1. (см. задачу о гармоническом осцилляторе). 1) Пусть $T_0 > \pi$, $x(t) = c \sin \frac{\pi t}{T_0}$. Показать, что $\mathcal{L}(x) < 0$. Почему проведенные в лекции рассуждения со сведением к интегралу от полного квадрата не проходят при $T_0 > \pi$ и проходят при $T_0 < \pi$? 2) Показать, что $\int\limits_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2)\, dt = \int\limits_0^\pi (\dot{x} - x \cdot \operatorname{ctg} t)^2\, dt \geq 0$.

2. Доказать, что в задаче
$$\int\limits_0^1 t^{1/2} \dot{x}^2\, dt \to \inf, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$
точки локального минимума в пространстве $C^1[0,\,1]$ не существует; найти точку глобального минимума для той же задачи в пространстве
$$W = \left\{ f \in AC[0,\,1] : \int\limits_0^1 t^{1/2} \dot{x}^2\, dt < \infty \right\}.$$

3. 1) Доказать, что в задаче
$$\int\limits_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2\, dt \to \inf, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$
точки локального минимума в пространстве $C^1[0,\,1]$ не существует, при этом точная нижняя грань функционала равна 0; в пространстве липшицевых функций минимум достигается.

   2) Доказать, что в задаче
$$\int\limits_0^1 ((1 - \dot{x}^2)^2 + x^2)\, dt \to \inf, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$
точки глобального минимума в пространстве липшицевых функций не существует, при этом точная нижняя грань функционала равна 0.

4. (задача о геодезических на плоскости Лобачевского.) Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\,dt \to \mathrm{extr},\ x(t_0)=x_0, \quad x(t_1)=x_1, \quad x>0.$$

5. (задача о брахистохроне.) Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}}\,dt \to \mathrm{extr},\ x(t_0)=x_0, \quad x(t_1)=x_1, \quad x>0.$$

6. (задача о минимальной поверхности вращения.) Найти допустимые экстремали в задаче

$$\int\limits_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \mathrm{extr},\ x(-T_0)=x(T_0)=\xi, \quad x>0$$

(здесь $\xi>0$). В зависимости от $\xi>0$ установить, сколько может быть допустимых экстремалей.

7. 1) Пусть $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ задано равенством $F(x_1,\,x_2)=\sqrt[3]{x_1^2x_2}$. Показать, что F имеет вариацию по Лагранжу, но не дифференцируемо по Гато в нуле. 2) Пусть X — бесконечномерное нормированное пространство, $F:X\to\mathbb{R}$ — линейный неограниченный функционал. Показать, что F имеет вариацию по Лагранжу в нуле, но не дифференцируемо по Гато.

8. Пусть $M=\{(x_1,\,x_2)\in\mathbb{R}^2:\ x_1>0,\ x_2=x_1^2\}$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x_1,\,x_2)=\begin{cases} 1, & (x_1,\,x_2)\in M,\\ 0, & (x_1,\,x_2)\notin M.\end{cases}$$

Показать, что f дифференцируемо по Гато, но не дифференцируемо по Фреше в т. $(0,\,0)$.

9. Построить пример отображений $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ таких, что F дифференцируемо по Фреше в т. 0, G дифференцируемо по Гато в т. $(0,\,0)$, $F(0)=(0,\,0)$, при этом $G\circ F$ не имеет вариации по Лагранжу в т. 0.

10. Привести пример функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, всюду дифференцируемой по Фреше, но не строго дифференцируемой в нуле.

11. 1) Если $F : X \to \mathbb{R}$, то существует $x \in [x_0,\, x_1]$ такое, что $F(x_1) - F(x_0) = F'(x)[x_1 - x_0]$. 2) Если $\dim Y > 1$, то утверждение из п. 1 может быть неверным.

12. Показать, что если отображение F строго дифференцируемо в точке x_0 и дифференцируемо по Гато в окрестности x_0, то оно непрерывно дифференцируемо в x_0.

13. Пусть $T : L_2[0,\, 1] \to L_2[0,\, 1]$, $Tx(t) = \sin x(t)$. Показать, что T дифференциуемо по Гато в каждой точке, но нигде не дифференцируемо по Фреше.

14. Пусть $A : l_2 \to l_2$,

$$A(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n,\, \dots) = (x_1,\, x_2/2,\, \dots,\, x_n/n,\, \dots),$$

$(y_1,\, \dots,\, y_n,\, \dots) \in l_2 \backslash \operatorname{Im} A$ (почему такая точка существует?). Рассмотрим задачу

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \to \inf, \quad A(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n,\, \dots) = 0.$$

Какая точка будет точкой минимума в этой задаче? Показать, что для этой задачи принцип Лагранжа неверен. Какое из условий теоремы о необходимом условии локального минимума здесь не выполнено?

