Программа экзамена по курсу “Выпуклый анализ”

А.С. Демидов

МГУ, мех-мат, экономический поток. Весенний семестр 2011-2012 уч.г.

1. Лемма Каратеодори. (Если $\dim \mathbf{aff}(B) = d < \infty$, то любой элемент $x \in \mathbf{co}(B)$ может быть представлен в виде выпуклой оболочки не более, чем $d+1$ элементов из B).

2. Теорема Каратеодори. (Выпуклая оболочка конечномерного компакта — компакт).

3. Первая теорема отделимости в конечномерном случае. (В $\mathbb{R}^d$ два непустых непересекающихся выпуклых множеств всегда отделимы).

4. Первая теорема отделимости в бесконечномерном случае. (В нормированном пространстве два непустых непересекающихся выпуклых множеств отделимы, если пересечение внутренности одного из множеств с другим не пусто).

5. Вторая теорема отделимости. (В нормированном пространстве два непустые непересекающиеся выпуклые замкнутые множества строго отделимы, если хотя бы одно из этих множеств — компакт).

6. Первая теорема Крейна–Мильмана. (Выпуклый компакт в нормированном пространстве имеет крайнюю точку).

7. Вторая теорема Крейна–Мильмана. (Выпуклый компакт в нормированном пространстве является замыканием выпуклой оболочки своих крайних точек).

8. Теорема о максимуме выпуклой функции f на конечномерном компакте M. (Если множество крайних точек множества M компактно, то максимум f достигается в крайней точке множества M).

9. Неравенства $f(z+th) - f(z) \le t\Big(f(z+h) - f(z)\Big)$, $f(y+\beta(y-x)) \ge f(y) + \beta\big(f(y) - f(x)\big)$ для выпуклой функции f и $t \in [0,1]$, $\beta \ge 0$.

10. Теорема о локальной липшицевости выпуклой функции, заданной в конечномерном пространстве.

11. Теорема о существовании производной $f'(x,h)$ по направлению выпуклой функции $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ и о неравенстве $f(x+h) \ge f(x) + f'(x,h)$.

12. Эквивалентность замкнутости надграфика, замкнутости лебегова множество и полунепрерывности снизу.

13. Теорема о биполяре.

14. Теорема о субдифференциале для выпуклой замкнутой функции.

15. Теорема о равенстве $f'(x_0,h) = \max\limits_{g \in \partial f(x_0)} \big\langle g, h \big\rangle$ для выпуклой замкнутой функции f.

16. Теорема Рокафеллара–Моро.

17. Теорема Дубовицкого–Милютина.

18. Теорема Каруша–Куна–Таккера.

19. Метод центрированных сечений.

20. Метод эллипсоидов.

21. Теорема Мазура о сходимости выпуклых комбинаций элементов слабо сходящейся последовательности.

22. Теорема о существовании минимума для выпуклого, коэрцитивного непрерывного функционала на замкнутом выпуклом подмножестве рефлексивного банахова пространства.

23. Теорема о производной по Гато выпуклого функционала и соответствующем вариационном неравенстве на выпуклом подмножестве банахова пространства.

24. Преобразование Лежандра–Юнга–Фенхеля.

25. Теорема Фенхеля–Моро.

26* Двойственность в линейном программировании. Экономическая интерпретация.

Простейшие задачи

1) Пересечение выпуклых — выпукло. Замыкание, внутренность выпуклого — выпукло.

2) Выпуклая комбинация точек выпуклого множества A принадлежит A.

3) Верно ли, что выпуклая оболочка замкнутого множества замкнута?

4) Показать, что выпуклая оболочка компакта может не быть компактом.

5) Найти $A \pm B \overset{def}{=} \{x = a \pm b \mid a \in A\,, b \in B\ \}$, если
$A = \{(x,y) \in R^2 \mid y = ax,\ |x| < 1\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 \mid y = b\,x,\ |x| \le 1\}$;
$A = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 \le a^2 < x^2 + y^2 < 1\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 \le b^2 < x^2 + y^2 \le 1\}$.

6) Показать, что $A \pm B$ открыто, если хотя бы одно из множеств A или B открыто.

7) Верно ли, что $A \pm B$ замкнуто, если хотя бы одно из множеств A или B замкнуто? А если оба компакты? Что есть $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\,,\ y \ge 1/x\,\} + \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le 0\,,\ y = 0\,\}$?

8) Показать, что множества $A \pm B$ выпуклы, если A и B выпуклы.

9) Дать пример двух выпуклых множеств в $\mathbb{R}^2$, которые нельзя строго отделить.

10) Вычислить функцию Минковского $p_U(x)$, если

(а) $U = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \sum\limits_{k=1}^{d} |x_k|^p \le 1\}$, где $p \ge 1$; (б) $U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$;

11) Все крайние точки множества лежат на его границе.

12) Показать, что замкнутый единичный шар в пространстве $C[0,1]$ имеет ровно две крайние точки (какие?), а в пространстве $L_1(0,1)$ — ни одной.

