Список задач по курсу "Выпуклый анализ"
Лектор — доц. А.А. Васильева
2021–22 уч. год

1. 1) Показать, что $\operatorname{conv}(A\cup\operatorname{conv}(B\cup C)) = \operatorname{conv}(A\cup B\cup C)$. 2) Пусть $M_1, \ldots, M_N \subset X$ — выпуклые множества. Показать, что

$$\operatorname{conv}(M_1 \cup \cdots \cup M_N) = \left\{\sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j : \ x_j \in M_j, \ \lambda_j \geq 0, \ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1\right\}.$$

   3) Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$ — выпуклое множество. Показать, что его внутренность и замыкание также выпуклы.

2. Привести пример замкнутого множества в $\mathbb{R}^2$ такого, что $\operatorname{conv} A$ незамкнуто.

3. Привести пример компактного множества в l_2 такого, что $\operatorname{conv} A$ некомпактно.

4. Привести пример двух выпуклых замкнутых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^2$ таких, что $A + B$ незамкнуто.

5. Найти функционал Минковского для а) треугольника с вершинами $(1, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, б) множества $\{(x, y) : \ y > x^2 - 1\}$, в) множества $\{(x, y) : \ y > \sqrt{x^2+1} - 2\}$.

6. Пусть $M \subset l_2$,

$$M = \left\{(x_1, \ldots, x_n, \ldots) : \ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 < 1\right\}.$$

   Найти точку $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \ldots)$ такую, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \hat{x}_n^2 = 1$, при этом не существует линейного непрерывного функционала, разделяющего $\hat{x}$ и M.

7. Показать, что у единичного шара в пространстве c_0 нет крайних точек.

8. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт. Верно ли, что $M = \operatorname{conv} S$, где S — множество выступающих точек M?

9. Описать множество всех выпуклых функций $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ таких, что $\operatorname{int} \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 :\ f(x,\, y) = -\infty\} = \{(x,\, y) :\ x^2 + y^2 < 1\}$.

10. Описать множество всех выпуклых функций $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ таких, что $\operatorname{int} \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 :\ f(x,\, y) = -\infty\} = \{(x,\, y) :\ \max\{|x|,\, |y|\} < 1\}$.

11. Показать, что функция $f(x_1,\, \ldots,\, x_n) = \ln(e^{x_1} + \cdots + e^{x_n})$ выпукла.

12. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, $x_0 \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$. Показать, что $\partial f(x_0) = [f'_-(x_0),\ f'_+(x_0)]$, где $f'_\pm(x_0)$ — левая и правая производные.

13. Пусть $c_{0,0}$ — подпространство в c_0, состоящее из финитных последовательностей. Построить выпуклую функцию $f : c_{0,0} \to \mathbb{R}$ такую, что $\partial f(0)$ неограничен.

14. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$. а) Показать, что $\partial f(0) = B_{X^*}$ (единичный шар в X^*). б) Пусть $x_0 \neq 0$. Показать, что $\partial f(x_0) = \{x^* \in X^* :\ \|x^*\| = 1,\ x^*(x_0) = \|x_0\|\}$.

15. Пусть $f : c_0 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$, $x_0 \neq 0$. Найти $\partial f(x_0)$.

16. Привести пример выпуклой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, у которой субдифференциал в некоторой точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ пуст.

17. Привести пример задачи выпуклого программирования, в которой для любого набора чисел $(\lambda_0,\, \ldots,\, \lambda_m)$, удовлетворяющего а–с из теоремы Куна – Таккера, выполнено $\lambda_0 = 0$.

18. Привести пример задачи выпуклого программирования такой, что допустимая $\hat{x}$ — не точка минимума, но существует ненулевой набор $(\lambda_0,\, \ldots,\, \lambda_m)$, удовлетворяющий а–с из теоремы Куна – Таккера.

19. Построить пример двух выпуклых замкнутых множеств A и B на плоскости таких, что $\operatorname{int}(A \cap B) = \varnothing$, $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, $\operatorname{int} B \neq \varnothing$ и в некоторой точке $\hat{x}$, являющейся граничной для A и B, выполнено $K_{A \cap B}(\hat{x}) \neq K_A(\hat{x}) + K_B(\hat{x})$.

20. Верно ли равенство $(A \cap B)^\circ = \overline{\operatorname{conv}}\,(A^\circ \cup B^\circ)$, если A, B выпуклы, замкнуты и имеют непустое пересечение?

21. Пусть $A = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a)^2 + x_2^2 \le R^2\}$, где $0 < a \le R$. Найти A°.

22. Пусть $A = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a)^2 + x_2^2 \le R^2\}$, где $a > R > 0$. Найти A°.

23. Найти поляру множеств $A = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 \ge x_1^2 + c\}$, где $c \in \mathbb{R}$.

24. Пусть $p(x)$ — выпуклая положительно-однородная функция (т.е. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ для любого $\lambda \ge 0$). Пусть

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \le 1\}.$$

Показать, что $A^\circ = \operatorname{conv}\,(\partial p(0) \cup \{0\})$.