tilde{y}}{\psi(V) \psi(\tilde{w})}$$

для некоторого $\chi \in \mathbb{R}$, то

$$\left(\nu \tilde{y}_\eta - \frac{U_x \psi'(\chi) \tilde{y}}{\psi(V) \psi(\tilde{w})} \right) \Big|_{\eta=0} > 0;$$

кроме того,

$$(\nu w^2 + \varepsilon) \tilde{y}_{\eta\eta} + A \tilde{y}_\eta > 0$$

при $\eta < 1$. Из определения функции ψ следует, что $\frac{U_x \psi'(\chi)}{\psi(V) \psi(\tilde{w})} \geq 0$. Так же, как для y , получаем, что $\tilde{y} \leq 0$.

Таким образом, $\tilde{w} \geq V$. В частности, $\tilde{w}(0) \geq V(0) \geq M_9$, так что $\psi(\tilde{w}(0)) = \tilde{w}(0)$ и \tilde{w} удовлетворяет граничному условию (15.16).

Доказательство существования решения.

Положим

$$\varphi(u) = - \int_0^1 \frac{\psi'(su)}{\psi^2(su)} ds \in \left[-\frac{4}{M_9^2}, 0 \right].$$

Тогда при $u > 0$

$$u\varphi(u) = \frac{1}{\psi(u)} - \frac{1}{\psi(0)}.$$

Решение (15.18), (15.20), такое, что $w(0) \geq 0$, является неподвижной точкой оператора, сопоставляющего функции θ решение линейного уравнения

$$(\nu \theta^2 + \varepsilon) w_{\eta\eta} + A w_\eta = 0$$

с граничными условиями

$$w(1) = 0, \quad \left(\nu w_\eta + U_x \left[\varphi(|\theta|) w + \frac{1}{\psi(0)} \right] \right) \Big|_{\eta=0} = 0.$$

Применяя принцип Лере–Шаудера, докажем существование неподвижной точки этого оператора. Рассмотрим уравнение, зависящее от параметра $\gamma \in [0, 1]$,

$$(\nu \gamma w^2 + \varepsilon) w_{\eta\eta} + A w_\eta = 0 \tag{15.21}$$

и граничные условия

$$w(1) = 0, \quad \left(\nu w_\eta + U_x \left[\varphi(\gamma |w|) w + \frac{1}{\psi(0)} \right] \right) \Big|_{\eta=0} = 0. \tag{15.22}$$

При $\gamma = 1$ система (15.21), (15.22) совпадает с (15.18), (15.20) на множестве функций w таких, что $w(0) \geq 0$.

Рассмотрим оператор $T(\theta, \gamma)$, который функции $\theta \in C^2[0, 1]$ сопоставляет функцию $w \in C^2[0, 1]$, являющуюся решением уравнения

$$(\nu \gamma \theta^2 + \varepsilon) w_{\eta\eta} + A w_\eta = 0 \tag{15.23}$$

с граничными условиями

$$w(1) = 0, \left(\nu w_\eta + U_x \left[\varphi(\gamma|\theta)w + \frac{1}{\psi(0)} \right] \right) \Big|_{\eta=0} = 0. \quad (15.24)$$

Нужно показать, что

1. оператор $T(\theta, \gamma)$ корректно определен, т.е. что решение (15.23), (15.24) существует и единственно;
2. оператор $T(\cdot, \cdot)$ вполне непрерывен, т.е. непрерывен и переводит ограниченные множества в предкомпактные;
3. множество решений $T(w, \gamma) = w$ равномерно ограничено по γ ;
4. отображение $I - T(\cdot, 0)$ гомотопно тождественному на шаре достаточно большого радиуса.

Тогда в силу теоремы Лере – Шаудера оператор $T(\cdot, 1)$ имеет неподвижную точку в пространстве $C^2[0, 1]$. Кроме того, будет показано, что решение (15.21), (15.22) будет положительно при $\eta = 0$ и поэтому при $\gamma = 1$ будет совпадать с решением (15.18), (15.16).

Сначала докажем, что решение (15.23), (15.24) существует и единственно. Так как уравнение линейно, все его коэффициенты непрерывны и коэффициент при старшей производной положителен, то решение (15.23) существует и единственно при любых начальных условиях $w(1), w'(1)$. Граничные условия (15.24) также линейны, поэтому достаточно доказать единственность. (В самом деле, рассмотрим линейный оператор из \mathbb{R} в \mathbb{R} , сопоставляющий числу c значение $\nu w_\eta(0) + U_x \varphi(\gamma|\theta(0))w(0)$, где w — решение уравнения с начальными условиями $w(1) = 0, w'(1) = c$. Если решение краевой задачи единственно, то этот оператор имеет нулевое ядро и поэтому сюръективен.)

Пусть w — решение уравнения (15.23) с граничными условиями

$$w(1) = 0, (\nu w_\eta + U_x \varphi(\gamma|\theta)w) \Big|_{\eta=0} = 0. \quad (15.25)$$

Покажем, что $w = 0$. Обозначим $g = w_\eta$. Тогда, если $w \not\equiv 0$, то $g \not\equiv 0$ (т.к. $w(1) = 0$). Функция g удовлетворяет уравнению

$$(\nu\gamma\theta^2 + \varepsilon)g_\eta + Ag = 0.$$

Напомним, что $A > 0$ при $\eta \in [0, 1)$. Значит, если $g \not\equiv 0$, то по теореме единственности решения дифференциального уравнения $g_\eta(\eta) \neq 0$ для любого $\eta \in [0, 1)$. Отсюда следует, что функция w не имеет локальных экстремумов на $(0, 1)$. Пусть 0 — точка положительного максимума функции w . Если $\varphi(\gamma|\theta(0)) < 0$, то $w_\eta(0) > 0$ — противоречие. Если $\varphi(\gamma|\theta(0)) = 0$, то $g(0) = 0$, и по теореме единственности решения дифференциального уравнения $g \equiv 0$.