13) Функция f выпукла, если и только если область ее определения выпукла и $f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ для любых $x_1,\ x_2 \in \mathbf{dom} f$ и любого $t \in [0,1]$.

14) Локальный минимум z выпуклой функции f является ее глобальным (абсолютным) минимумом.

15) Показать, что функция $x \mapsto e^{f(x)}$ выпукла, если выпукла функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

16) Показать, что суперпозиция двух выпуклых не всегда выпукла.

17) Поточечный супремум замкнутых (соответственно, выпуклых) функций замкнут (соответственно, выпуклый).

18) Поляра A^0 любого множества $A \subset X$ является замкнутым выпуклым множеством в $Y = X^*$, содержащим нуль.

19) Показать, что $\|A^0\| < \infty \ \Leftrightarrow\ 0 \in \mathrm{int} A$.

20) Проверить, что опорная функция замкнута, выпукла и является положительно однородной 1-го порядка

21) Проверить, что множество $\partial f(x_0)$ замкнуто и выпукло в X^*.

22) Пусть $k \ge 0$, а $f : X \ni x \mapsto f(x) = \begin{cases} k\|x\|\,, & \text{если } x \ne 0\,, \\ 0\,, & \text{если } x = 0\,. \end{cases}$ Найти $\partial f(0)$.

23) Найти $f^*(y) \overset{def}{=} \sup\limits_x \Big[\langle x, y\rangle - f(x)\Big]$, если 1) $f(x) = ax^2 + bx + c$; 2) $f(x) = e^x$; 3) $f(x) = |x|$.

24) Найти субдифференциал функций $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, если $f(x,y) = e^{\max\{x^2, 2y\}} + |x+y|$, а $g(x,y) = \max\left\{\int_0^x (e^t - t - 1)\,dt\ ,\ x + |y|\right\}$ Выпуклы ли эти функции?

Задачи среднего уровня сложности

25) $\mathbf{co}(B)$ есть наименьшее выпуклое множество, содержащее B.

26) B выпукло тогда и только тогда, когда $B = \mathbf{co}(B)$.

27) Вычислить функцию Минковского $p_U(x)$, если
(i) $U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > x_1^2 - 1\}$; (ii) $U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > x_1^2 + 1\}$.

28) Множество крайних точек замкнутого единичного шара $\overline{B}_H = \{x \in H \mid \|x\| \le 1\}$ гильбертова пространства — это единичная сфера.

29) Пусть X, Y — линейные пространства, $T : X \to Y$ линейный оператор, $A \subset X$ — выпуклое подмножество. Тогда для любого крайнего подмножества B множества $T(A)$ множество $T^{-1}(B) \bigcap A$ (полный прообраз в A множества B) будет крайним подмножеством исходного множества A.

30) Если $T : X \to Y$ линейный оператор, то полный прообраз в A крайней точки множества $T(A)$ есть крайнее подмножество множества A.

31) Пусть A — выпуклое множество, B — крайнее подмножество в A, а C — крайнее подмножество в B. Тогда C – крайнее подмножество множества A.

32) Крайняя точка крайнего подмножества — это крайняя точка исходного множества.

33) Пусть A — выпуклый компакт в X, $f \in L(X, \mathbb{R})$ и $b = \max\limits_{x \in A} f(x)$. Тогда множество $M(f, A) = \{x \in A \mid f(x) = b\ \}$ — крайнее в А подмножество.

34) Проверить, что для $\forall\,\alpha \in \mathbb{R}$ лебегово множество $\mathcal{L}_\alpha(f) \overset{def}{=} \{x \in X \mid f(x) \le \alpha\ \}$ функции f выпукло или пусто, если функция f выпукла.

35) Если функция f выпукла, то для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{dom} f$ и любых неотрицательных $t_1, \ldots t_n$, таких, что $\sum\limits_{k=1}^{n}$, справедливо неравенство Йенсена $f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \le \sum\limits_{k=1}^{n} t_k f(x_k)$.

36) Пусть x есть выпуклая комбинация точек $x_1, \ldots, x_n$. Тогда $f(x) \le \max\limits_{1 \le k \le n} f(x_k)$.

37) Привести пример выпуклой функции f, заданной в бесконечномерном пространстве, которая разрывна внутри $\mathbf{dom} f$.

38) Доказать, что если выпуклая функция $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ определена на всей прямой и ограничена, то она есть константа.

39) Верно ли, что любая выпуклая функция, конечная на всей прямой, непрерывна?

40) Пусть $t = (t_1, \ldots, t_d) \in Y \subset \mathbb{R}^d_+$, $f(x) = \sup\limits_{t \in Y} \sum\limits_{k=1}^{d} t_k f_k(x)$, а f_k — выпуклые и замкнутые. Показать, что f тоже выпукла и замкнута.

41) Если a — неотрицательное число, а функции f_1 и f_2 замкнуты и непрерывны, то замкнуты и выпуклы функции, заданные следующими формулами
а) $f(x) = a f_1(x), \quad \mathbf{dom} f = \mathbf{dom} f_1$;
б) $f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad \mathbf{dom} f = (\mathbf{dom} f_1) \cap (\mathbf{dom} f_2)$;
в) $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}, \quad \mathbf{dom} f = (\mathbf{dom} f_1) \cap (\mathbf{dom} f_2)$.

