1. 1) Пусть $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задано равенством $F(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1^2 x_2}$. Показать, что F имеет вариацию по Лагранжу, но не дифференцируемо по Гато в нуле. 2) Пусть X — бесконечномерное нормированное пространство, $F : X \to \mathbb{R}$ — линейный неограниченный функционал. Показать, что F имеет вариацию по Лагранжу в нуле, но не дифференцируемо по Гато.

2. Пусть $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 > 0, \ x_2 = x_1^2\}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in M, \\ 0, & (x_1, x_2) \notin M. \end{cases}$$

   Показать, что f дифференцируемо по Гато, но не дифференцируемо по Фреше в т. $(0, 0)$.

3. (из лекций) Построить пример отображений $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таких, что F дифференцируемо по Фреше в т. 0, G дифференцируемо по Гато в т. $(0, 0)$, $F(0) = (0, 0)$, при этом $G \circ F$ не имеет вариации по Лагранжу в т. 0.

4. 1) Если $F : X \to \mathbb{R}$, то существует $x \in [x_0, x_1]$ такое, что $F(x_1) - F(x_0) = F'(x)[x_1 - x_0]$. 2) Если $F : X \to Y$, $\dim Y > 1$, то утверждение из п. 1 может быть неверным.

5. Пусть X — пространство непрерывных функций на $[0, 1]$ с нормой $\|x\| = \int\limits_0^1 |x(t)|\, dt$, $T : X \to X$, $Tx(t) = x^2(t)$. Показать, что T дифференцируем по Гато, но не дифференцируем по Фреше.

6. Рассмотрим отображение $\mathcal{L} : C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt.$$

   Показать, что если L, L_x, $L_{\dot{x}}$ непрерывны, то отображение $\mathcal{L}$ непрерывно дифференцируемо.

7. (см. задачу о гармоническом осцилляторе). 1) Пусть $T_0 > \pi$, $x(t) = c \sin \frac{\pi t}{T_0}$. Показать, что $\mathcal{L}(x) < 0$. Почему проведенные в лекции рассуждения со сведением к интегралу от полного квадрата не

проходят при $T_0 > \pi$ и проходят при $T_0 < \pi$? 2) Показать, что $\int\limits_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2)\,dt = \int\limits_0^\pi (\dot{x} - x \cdot \operatorname{ctg} t)^2\,dt \geq 0$.

8. Доказать, что в задаче

$$\int\limits_0^1 t^{1/2}\dot{x}^2\,dt \to \inf, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$

точки локального минимума в пространстве $C^1[0,\,1]$ не существует; найти точку глобального минимума для той же задачи в пространстве

$$W = \left\{ f \in AC[0,\,1] : \int\limits_0^1 t^{1/2}\dot{x}^2\,dt < \infty \right\}.$$

9. Доказать, что в задаче

$$\int\limits_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2\,dt \to \inf, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

точки локального минимума в пространстве $C^1[0,\,1]$ не существует, при этом точная нижняя грань функционала равна 0.

10. Пусть $A : l_2 \to l_2$,

$$A(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n,\,\ldots) = (x_1,\,x_2/2,\,\ldots,\,x_n/n,\,\ldots),$$

$(y_1,\,\ldots,\,y_n,\,\ldots) \in l_2 \backslash \operatorname{Im} A$ (почему такая точка существует?). Рассмотрим задачу

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \to \inf, \quad A(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n,\,\ldots) = 0.$$

Какая точка будет точкой минимума в этой задаче? Показать, что для этой задачи принцип Лагранжа неверен. Какое из условий теоремы о необходимом условии локального минимума здесь не выполнено?

11. Привести пример гладких функций $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что в задаче $f_0(x) \to \min$, $f_1(x) = 0$ будет существовать точка локального минимума и в принципе Лагранжа будет $\lambda_0 = 0$ (а с $\lambda_0 \neq 0$ принцип Лагранжа не выполнен).