15. Привести пример гладких функций $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что в задаче $f_0(x) \to \min$, $f_1(x) = 0$ будет существовать точка локального минимума и в принципе Лагранжа будет $\lambda_0 = 0$ (а с $\lambda_0 \neq 0$ принцип Лагранжа не выполнен).

16. Пусть $\hat{x} \in M$ — точка локального минимума в задаче

$$\begin{cases} f_0(x) \to \inf, \\ x \in M, \end{cases}$$

функция f_0 дифференцируема по Гато в точке $\hat{x}$. Верно ли, что тогда $f_0'(\hat{x})[h] = 0$ для любого $h \in T_{\hat{x}}M$?

17. Пусть $l > 0$. Доказать, что допустимые экстремали в задаче

$$\begin{gathered}\int\limits_0^1 (y\dot{x} - x\dot{y})\,dt \to \max, \quad \int\limits_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = l, \\ x(0) = x(1) = y(0) = y(1) = 0, \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0\end{gathered} \tag{1}$$

являются параметризацией окружности.

18. Привести пример задачи выпуклого программирования такой, что допустимая $\hat{x}$ — не точка минимума, но существует ненулевой набор $(\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$, удовлетворяющий a)–c) из теоремы Куна – Таккера.

19. (распределение с максимальной энтропией). Пусть $\rho : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\int\limits_0^\infty \rho(x)\,dx = 1$ (функция ρ имеет смысл плотности распределения). Энтропией называется величина $S = -\int\limits_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x)\,dx$. Найти функцию ρ, для которой энтропия максимальна при заданном среднем (т.е. задано ограничение $\int\limits_0^\infty x\rho(x)\,dx = C_1$).

20. (аэродинамическая задача Ньютона). Найти допустимые экстремали в задаче

$$\begin{cases} \int\limits_0^{T_0} \frac{t}{1+u^2}\,dt \to \inf, \\ x(0) = 0, \; x(T_0) = \xi, \\ \dot{x} = u, \\ u \geq 0; \end{cases} \tag{2}$$

здесь $T_0 > 0$, $\xi > 0$ — заданные параметры. (Ответ для $\hat{x}(t)$ записывается в параметрическом виде: $x = x(v)$, $t = t(v)$.) Доказать, что допустимая экстремаль существует и единственна, и что она будет точкой глобального минимума в задаче (2).

21. Сделав замену $\dot{x} = u$, вывести необходимое условие сильного минимума в простейшей задаче вариационного исчисления (условие Вейерштрасса и непрерывность $L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$) из принципа максимума Понтрягина.

22. Показать, что если L явно не зависит от x (т.е. $L = L(t, \dot{x}(t))$), то условие Вейерштрасса будет достаточным условием глобального минимума.

23. Рассмотрим задачу $\int\limits_0^{\pi} (\dot{x}^2 - x^2 - x^4)\, dt \to \inf$, $x(0) = x(\pi) = 0$. Показать, что для $\hat{x} = 0$ выполнено усиленное условие Лежандра, условие Якоби, при этом $\hat{x}$ не является точкой слабого минимума.

24. Рассмотрим задачу $\int\limits_0^{3/2} (\dot{x}^3 + 2x)\, dt \to \inf$, $x(0) = 0$, $x(3/2) = 1$. Доказать, что выполнено (неусиленное) условие Лежандра, усиленное условие Якоби, но допустимая экстремаль — не точка слабого минимума.

25. Рассмотрим задачу $\int\limits_0^{1} (\dot{x}^2 - x\dot{x}^3)\, dt \to \mathrm{extr}$, $x(0) = x(1) = 0$. Показать, что для экстремали $\hat{x} \equiv 0$ выполнено усиленное условие Лежандра, усиленное условие Якоби, условие Вейерштрасса (не усиленное) и $\hat{x}$ не является точкой сильного минимума.

26. Доказать, используя поле экстремалей, что допустимая экстремаль в задаче
$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\, dt \to \mathrm{extr}, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x > 0$$
является точкой глобального минимума (здесь $x_0 > 0$, $x_1 > 0$).

27. Доказать, используя поле экстремалей, что допустимая экстремаль в задаче
$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}}\, dt \to \mathrm{extr}, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x > 0$$
является точкой глобального минимума (здесь $x_0 > 0$, $x_1 > 0$).

28. Рассмотрим задачу

$$\int\limits_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{\dot{x}^2+1}\,dt \to \min,\ x(T_0)=x(-T_0)=\xi.$$

1) Выписать уравнение Якоби, подобрать одно из его решений, затем найти общее решение. 2) Пусть допустимых экстремалей две. Доказать, что одна из них является точкой сильного минимума, а вторая не является точкой слабого минимума.