Докажем равномерную ограниченность по $\theta \in C^2[0, 1], \gamma \in [0, 1]$ множества решений (15.23), (15.24) в метрике $C[0, 1]$. Затем покажем, что множество решений ограничено в метрике $C^3[0, 1]$ равномерно по $\theta \in \Theta, \gamma \in [0, 1]$, где Θ — ограниченное множество в $C^2[0, 1]$. Кроме того, докажем, что множество решений (15.21), (15.22) равномерно ограничено по $\gamma \in [0, 1]$ в $C^2[0, 1]$.

Сначала оценим w снизу. Пусть $V_0 = M_{10}(1 - \eta)$. Тогда

$$\left(\nu V_{0\eta} + U_x \left[\varphi(\gamma|\theta)V_0 + \frac{1}{\psi(0)} \right] \right) \Big|_{\eta=0} = \left(-\nu M_{10} + U_x \left[M_{10}\varphi(\gamma|\theta) + \frac{2}{M_9} \right] \right) \Big|_{\eta=0} > 0,$$

если M_{10} достаточно мало (при этом, M_{10} можно взять не зависящим от $\theta, \gamma, \varepsilon$). Поэтому для $y = V_0 - w$ выполнены неравенства

$$(\nu y_\eta + U_x \varphi(\gamma|\theta|)y)|_{\eta=0} > 0, \quad (\nu\gamma\theta^2 + \varepsilon)y_{\eta\eta} + Ay_\eta > 0.$$

Отсюда и из принципа максимума следует, что $y \leq 0$. Значит, $w(\eta) \geq M_{10}(1 - \eta)$.

Теперь оценим w сверху. Определим \bar{w} равенством

$$w = (M_{11} - e^{\beta\eta})\bar{w},$$

где M_{11}, β — достаточно большие положительные константы. Подставив это представление функции w в (15.23), (15.24), получаем, что \bar{w} удовлетворяет уравнению

$$(\nu\gamma\theta^2 + \varepsilon)\bar{w}_{\eta\eta} + \bar{A}\bar{w}_\eta + \bar{B}\bar{w} = 0,$$

где

$$\bar{B} = \frac{-\beta^2(\nu\gamma\theta^2 + \varepsilon) - A\beta}{M_{11} - e^{\beta\eta}} e^{\beta\eta} < 0$$

при $\beta = \frac{2U_x(0)}{\varepsilon}$ и $M_{11} = 2e^\beta$, и граничным условиям

$$\bar{w}(1) = 0, \quad (\nu\bar{w}_\eta + \bar{C}\bar{w} + \bar{C}_1)|_{\eta=0} = 0,$$

где

$$\bar{C} = U_x \varphi(\gamma\theta) - \frac{\nu\beta}{M_{11}e^{-\beta\eta} - 1} \leq -\frac{\nu\beta}{2e^{\beta(1-\eta)} - 1} < 0,$$

$\bar{C}_1 = \frac{U_x}{\psi(0)(M_{11} - e^{\beta\eta})} \leq \frac{U_x}{\psi(0)}$. Отсюда следует, что функция \bar{w} не может иметь положительного максимума при $\eta > 0$. Если 0 — точка максимума функции \bar{w} , то $\bar{w}_\eta(0) \leq 0$, откуда $\bar{C}\bar{w} \geq -\bar{C}_1$, т.е. $\bar{w} \leq \frac{\bar{C}_1}{-\bar{C}}$.

Тем самым, для любого $\theta \in C^2[0, 1]$

$$M_{10}(1 - \eta) \leq w \leq \frac{\bar{C}_1(2e^\beta - e^{\beta\eta})}{-\bar{C}}. \quad (15.26)$$

В частности, если w — решение (15.21), (15.22), то w удовлетворяет (15.26).

Докажем равномерную ограниченность $g := w_\eta$ по $\gamma \in [0, 1]$ и $\theta \in \Theta_1$, где Θ_1 ограничено в метрике $C[0, 1]$. Из (15.21) и (15.22) следует, что функция g удовлетворяет уравнению

$$(\nu\gamma\theta^2 + \varepsilon)g_\eta + Ag = 0$$

с граничными условиями

$$\left(\nu g + U_x \left[\varphi(\gamma\theta)w + \frac{1}{\psi(0)} \right] \right) \Big|_{\eta=0} = 0.$$

Так как функция w удовлетворяет оценкам (15.26), то из уравнений и граничных условий следует равномерная ограниченность g (явную оценку можно выписать, применив лемму Гронуолла). В частности, если w — решение (15.21), (15.22), то w_η ограничено равномерно по $\gamma \in [0, 1]$.

Равномерная ограниченность $w_{\eta\eta}$ сразу следует из дифференциального уравнения (15.21) или (15.23) и уже полученных оценок на w, w_η . Если продифференцировать уравнения (15.23) по η и из полученного тождества выразить $w_{\eta\eta\eta}$, то получится равномерная оценка для третьей производной.

В силу доказанного, отображение $T(\cdot, \cdot)$ переводит ограниченное множество в $C^2[0, 1] \times [0, 1]$ в ограниченное множество в $C^3[0, 1]$. По теореме Арцела – Асколи, образ будет предкомпактен в $C^2[0, 1]$. Непрерывность $T(\cdot, \cdot)$ следует из уравнений и граничных условий, которым удовлетворяет разность решений (15.23), (15.24), соответствующих различным θ , γ , и из оценок этих решений и их производных.

