

Программа курса “Выпуклый анализ”

Лектор — доц. А.А. Васильева

2021–22 уч. год

1. Выпуклые и аффинные множества. Аффинное множество как сдвиг линейного подпространства. Выпуклая и аффинная оболочка.
2. Аффинная независимость системы точек и связь с линейной независимостью. Размерность аффинного и выпуклого множества.
3. Теорема Каратеодори. Следствие о выпуклой оболочке компакта в \mathbb{R}^n .
4. Сумма множеств по Минковскому. Функционал Минковского и его свойства.
5. Теорема отделимости (случай, когда у одного из множеств непустая внутренность).
6. Теорема о строгой отделимости. Выпуклое замкнутое множество как пересечение семейства полупространств.
7. Конечномерная теорема отделимости. Существование опорной гиперплоскости к выпуклому множеству в \mathbb{R}^n в его граничной точке.
8. Крайние и выступающие точки. Теорема Страшевича.
9. Теорема Крейна – Мильмана и ее усиление.
10. Выпуклые функции. Эквивалентное условие выпуклости для собственной функции. Неравенство Йенсена.
11. Сохранение выпуклости при суммировании, взятии супремума и предела. Критерий выпуклости дифференцируемой и дважды дифференцируемой функции.
12. Субдифференциал выпуклой функции и его свойства. Достаточные условия ограниченности субдифференциала.
13. Теоремы о непустоте субдифференциала.
14. Теоремы о локальной липшицевости выпуклой функции.

15. Субдифференциал l_p -нормы в \mathbb{R}^n .
16. Субдифференциал в точке гладкости. Достаточное условие дифференцируемости по Гато выпуклой функции в точке.
17. Теорема Моро – Рокафеллара.
18. Выпуклая задача без ограничений. Задача Штейнера.
19. Выпуклая задача с ограничениями (задача выпуклого программирования). Теорема Каруша – Куна – Таккера.
20. Внешние нормальные конусы. Теорема о внешнем нормальном конусе пересечения двух выпуклых множеств.
21. Теорема Дубовицкого – Милютина.
22. Теоремы Радона, Хелли и Дворецкого.
23. Теорема об очистке — случай конечного числа функций.
24. Теорема об очистке — случай бесконечного числа функций.
25. Теорема Чебышева об альтернансе.
26. Поляры и их свойства. Теорема о биполяре. Поляра объединения и пересечения множеств.
27. Поляра конуса. Поляра l_p -шара в \mathbb{R}^n .
28. Выпуклые многогранники и многогранные множества. Поляра многогранника и многогранного множества, у которого 0 — внутренняя точка.
29. Характеризация крайних точек многогранного множества. Ограниченные многогранные множества и многогранники. Поляра симплекса.
30. Строгая выпуклость и гладкость множеств. Двойственность строгой выпуклости и гладкости.
31. Задача Чаплыгина (форма экстремальных траекторий).

32. Преобразование Лежандра – Юнга – Фенхеля (сопряженные функции) и его свойства. Неравенство Юнга.
33. Лемма Минковского о надграфике выпуклой замкнутой собственной функции.
34. Теорема Фенхеля – Моро. Вторая сопряженная функция. Сопряженная к минимуму и максимуму функций.
35. Двойственность строгой выпуклости и единственности субдифференциала.
36. Теорема о седловой точке: формулировка и вывод из теоремы Какутани. Следствие: равенство минимакса и максимина.
37. Доказательство теоремы Какутани.
38. Задача линейного программирования: случай отсутствия вершин у множества допустимых точек, сведение к случаю, когда вершины есть.
39. Теорема о точечном конусе.
40. Основная теорема линейного программирования.
41. Симплекс-метод и его реализация в невырожденном случае.
42. Поиск крайней точки множества ограничений в задаче линейного программирования. Проверка непустоты множества допустимых точек (поиск допустимой точки).
43. Двойственная задача. Случай задачи линейного программирования. Задача линейного программирования в трех формах и связь между ними. Примеры задач линейного программирования: задача оптимального планирования производства и транспортная задача.