42) Пусть $B = \{\ x \in X \mid \|x\|_X < 1\ \}$, а $B^* = \{\ y \in Y = X^* \mid \|y\|_Y < 1\ \}$. Тогда $B^0 = (\overline{B})^0 = \overline{B^*}$.

43) Проверить, что
а) $(tA)^0 = tA^0$ для любых $t > 0$ и $A \subset X$;
б) $A^0 \subset B^0 \subset X^*$, если $B \subset A \subset X$;
в) $A^0 = [\mathbf{co} A]^0 = [\overline{\mathbf{co}} A]^0$ для любого $A \subset X$;
г) $(A_1 \cup A_2)^0 = A_1^0 \cap A_2^0$ для любых A_1 и A_2 из X.

44) Найти поляру квадрата $\{\ |x_1| \le 1\,,\ |x_2 1| \le 1\ \} \subset \mathbb{R}^2$ и объединения его вершин.

45) Пусть $A = [a_1, a_2] \subset \mathbb{R}$. Найти A^0, $p_{A^0}(y)$ и $s_A(y)$ в следующих случаях: $0 < a_1 \le a_2$, $0 \le a_1 < a_2$, $a_1 < 0 < a_2$, $a_1 < a_2 \le 0$.

46) Найти A^0, $p_{A^0}(y)$ и $s_A(y)$, если $A = (a, b] \cup [c, d]$, где $a < b \le 0$, $0 < c \le d$.

47) Пусть $k \in [0, \infty)$. Найти A^0 и A^{00} в следующих случаях:
i) $A = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_2 \ge k|a_1|\ \}$;
ii) $A = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_2 > k|a_1|\ \}$

48) Построить двойственную задачу к таким задачам:
а) $\langle c, x\rangle \to \min,\ \ Ax \le b,\ \ x \ge 0$;
б) $\langle c, x\rangle \to \min,\ \ Ax = b,\ \ B \le b$.

49) Пусть Z — нормированное пространство, $l : Z \ni z \mapsto l(z)$ — линейная форма, $a : X \times Z \ni (z_1, z_2) \mapsto a(z_1, z_2)$ — симметричная неотрицательна или, соответственно, положительно определенная (т.е. $a(z, z) \ge C\|z\|^2$, $C > 0$) билинейная форма. Тогда $F : z \mapsto F(z) = a(z, z) + l(z)$ — выпуклый или, соответственно, строго выпуклый функционал.

50) Показать, что функционал $F : u \mapsto \int\limits_0^1 u^2\, dt$ полунепрерывен снизу, но не непрерывен относительно слабой сходимости в $L^2(0, 1)$.

Задачи посложнее

51) В нормированном пространстве $X = l_2$ два аффинных множества $A = \{0\}$, $B = \{b = (b_1, \ldots, b_n, \ldots) \in l_2 \mid \sum b_k = 1\}$ очевидно не пересекаются. Проверить, что они выпуклы. Доказать, что они неотделимы. Почему в этом случае не применимы теоремы об отделимости?

52) Пусть A — выпуклый компакт в X, а $\mathfrak{M}$ — некоторое центрированное семейство замкнутых крайних подмножеств D множества A. Тогда $D_1 = \bigcap\limits_{B \in \mathfrak{M}} B$ — тоже замкнутое крайнее подмножество множества A.

53) Пусть A — выпуклый компакт в X, состоящий более чем из одной точки. Тогда A содержит замкнутое крайнее подмножество B, не совпадающее с самим множеством A.

54) Привести пример, когда $\max\limits_{x\in A} f(x) \neq \max\limits_{x\in \mathbf{extr} A} f(x)$ для выпуклой функции $f : A \to \mathbb{R}$, заданной на компакте $A \subset \mathbb{R}^2$. Какое дополнительное условие на множество $\mathbf{extr}A$ обеспечивает равенство $\max\limits_{x\in A} f(x) = \max\limits_{x\in \mathbf{extr} A} f(x)$?

55) Доказать, что если $0 \in A$, то опорная функция множества A совпадает с функцией Минковского поляры этого множества. Проверить непосредственно для $A = [0,1]$.

56) Пусть имеется замкнутое выпуклое множество $K \subset X = \mathbb{R}^n$, выпуклый функционал $F : K \to \mathbb{R}$, с производной по Гато $A : K \to X^*$, подчиненной условию: $\frac{\langle A(x) - A(x_0)\,, x - x_0\rangle}{\|x - x_0\|} \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$, $x \in K$ для некоторого $x_0 \in K$. Доказать, что вариационное неравенство $\langle A, x - \widehat{x}\rangle \geq 0$ $\forall\, x \in K$ имеет решение.

В экзаменационные билеты войдут два теоретических вопроса и две задачи (простая и среднего уровня сложности). Пожелавшие отвечать на вопрос 26^* и/или решать задачи посложнее, будут поощрены (в зависимости от качества ответа).