Тем самым показано, что на шаре достаточно большого радиуса отображения $I - T(\cdot, 1)$ и $I - T(\cdot, 0)$ задают вполне непрерывные векторные поля, между которыми существует невырожденная гомотопия. Проверим, что $I - T(\cdot, 0)$ гомотопна I на шаре большого радиуса. В самом деле, $T(\theta, 0) = w_*$ не зависит от θ , так как коэффициенты уравнения (15.23) и граничные условия (15.24) не зависят от θ . Решение уравнения $w = \lambda w_*$ принадлежит шару радиуса $\|w_*\|_{C^2[0,1]}$ для любого $\lambda \in [0, 1]$, так что поля $I - T(\cdot, 0)$ и I гомотопны на шаре радиуса, большего $\|w_*\|_{C^2[0,1]}$. Значит, поля $I - T(\cdot, 1)$ и I также гомотопны на шаре достаточно большого радиуса и поэтому $I - T(\cdot, 1)$ имеет неподвижную точку.

Остается отметить, что из (15.26) следует, что любое решение (15.21), (15.22) положительно при $\eta = 0$.

Существование решения полностью доказано.

Верхняя оценка (15.18), (15.16).

Покажем, что $w \leq V_1 := M_{12}(1 - \eta)\sigma$, где

$$\sigma = \sqrt{-\ln \mu(1 - \eta)}, \quad (15.27)$$

M_{12} , $\mu > 0$ не зависят от ε . В качестве μ можно взять любое число из интервала $(0, 1)$ такое, что $\sigma > 1$ для всех $0 \leq \eta < 1$. Неравенство доказывается тем же методом, каким были получены остальные априорные оценки. Так как

$$[(1 - \eta)\sigma]' = -\sigma + \frac{1}{2\sigma}, \quad [(1 - \eta)\sigma]'' = -\frac{1}{2\sigma(1 - \eta)} - \frac{1}{4\sigma^3(1 - \eta)},$$

то

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(V_1) &= \varepsilon M_{12} \left(-\frac{1}{2\sigma(1 - \eta)} - \frac{1}{4\sigma^3(1 - \eta)} \right) + \\ &+ \nu M_{12}^2 (1 - \eta)^2 \sigma^2 \left(-\frac{M_{12}}{2\sigma(1 - \eta)} - \frac{M_{12}}{4(1 - \eta)\sigma^3} \right) - M_{12}(1 - \eta)(1 + \eta)U_x \left[-\sigma + \frac{1}{2\sigma} \right] < 0 \end{aligned}$$

для любого $\eta \in [0, 1)$, если M_{12} достаточно велико (при этом, M_{12} можно выбрать не зависящим от ε). Далее,

$$\lambda_\varepsilon(V_1) = \left(\nu M_{12} \left(-\sigma + \frac{1}{2\sigma} \right) + \frac{U_x}{M_{12}\sigma} \right) \Big|_{\eta=0} < 0$$

при достаточно больших M_{12} (так как $\sigma > 1$).

Положим $s = V_1 - w$. Тогда для любого $\eta \in [0, 1)$

$$(\nu w^2 + \varepsilon)s_{\eta\eta} + As_\eta + V_{1\eta\eta}\nu(w + V_1)s = L_\varepsilon(V_1) < 0,$$

$$\left(\nu s_\eta - \frac{U_x s}{wV_1} \right) \Big|_{\eta=0} < 0.$$

Так как $V_{1\eta\eta} < 0$ при $\eta < 1$, то отсюда с помощью принципа максимума доказывается, что $s \geq 0$, т.е. $w \leq V_1$. При этом, для любого $\delta \in (0, 1)$ функция w равномерно ограничена по $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что w_η и $w_{\eta\eta}$ также равномерно ограничены по $\varepsilon > 0$ (рассуждения такие же, как в предыдущем пункте).

Предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим систему (15.18) с граничными условиями (15.16). Дифференцируя (15.18) по η , получаем равномерную ограниченность по ε всех производных на $[0, 1 - \delta]$. Значит, множество функций $\{w(\varepsilon)\}$ предкомпактно в $C^m[0, 1 - \delta]$ для любого $m \in \mathbb{N}$ и любого $\delta > 0$. Применяя канторовский диагональный процесс, выбираем последовательность $w(\varepsilon_i)$, сходящуюся в $C^m[0, 1 - \delta]$ для любого $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$. Предельная функция будет бесконечно дифференцируемой на $[0, 1)$ и удовлетворять оценкам (15.17), уравнению (15.15) и граничным условиям (15.16). \square

Всюду далее σ определяем формулой (15.27).

Лемма 7. *Для решения задачи справедлива оценка*

$$w(\eta) \geq M_{13}(1 - \eta)\sigma. \quad (15.28)$$

Доказательство. Пусть $\Phi = M_{13}(1 - \eta)\sigma$. Тогда

$$L(\Phi) \equiv \nu\Phi^2\Phi_{\eta\eta} + A\Phi_{\eta} = M_{13}(1 - \eta)\sigma \left[-\frac{\nu M_{13}^2}{2} - \frac{\nu M_{13}^2}{4\sigma^2} - (1 + \eta)U_x \left(-1 + \frac{1}{2\sigma^2} \right) \right] > 0,$$

$$\lambda(\Phi) \equiv \left(\nu\Phi_{\eta} + \frac{U_x}{\Phi} \right) \Big|_{\eta=0} = \left(\nu M_{13} \left(-\sigma + \frac{1}{2\sigma} \right) + \frac{U_x}{M_{13}\sigma} \right) \Big|_{\eta=0} > 0$$

при достаточно малом M_{13} . Кроме того, $\Phi_{\eta\eta} < 0$.

