Вопросы к экзамену по выпуклому анализу

Локуциевский Л.В.

2017

Экзаменационный билет включает в себя 2 теоретических вопроса и 0, 1, 2 или 3 задачи в зависимости от доли k задач из списка, решенных экзаменуемым в течение семестра:

$$k < \frac{1}{3} \Rightarrow 3 \text{ задачи}, \qquad \frac{1}{3} \leqslant k < \frac{3}{5} \Rightarrow 2 \text{ задачи},$$
$$\frac{3}{5} \leqslant k < \frac{5}{6} \Rightarrow 1 \text{ задача}, \qquad k \geqslant \frac{5}{6} \Rightarrow 0 \text{ задач}.$$

Каждая не решенная во время экзамена задача понижает итоговую оценку на 1 балл.

---

1. Выпуклые операции (сумма по Минковскому, замыкание, относительная внутренность, выпуклая оболочка). Доказательство формулы $C = \operatorname{conv} C$ для выпуклого множества C.

2. Размерность выпуклого множества. Непустота относительной внутренности. Доказательство формул $C \subset \operatorname{cl} \operatorname{ri} C$ и $(\operatorname{int} C = \emptyset) \Rightarrow (\dim \operatorname{aff} C < d)$ для выпуклого множества $C \subset \mathbb{R}^d$. Доказательство того, что сумма относительно открытых выпуклых множеств относительно открыта (без использования теоремы отделимости).

3. Теорема о строгой отделимости (в конечномерном случае).

4. Теорема о собственной отделимости (в конечномерном случае).

5. Четыре эквивалентных определения выпуклой функции. Неравенство Йенсена. Доказательство того, что если выпуклая функция $f : \mathbb{R}^d \to \bar{\mathbb{R}}$ обращается в $-\infty$ в одной точке, то она обращается в $-\infty$ в любой точке из $\operatorname{ri} \operatorname{dom} f$.

6. Непрерывность собственных выпуклых функций.

7. Формула для относительной внутренности надграфика выпуклой функции. Замкнутые выпуклые функции. Пример замкнутой, ограниченной, не непрерывной выпуклой функции.

8. Опорные гиперплоскости. Их связь с субдифференциалом функции. Локализация субдифференциала.

9. Монотонность, выпуклость и замкнутость субдифференциала. Непустота субдифференциала в точках относительной внутренности эффективной области. Ограниченность и неограниченность субдифференциала.

10. Дифференцируемость выпуклых функций: два критерия существования производной выпуклой функции в точке.

11. Критерий непрерывной дифференцируемости выпуклой функции на множестве.

12. Критерий разрешимости системы выпуклых неравенств.

13. Теорема Каруша-Куна-Таккера. Условие Слейтера. Пример: дана функция $h : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $h' > 0$, $h'' < 0$ и числа $a_i > 0$, $i = 1, \dots, n \in \mathbb{N}$, решить $\sum_{i=1}^{n} a_i h(x_i) \to \max$ при условиях $x_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant 1$.

14. Базовые выпуклые функции (индикаторная, опорная и функция Минковского) и их свойства (выпуклость, замкнутость и др.).

15. Критерий выпуклости C^1-функций. Критерий выпуклости C^2-функций.

16. Выпуклые операции: func, conv и cl, и их свойства.

17. Выпуклые операции $+$, $\square$, $\wedge$, $\vee$, унарные линейные преобразования и их свойства.

18. Выпуклая двойственность: теорема о геометрии выпуклой двойственности и теорема Фенхеля-Моро.

19. Теорема о биполяре, теорема о втором сопряженном конусе.

20. Неравенство Юнга. Связь субдифференциалов функции и ее сопряженной. Теорема Моро-Рокафеллара о субдифференциале суммы.

21. Теорема Дубовицкого-Милютина о субдифференциале максимума.

22. Двойственная выпуклая задача. Теорема о связи прямой и двойственной задач. Двойственная задача линейного программирования.

23. Теорема Каратеодори. Выпуклая оболочка компактного подмножества $\mathbb{R}^d$.

24. Теорема о гомеоморфности выпуклых компактных множеств. Теорема Брауэра.

25. Теоремы Радона и Хелли.

26. Теорема Минковского (Крейна-Мильмана). Два эквивалентных определения выпуклого многогранника.