12. Найти

    (a) $T_{(0,0)}M$, где $M = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^3 = x^2\}$,

    (b) $T_{(0,0)}M$, где $M = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^2 = \sin^2 x\}$,

    (c) $T_{(0,0,0)}M$, где $M = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 :\ (z - x^2 - y^2)(x^2 - y^3) = 0\}$.

13. Пусть $M = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = x/n,\ -1/n \leq x \leq 1/n\}$. Найти $T_{(0,0)}M$.

14. Пусть $\hat{x} \in M$ — точка локального минимума в задаче

$$\begin{cases} f_0(x) \to \inf, \\ x \in M, \end{cases} \tag{1}$$

функция f_0 дифференцируема по Гато в точке $\hat{x}$. Верно ли, что тогда $f_0'(\hat{x})[h] = 0$ для любого $h \in T_{\hat{x}}M$?

15. Пусть $l > 0$. Доказать, что допустимые экстремали в задаче

$$\int\limits_0^1 (y\dot{x} - x\dot{y})\, dt \to \max, \quad \int\limits_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = l,$$

$$x(0) = x(1) = y(0) = y(1) = 0, \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$$

являются параметризацией окружности.

16. (распределение с максимальной энтропией). Пусть $\rho : [0,\, +\infty) \to (0,\, +\infty)$, $\int\limits_0^\infty \rho(x)\, dx = 1$ (функция ρ имеет смысл плотности распределения). Энтропией называется величина $S = -\int\limits_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x)\, dx$. Найти функцию ρ, для которой энтропия максимальна при заданном среднем (т.е. задано ограничение $\int\limits_0^\infty x\rho(x)\, dx = C_1$).

17. (см. доказательство леммы о скруглении углов) Показать, что если δ достаточно мало, то $\int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} \xi_{\tau,\tau_j}(t)\,dt > \int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} z(t)\,dt$, $\int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} \xi_{\tau_j,\sigma}(t)\,dt < \int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} z(t)\,dt$ и что найдутся такие $\tau < \tau_j < \sigma$, что $\int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} \xi_{\tau,\sigma}(t)\,dt = \int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} z(t)\,dt$.

18. Сделав замену $\dot{x} = u$, вывести необходимое условие сильного минимума в простейшей задаче вариационного исчисления (условие Вейерштрасса и непрерывность $L_{\dot{x}}(t,\, \hat{x}(t),\, \dot{\hat{x}}(t))$) из принципа максимума Понтрягина.

19. Показать, что если L явно не зависит от x (т.е. $L = L(t,\, \dot{x}(t))$), то условие Вейерштрасса будет достаточным условием глобального минимума.

20. Показать, что существует такая простейшая задача вариационного исчисления, для которой 0 является точкой глобального минимума, при этом усиленное условие Лежандра не выполнено и условие Якоби не выполнено.

21. Рассмотрим задачу $\int\limits_0^{\pi}(\dot{x}^2 - x^2 - x^4)\,dt \to \inf$, $x(0) = x(\pi) = 0$. Показать, что для $\hat{x} = 0$ выполнено усиленное условие Лежандра, условие Якоби, при этом $\hat{x}$ не является точкой слабого минимума.

22. Рассмотрим задачу $\int\limits_0^{3/2} (\dot{x}^3 + 2x)\,dt \to \inf,\ x(0) = 0,\ x(3/2) = 1$. Доказать, что выполнено (неусиленное) условие Лежандра, усиленное условие Якоби, но допустимая экстремаль — не точка слабого минимума.

23. Рассмотрим задачу $\int\limits_0^1(\dot{x}^2 - x\dot{x}^3)\,dt \to \mathrm{extr}$, $x(0) = x(1) = 0$. Показать, что для экстремали $\hat{x} \equiv 0$ выполнено усиленное условие Лежандра, усиленное условие Якоби, условие Вейерштрасса (не усиленное) и $\hat{x}$ не является точкой сильного минимума.

24. Показать, что семейство $\{x(t,\,\alpha):\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ геодезических на плоскости Лобачевского (подробнее см. в лекциях) — центральное поле экстремалей, покрывающее область $\{(t,\,x):\ t_*<t<t_1+\delta,\ x>0\}$.