Пусть $s = \Phi - w$. Тогда

$$\nu w^2 s_{\eta\eta} + A s_{\eta} + \Phi_{\eta\eta} \nu (w + \Phi) s > 0,$$

$$\left(\nu s_{\eta} - \frac{U_x}{w\Phi} s \right) \Big|_{\eta=0} > 0,$$

поэтому в силу принципа максимума $s \leq 0$, т.е. $w(\eta) \geq \Phi(\eta)$. \square

15.5 Схема доказательства теоремы существования в общем случае.

Если бы в уравнении (15.11) не было слагаемого с w_{ξ} , то это было бы обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Поэтому естественно провести доказательство теоремы по следующей схеме: заменить w_{ξ} разностным соотношением и получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, доказать теорему существования для нее и затем с помощью предельного перехода доказать существование решения исходного уравнения. Этот метод называется методом прямых.

Переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть $h \in (0, X)$, $m = \lceil \frac{X}{h} \rceil$. Для каждой функции $f(\xi, \eta)$ обозначим $f^k = f^k(\eta) = f(kh, \eta)$, $k = \overline{0, m}$. Заменяем уравнение (15.11) с граничными условиями (15.12) системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\nu(w^k)^2 w_{\eta\eta}^k - (\eta U^k + \mu_k h) \frac{w^k - w^{k-1}}{h} + A^k w_{\eta}^k + B^k w^k = 0, \quad 0 \leq \eta < 1, \quad k = \overline{0, m} \quad (15.29)$$

с граничными условиями

$$w^k(1) = 0, \quad (\nu w^k w_{\eta}^k - \nu_0^k w^k + C^k) \Big|_{\eta=0} = 0. \quad (15.30)$$

Здесь $\mu_0 = 0$, а при $k \geq 1$ в качестве μ_k берется достаточно большая положительная постоянная, которая выбирается позже. Заметим, что при $k = 0$ коэффициент при $\frac{w^k - w^{k-1}}{h}$ равен нулю, т.е. w^0 является решением уравнения

$$\nu(w^0)^2 w_{\eta\eta}^0 + A^0 w_{\eta}^0 = 0.$$

16 Неклассический пограничный слой

Запишем систему уравнений Навье – Стокса в сферической системе координат [2], положив массовые силы равными нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\theta^2 + u_\varphi^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\Delta u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2u_\theta}{r^2} \text{ctg} \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{u_r u_\theta - u_\varphi^2 \text{ctg} \theta}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi (u_r + u_\theta \text{ctg} \theta)}{r} &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\Delta u_\varphi - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{u_\varphi}{2} - \cos \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \right), \end{aligned}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$,

уравнение неразрывности

$$\sin \theta \frac{\partial (u_r r^2)}{\partial r} + r \frac{\partial (u_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + r \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0.$$

Рассмотрим осесимметричное течение (для которого все частные производные по переменной φ от функций, характеризующих течение, равны нулю: $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, $u_\varphi = 0$) в стационарном случае:

$$\begin{aligned} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\Delta u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2u_\theta}{r^2} \text{ctg} \theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \\ u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad \text{и} \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}; \end{aligned}$$

уравнение неразрывности приобретает вид

$$r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + 2u_r + u_\theta \text{ctg} \theta = 0.$$

Поскольку нас интересует решение в пограничном слое, сделаем замену переменных так, чтобы толщина пограничного слоя $\delta \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$ стала порядка 1. Рассмотрим пограничный слой вокруг единичного шара и координаты

$$r = 1 + \frac{y}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad x = \theta$$

(координата y направлена по нормали к поверхности шара, x – дуга окружности радиуса 1, соответствующая углу θ). Введём новые функции

$$u = u_\theta, \quad v = u_r \sqrt{\text{Re}},$$

u – составляющая скорости по касательной, v – по нормали к шару. Система уравнений Навье-Стокса примет вид

$$\begin{aligned} \frac{uv_x}{r} + vv_y - \frac{u^2 \sqrt{\text{Re}}}{r} &= -p_y \text{Re} + \frac{1}{\text{Re}} \left(v_{yy} \text{Re} + \frac{2v_y \sqrt{\text{Re}}}{r} + \frac{v_{xx}}{r^2} + \frac{v_x \text{ctg} x}{r^2} - \frac{2v}{r^2} - \frac{2u \text{ctg} x \sqrt{\text{Re}}}{r^2} - \frac{2u_x \sqrt{\text{Re}}}{r^2} \right), \\ \frac{uu_x}{r} + vv_y + \frac{uv}{r \sqrt{\text{Re}}} &= -\frac{p_x}{r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(u_{yy} \text{Re} + \frac{2u_y \sqrt{\text{Re}}}{r} + \frac{u_{xx}}{r^2} + \frac{u_x \text{ctg} x}{r^2} - \frac{u}{r^2 \sin^2 x} + \frac{2v_x}{r^2 \sqrt{\text{Re}}} \right), \\ u_x + rv_y + \frac{2v}{\sqrt{\text{Re}}} + u \text{ctg} x &= 0. \end{aligned}$$

Пренебрегая слагаемыми порядка $\frac{1}{\text{Re}}$, получим систему уравнений неклассического пограничного слоя для обтекания единичного шара:

$$\begin{aligned} \frac{uu_x}{r} + vu_y + \frac{uv}{r\sqrt{\text{Re}}} &= -\frac{p_x}{r} + u_{yy} + \frac{2u_y}{r\sqrt{\text{Re}}}, \\ \frac{u^2}{r\sqrt{\text{Re}}} &= p_y, \\ u_x + rv_y + \frac{2v}{\sqrt{\text{Re}}} + u \text{ctg} x &= 0. \end{aligned}$$

Сравним эту систему с классической

$$\begin{aligned} u \cdot u_x + vu_y &= -p_x + u_{yy} \\ 0 &= -p_y \\ (ru)_x + (rv)_y &= 0 \end{aligned}$$

(здесь r – расстояние от точки с координатой $x = \theta$ до оси симметрии)

$$(\sin x u)_x + (\sin x v)_y = \sin x u_x + \cos x u + \sin x v_y = \sin x (u_x + \text{ctg} x u + v_y).$$

Так как $r = 1 + \frac{y}{\sqrt{\text{Re}}}$, то $r \rightarrow 1$ при $\text{Re} \rightarrow +\infty$ и, если пренебречь величинами порядка $\frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$, то неклассический пограничный слой переходит в классический. Заметим также, что если в системе уравнений Навье-Стокса сохранить слагаемые порядка $\frac{1}{\text{Re}}$, то

$$\frac{u_{xx}}{r^2 \text{Re}}, \quad \frac{v_{xx}}{r^2 \text{Re}}$$

останутся и получившаяся система будет эллиптической (тем самым, по сути, никакого упрощения в сравнении с исходной системой не произойдёт). С этой точки зрения неклассический пограничный слой, как и классический, описывается более простой, параболической, системой уравнений и поэтому стационарное решение может находиться слой за слоем по оси Ox , что существенно облегчает численное исследование задачи.

17 Дополнение 1. Свойства пространств Соболева.

Некоторые обозначения: $\text{supp } f$ — носитель функции f ; $B_R(0)$ — шар радиуса R с центром в нуле; $L_1^{\text{loc}}(\Omega)$ — множество функций $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $f \in L_1(K)$ для любого компакта $K \subset \Omega$.

Предложение 9. *Пространство Соболева полно.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\} \subset W_p^1(\Omega)$ — фундаментальная последовательность. Из определения нормы пространства $W_p^1(\Omega)$ следует, что последовательности $\{f_n\}$ и $\left\{\frac{\partial f_n}{\partial x_j}\right\}$, $1 \leq j \leq d$, фундаментальны в $L_p(\Omega)$. Значит, $f_n \xrightarrow{L_p} f$ и $\frac{\partial f_n}{\partial x_j} \xrightarrow{L_p} g_j$ при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$. В самом деле, пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда

$$\int_{\Omega} g_j \varphi \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \varphi \, dx = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx.$$

□

Пусть $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\omega \geq 0$, $\text{supp } \omega \subset B_1(0)$ и $\int_{\mathbb{R}^d} \omega(x) dx = 1$. Положим $\omega_h(x) = \frac{1}{h^d} \omega\left(\frac{x}{h}\right)$, $h > 0$. Тогда $\text{supp } \omega_h \subset B_h(0)$ и

$$\int_{\mathbb{R}^d} \omega_h(x) dx = \frac{1}{h^d} \int_{\mathbb{R}^d} \omega\left(\frac{x}{h}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \omega(y) dy = 1. \quad (17.1)$$

Пусть $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Усреднением по Стеклову – Шварцу функции f называется функция

$$(\omega_h * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \omega_h(x - y) dy \equiv \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) \omega_h(y) dy.$$

Предложение 10. Функция $\omega_h * f$ является бесконечно гладкой. Если обобщенная производная $\frac{\partial f}{\partial x^j} \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$,⁹ то $\frac{\partial}{\partial x^j}(\omega_h * f) = \omega_h * \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Тогда по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(\varphi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{\partial}{\partial x^j} \varphi(x - y) dy.$$

Отсюда по индукции выводится первое утверждение.

Докажем второе утверждение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^j}(\omega_h * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_h(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - z) \frac{\partial}{\partial z^j} \omega_h(z) dz = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial z^j} f(x - z) \omega_h(z) dz = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial y^j} f(y) \omega_h(x - y) dy. \end{aligned}$$

□

Далее считаем, что если функция f задана на области и интегрируема на любом ее ограниченном подмножестве, то она продолжена нулем на \mathbb{R}^d и для нее определено $\omega_h * f$.

Усреднение по Стеклову – Шварцу позволяет аппроксимировать функции бесконечно гладкими.

Предложение 11. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область, $f \in C(\Omega)$ (или $f \in L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$), $\Omega_0 \subset \Omega$ — компактное подмножество. Тогда $\|\omega_h * f - f\|_{C(\Omega_0)} \rightarrow 0$ (соответственно $\|\omega_h * f - f\|_{L_p(\Omega_0)} \rightarrow 0$) при $h \rightarrow 0$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $C(\Omega)$. Положим

$$\varepsilon(h) = \sup_{x \in \Omega_0} \sup_{y \in B_h(0)} |f(x - y) - f(x)|.$$

В силу равномерной непрерывности f на Ω_0 , $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Значит, для любого $x \in \Omega_0$

$$|\omega_h * f(x) - f(x)| \stackrel{(17.1)}{=} \left| \int_{B_h(0)} \omega_h(y) (f(x - y) - f(x)) dy \right| \leq \varepsilon(h) \int_{B_h(0)} \omega_h(y) dy = \varepsilon(h).$$

⁹От условия локальной интегрируемости можно отказаться, но для этого нужно ввести понятие свертки обобщенной функции с ω_h .

Пусть теперь $f \in L_p(\Omega)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $\tilde{f} \in C(\Omega)$ такая, что $\|f - \tilde{f}\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$. Выберем $h > 0$ так, что $\|\omega_h * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{C(\Omega_0)} < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\omega_h * f - f\|_{L_p(\Omega_0)} &\leq \|\omega_h * (f - \tilde{f})\|_{L_p(\Omega_0)} + \|\omega_h * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{L_p(\Omega_0)} + \|f - \tilde{f}\|_{L_p(\Omega_0)} \leq \\ &\leq \|\omega_h * (f - \tilde{f})\|_{L_p(\Omega_0)} + \varepsilon (\text{mes } \Omega_0)^{1/p} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Остается показать, что существует величина $C(p, \omega) > 0$ такая, что для любой функции $g \in L_p(\Omega)$ при достаточно малых $h > 0$ выполнено

$$\|\omega_h * g\|_{L_p(\Omega_0)} \leq C(p, \omega) \|g\|_{L_p(\Omega)}.$$

Рассмотрим случай $p > 1$ (случай $p = 1$ рассматривается аналогично с небольшими изменениями). Если h достаточно мало, то $x - y \in \Omega$ для любых $x \in \Omega_0$, $y \in B_h(0)$. В силу неравенства Гельдера,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} |(\omega_h * g)(x)|^p dx &= \int_{\Omega_0} \left| \int_{B_h(0)} g(x-y) \omega_h(y) dy \right|^p dx \leq \\ &\leq \int_{\Omega_0} \left(\int_{B_h(0)} |g(x-y)|^p dy \right) \left(\int_{B_h(0)} \omega_h^{p'}(z) dz \right)^{p-1} dx = \\ &= \left(\int_{B_h(0)} \int_{\Omega_0} |g(x-y)|^p dx dy \right) \left(\int_{B_h(0)} h^{-p'd} \left| \omega\left(\frac{z}{h}\right) \right|^{p'} dz \right)^{p-1} \leq \\ &\leq \text{mes } B_1(0) h^d \|g\|_{L_p(\Omega)}^p h^{-pd} \left(h^d \int_{B_1(0)} |\omega(y)|^{p'} dy \right)^{p-1} = \text{mes } B_1(0) \|g\|_{L_p(\Omega)}^p \|\omega\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^d)}^p. \end{aligned}$$

□

Область Ω называется звездной относительно множества $M \subset \Omega$, если $[x_0, x] \subset \Omega$ для любого $x_0 \in M$, $x \in \Omega$.

Для $\lambda > 1$ обозначим $\Omega_\lambda = \lambda\Omega = \{\lambda x : x \in \Omega\}$.

Задача. Показать, что если Ω звездна относительно $B_\delta(0)$ для некоторого $\delta > 0$, то $\overline{\Omega} = \bigcap_{\lambda > 1} \Omega_\lambda$.

Теорема 16. Если ограниченная область Ω является звездной относительно некоторого шара, то $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $W_p^1(\Omega)$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что Ω звездна относительно $B_\delta(0)$. Тогда $\overline{\Omega} \subset \Omega_\lambda$ для любого $\lambda > 1$. Пусть $f \in L_p(\Omega)$. Определим функцию $f_\lambda : \Omega_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ равенством $f_\lambda(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$. Покажем, что

$$\|f_\lambda - f\|_{L_p(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow 1. \quad (17.2)$$

В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $\tilde{f} \in C(\overline{\Omega})$ такая, что $\|f - \tilde{f}\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$. Из равномерной непрерывности \tilde{f} следует, что $\|\tilde{f}_\lambda - \tilde{f}\|_{L_p(\Omega)} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 1$. Выберем λ так, чтобы $\|\tilde{f}_\lambda - \tilde{f}\|_{L_p(\Omega)} \leq \varepsilon$. Наконец,

$$\int_{\Omega} |f_\lambda(x) - \tilde{f}_\lambda(x)|^p dx = \int_{\Omega} \left| f\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \tilde{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right|^p dx =$$

$$= \lambda^d \int_{\lambda^{-1}\Omega} |f(y) - \tilde{f}(y)|^p dy \leq \lambda^d \|f - \tilde{f}\|_{L_p(\Omega)}^p.$$

Значит,

$$\|f - f_\lambda\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f - \tilde{f}\|_{L_p(\Omega)} + \|\tilde{f} - \tilde{f}_\lambda\|_{L_p(\Omega)} + \|\tilde{f}_\lambda - f_\lambda\|_{L_p(\Omega)} \leq (2 + \lambda^{d/p})\varepsilon.$$

Тем самым, (17.2) доказано.

Пусть $f \in W_p^1(\Omega)$. Тогда $\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j}(x) = \lambda^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$. Значит, $\|f - f_\lambda\|_{W_p^1(\Omega)} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 1$. Остается показать, что $\|f_\lambda - \omega_h * f_\lambda\|_{W_p^1(\Omega)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. В самом деле, в силу предложения 10, $\frac{\partial}{\partial x_j}(\omega_h * f) = \omega_h * \frac{\partial f}{\partial x_j}$, так что

$$\|f_\lambda - \omega_h * f_\lambda\|_{W_p^1(\Omega)} = \|f_\lambda - \omega_h * f_\lambda\|_{L_p(\Omega)} + \left(\sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j} - \omega_h * \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j} \right\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

в силу предложения 11. □

18 Дополнение 2. Построение диффеоморфизма окрестности кривой на цилиндр.

Мы докажем следующие утверждения.

Предложение 12. Пусть M, N — гладкие n -мерные многообразия, M компактно, $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ — гладкое отображение, $f_0(x) = F(x, 0)$, $f_1(x) = F(x, 1)$. Пусть $y \in N$ — регулярное значение F , f_0 и f_1 . Тогда $F^{-1}(y)$ является дизъюнктным объединением следов гладких простых кривых. Для каждой из них возможны четыре случая:

1. оба конца кривой принадлежат $M \times \{0\}$;
2. оба конца кривой принадлежат $M \times \{1\}$;
3. один конец принадлежит $M \times \{0\}$, второй — $M \times \{1\}$;
4. кривая замкнута и ее след содержится в $M \times (0, 1)$.

При этом, если кривая незамкнута, то $M \times (\{0\} \cup \{1\})$ содержит только ее концы.

В окрестности точки y выберем локальные координаты. Тогда можно считать, что в окрестности $F^{-1}(y)$ отображение F задается как вектор-функция со значениями в \mathbb{R}^n , $F(x, t) = (F^1(x, t), \dots, F^n(x, t))$.

Предложение 13. Пусть выполнены условия предложения 12, γ — связная компонента $F^{-1}(y)$, являющаяся следом незамкнутой кривой. Тогда существует ее окрестность U и диффеоморфизм $\varphi : U \rightarrow B_\varepsilon(y) \times [a, b]$, задаваемый равенством

$$\varphi(x, t) = (F^1(x, t), \dots, F^n(x, t), s(x, t)). \quad (18.1)$$

При этом, в случае 1 в окрестности концов кривой $s(x, t) = t + a$ и $s(x, t) = b - t$, в случае 2 — $s(x, t) = 1 - t + a$ и $s(x, t) = b + t - 1$, в случае 3 — $s(x, t) = t + a$ и $s(x, t) = b + t - 1$.

Обозначим $x^{n+1} = t$. Так как y — регулярная точка, то для любого $x \in \gamma$ найдется такое $k \in \{1, \dots, n\}$, что матрица Якоби отображения

$$(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) \mapsto (F^1(x, x^n), \dots, F^n(x, x^n), x^k)$$

(имеющего вид (18.1)) невырождена. Значит, в окрестности точки x это отображение является диффеоморфизмом. Более того, поскольку y — регулярное значение f_0 и f_1 , то в окрестности концов кривой в качестве x^k можно взять t , так как в матрице Якоби отображения F одним из ненулевых миноров будет

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1(x, \tau)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1(x, \tau)}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F^n(x, \tau)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n(x, \tau)}{\partial x^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_\tau^1(x)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_\tau^1(x)}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_\tau^n(x)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_\tau^n(x)}{\partial x^n} \end{pmatrix},$$

$\tau \in \{0, 1\}$. Так как множество γ компактно, то его можно покрыть конечным числом окрестностей, в которых существует диффеоморфизм вида (18.1). Нужно склеить эти диффеоморфизмы так, чтобы получился диффеоморфизм окрестности всей кривой на цилиндр. Достаточно эту склейку построить для двух окрестностей, дальше она получается по индукции.

Предложение 14. Пусть $U_i \subset M \times [0, 1]$, $i = 1, 2$, отображения

$$\varphi_i : U_i \rightarrow B_{\varepsilon_i}(y) \times [a_i, b_i], \quad \varphi_i(x, t) = (F^1(x, t), \dots, F^n(x, t), s_i(x, t))$$

являются диффеоморфизмом,

$$\gamma \subset U_1 \cup U_2, \quad \gamma \cap U_i = \varphi_i^{-1}(\{y\} \times [a_i, b_i]), \quad (18.2)$$

$\gamma \cap U_1 \cap U_2$ непусто и связно. Тогда найдутся множество $U \supset \gamma$, $\varepsilon > 0$, $a < b$ такие, что U диффеоморфно $B_\varepsilon(y) \times [a, b]$ и отображение вида (18.1) задает этот диффеоморфизм.

Доказательство. Можно считать, что

$$\gamma \setminus U_2 \neq \emptyset \text{ и } \gamma \setminus U_1 \neq \emptyset \quad (18.3)$$

(иначе можно взять соответственно $U = U_1$ или $U = U_2$).

Пусть $(x_*, t_*) \in \gamma \cap U_1 \cap U_2$, $\tau_* = s_1(x_*, t_*)$. Положим $\tilde{U} = \varphi_1^{-1}(B_\varepsilon(y) \times (\tau_* - \delta, \tau_* + \delta))$. Если ε и δ достаточно малы, то замыкание \tilde{U} содержится в $U_1 \cap U_2$. Поэтому на множестве $B_\varepsilon(y) \times [\tau_* - \delta, \tau_* + \delta]$ определено отображение $\tilde{\varphi} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$. Оно является диффеоморфизмом и имеет вид $\tilde{\varphi}(\tilde{y}, \sigma) = (\tilde{y}, f(\tilde{y}, \sigma))$, $\tilde{y} \in B_\varepsilon(y)$, $\sigma \in (\tau_* - \delta, \tau_* + \delta)$. При этом, $\frac{\partial f}{\partial \sigma} \neq 0$. Заметим также, что

$$s_2(x, t) = f(F(x, t), s_1(x, t)), \quad (x, t) \in \tilde{U}. \quad (18.4)$$

Построим склейку функций $\sigma \mapsto \sigma$ и $\sigma \mapsto f(\tilde{y}, \sigma)$. Без ограничения общности можно считать, что $\frac{\partial f}{\partial \sigma} > 0$ (иначе вместо $s_2(t, x)$ рассматриваем $-s_2(t, x)$) и что $b_1 < a_2$ (иначе вместо $s_2(t, x)$ рассматриваем $s_2(t, x) + c$, где c — достаточно большая константа), так что $f(\tilde{y}, \sigma) > \sigma$ при $\sigma \in [a_1, b_1]$.

Пусть $\psi : (\tau_* - \delta, \tau_* + \delta) \rightarrow [0, 1]$ — бесконечно гладкая неубывающая функция, $\psi|_{(\tau_* - \delta, \tau_* - \delta/2)} = 0$, $\psi|_{(\tau_* + \delta/2, \tau_* + \delta)} = 1$. Положим

$$g(\tilde{y}, \sigma) = (1 - \psi(\sigma))\sigma + \psi(\sigma)f(\tilde{y}, \sigma).$$

Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma}(\tilde{y}, \sigma) = 1 - \psi(\sigma) + \psi(\sigma) \frac{\partial f}{\partial \sigma}(\tilde{y}, \sigma) + \psi'(\sigma)(f(\tilde{y}, \sigma) - \sigma) > 0.$$

Отсюда следует, что отображение $(\tilde{y}, \sigma) \mapsto (\tilde{y}, g(\tilde{y}, \sigma))$ является диффеоморфизмом.

Положим

$$\tilde{U}_1 = \{(x, t) \in U_1 : \varphi_1(x, t) \in B_\varepsilon(y) \times [a_1, \tau_* - \delta]\},$$

$$\tilde{U}_2 = \{(x, t) \in U_2 : F(x, t) \in B_\varepsilon(y), s_2(x, t) \in [f(F(x, t), \tau_* + \delta), b_2]\}.$$

Тогда $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U} = \emptyset$, $\tilde{U}_2 \cap \tilde{U} = \emptyset$. В самом деле, если $(x, t) \in \tilde{U}$, то $s_1(x, t) < \tau_* + \delta$ и, значит, $s_2(x, t) < f(F(x, t), \tau_* + \delta)$ в силу (18.4). Покажем, что $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. В самом деле, иначе найдется последовательность $\{(x_n, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$, сходящаяся к (x, t) , такая, что $y_n := F(x_n, t_n) \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$ (см. (18.2)). Переходя к пределу в неравенствах, получаем, что $s_1(x, t) \in [a_1, \tau_* - \delta]$ и $s_2(x, t) \in [f(y, \tau_* + \delta), b_2]$ и γ гомеоморфно окружности. В силу предположения (18.3), на γ найдутся точки $\xi_1 \notin U_1$, $\xi_2 \notin U_2$. Но тогда $\gamma \cap U_1 \cap U_2$ несвязно — противоречие.

Теперь определим отображение φ . Положим

$$s(x, t) = \begin{cases} s_1(x, t), & (x, t) \in \tilde{U}_1, \\ g(F(x, t), s_1(x, t)), & (x, t) \in \tilde{U}, \\ s_2(x, t), & (x, t) \in \tilde{U}_2, \end{cases}$$

$$\varphi(x, t) = (F^1(x, t), \dots, F^n(x, t), s(x, t)). \quad \square$$

Доказательство предложений 1 и 2. Пусть γ — связная компонента $F^{-1}(y)$. Тогда $\gamma = \cup_{k=1}^m g_k([0, 1])$, где $g_k : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ — гладкие параметризации простых кривых. Пусть $\xi_0 = g_1(0)$, $\xi_1 = g_1(1)$. Если $\xi_1 \in M \times (0, 1)$, то $\xi_1 \in g_j([0, 1])$ для некоторого $j \neq 1$, $\xi_1 = g_j(\tau)$. Положим

$$\tilde{g}_1(t) = \begin{cases} g_1(t), & t \in [0, 1], \\ g_j(t - 1 + \tau), & t \in [1, 2 - \tau]. \end{cases}$$

Это параметризация некоторой гладкой кривой. Если существуют такие различные $t', t'' \in [0, 2 - \tau]$, что $\tilde{g}_1(t') = \tilde{g}_1(t'')$, то $\tilde{g}_1([0, 2 - \tau])$ гомеоморфно окружности, а значит, и γ является следом замкнутой кривой. Пусть \tilde{g}_1 инъективно. Если

$$\tilde{g}_1(2 - \tau) \in M \times (0, 1),$$

то проводим аналогичные рассуждения, иначе рассматриваем точку ξ_0 . Тем самым, по индукции получаем доказательство предложения 1. (Поскольку y является регулярным значением f_0 и f_1 , то замкнутая кривая не пересекается с $M \times (\{0\} \cup \{1\})$).

Предложение 2 получается из предложения 3 по индукции. \square

19 Дополнение 3. Доказательство теоремы Сарда.

20 Дополнение 4. Лемма о жидком объеме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Гидродинамика*, “Наука”, Москва, (1988).
- [2] Л.И. Седов, *Механика сплошной среды*, “Наука”, Москва, (1977).
- [3] Л.В. Овсянников, *Лекции по основам газовой динамики*, Москва-Ижевск, (2003).

- [4] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Проблемы гидромеханики и их математические модели*.
- [5] Бронштейн, Семендяев. Справочник
- [6] П.Ф. Фильчаков, *Приближенные методы конформных отображений*. Киев, Наукова думка, 1964.
- [7] В.И. Власов, *Краевые задачи в областях с криволинейной границей*. М., Вычислительный центр АН СССР, 1987.
- [8] Г. Шлихтинг, *Теория пограничного слоя*, "Наука Москва, (1974).
- [9] В.С. Владимиров, В.В. Жаринов, *Уравнения математической физики*. М., Физматлит, 2000.
- [10] В.Г. Мазья, *Пространства С.Л. Соболева*. Л.: Изд. ЛГУ, 1985.
- [11] С.Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. Изд. Ленингр. ун-та, 1950.
- [12] Х. Трибель. *Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы*. М., Мир, 1980 г.
- [13] В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров, *Сборник задач по оптимизации*. М., Наука, 1984.
- [14] Ю.Г. Решетняк, "Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей", *Сиб. матем. журнал*, **21**:6 (1980), 108–116.
- [15] О.В. Бесов, "Интегральные оценки дифференцируемых функций на нерегулярных областях", *Матем. сб.*, **201**:12 (2010), 69–82.
- [16] J. Leray, J. Schauder, "Topologie et equations fonctionnelles". *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 13 (1934), pp. 45–78.
- [17] М.А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*. Гостехиздат, 1956.
- [18] Е.В. Троицкий, *Степень отображения и ее применения. Учебное пособие по курсу "Прикладные проблемы геометрии"*. М., 1996.
- [19] О.А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*. М., Наука, 1970.
- [20] Г.Шлихтинг. Теория пограничного слоя, "Наука М., 1974.
- [21] О.А. Олейник, "Математические задачи теории пограничного слоя", *УМН*, **23**:3 (1968), стр. 3–65.