Теоретические задания к экзамену по углубленному курсу обыкновенный уравнений (предварительная версия).

Локуциевский Л.В.

11 мая 2021 г.

1 Вопросы

1. Определение обыкновенного дифференциального уравнения в конечномерном линейном пространстве V. Фазовое пространство, расширенное фазовое пространство. Разрешение относительно производной. Два определения решения: классическое и по Пикару, их эквивалентность в непрерывном случае. Инвариантность решения относительно замен координат.

2. Теорема о локальном существовании и единственности решения ОДУ (теорема Пикара для задачи Коши).

3. Теорема о повышении гладкости решения ОДУ.

4. Первые способы явного нахождения решений. (а) Размеление переменных: $f(x)\,dx = g(y)\,dy$. (б) Полный дифференциал: решение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ и интегрирующий множитель. (в) Ленейное однороное и неоднородные уравнения с одной переменной. (г) Метод интегрирующего множителя. (д) Обобщенно однородные уравнения. (е) Производная вдоль решений ОДУ. Первые интегралы.

5. Теорема о глобальная единственности, включая решения вдоль границы (основанная на лемме Гронуолла). Теорема о непродолжимом решении. Теорема о продолжении решения ОДУ до границы замкнутой области или пока не убежит на бесконечность. Следствие: интегральные кривые не пересекаются и заполняют область в расширенном фазовом пространстве. Достаточное условие полноты векторного поля.

6. Линейные системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, где $A(t) \in Lin(V)$. Теорема о структуре решений линейного однородного ОДУ (продолжимость решений на всю прямую, линейная структура пространства решений, его размерность). Поток такого уравнения и его свойства.

7. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Формулы Якоби и Остроградского–Лиувилля. Пример: $x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)x(t) = 0$. Решение линейных неоднородных уравнений, за счет выпрямления поля в подвижном базисе, общая формула для решения. Линейные неоднородные $x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0x(t) = f(t)$ (по традиции) и методы решения. Пример: вынужденные колебания.

8. Линейные ОДУ с постоянными коэффициентами. Операторная экспонента и ее свойства ($\frac{d}{dt}e^{tA} = e^{tA}A$, $e^{tA} \in C^\infty$, $[A,B] = 0 \Rightarrow [e^A, B] = 0$, $[A,B] = 0 \Rightarrow e^{A+B} = e^Ae^B$, $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$). Присоединенные действия ad и Ad и их связь с операторной экспонентой ($\mathrm{Ad}_A e^B = e^{\mathrm{Ad}_A B}$,$\mathrm{Ad}_{e^A} = e^{\mathrm{ad}_A}$).

9. Линейные ОДУ высшего порядка с одной неизвестной. Характеристический многочлен. Комплексификация такого уравнения. Общая формула решения в комплексном и действительном случаях. Общая формула для решений линейного не однородного уравнений высших порядков.

10. Теорема сравнения Штурма: канонический вид, нахождение общего решения с помощью одного частного, теорема сравнения Штурма. Приложения: малые стационарные колебания струны.

11. Теорема о непрерывной зависимости решения ОДУ от правой части и начального условия. Теорема о непрерывности решения по параметру.

12. Теорема о производной решения ОДУ по параметру. Уравнение в вариациях. Пример: фазовый портрет математического маятника и его линеаризации в окрестности обоих положений равновесия. Теорема о гладкой зависимости решения от параметра.

13. Автономные системы и векторные поля. Теорема об изменении векторного поля при замене координат. Отображение потока и его свойства (групповое свойство, гладкость, связь с уравнением в вариациях).

14. Теорема о выпрямлении поля и следствие о существовании полного набора первых интегралов.

15. Классификация неподвижных точек двумерной системы (седло, узел, фокус, центр, и вырожденные).

16. Устойчивости (по Ляпунову, асимптотическая). Устойчивость положений равновесия математического маятника. Теорема о необходимых и достаточных условиях устойчивости/асимптотической устойчивости линейной системы $\dot{x} = Ax$.

17. Функция Ляпунова и теоремы Ляпунова (об устойчивости и асимптотической устойчивости).

18. Теорема об асимптотической устойчивости неподвижной точки по линейному приближению.

19. α и ω предельные множества и их простейшие свойства для ограниченной полутраектории (непустота, компактность, связность, инвариантность относительно потока). Инвариантные множества. Теорема о существовании минимального компактного инвариантного множества.

20. Теория Пуанкаре-Бендиксона о структуре предельных множеств на плоскости. Теорема об изолированных циклах на плоскости (с помощью исследования отображения последования Пуанкаре).

21. Аналитичнная правая часть. Комплесификация. Теорема Коши об аналитичности решения ОДУ.

22. Изолированные особые точки аналитических ОДУ. Монодромия. Метод Фробениуса. Пример: уравнение Эйлера $z^2w'' + azw' + bw = 0$.

23. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно первой производной. Пространство 1-струй и контактная геометрия. Дискриминантная кривая. Уравнения Клеро и преобразование Лежандра.

24. Уравнения в частных производных первого порядка $F(x, u(x), u'(x)) = 0$. Характеристики. Общий вид решения. Пример: уравнений эйконала, каустика эллипса.

25. Групповой анализ обыкновенных уравнений. Действие группы, ее инфентизимальный генератор. Дифференциальное продолжение действия группы. Общий вид уравнений первого и второго порядка, допускающих действие группы Галилея.

26. Теорема о полном наборе дифференциальных инвариантов действия группы. Применение к обыкновенным уравнениям первого и второго порядков.

2 Теоретические задачи

1. Найти, как меняется правая часть уравнения $\dot{x} = f(t,x)$ при замене времени $s = S(t,x)$ и координат $y = Y(t,x)$. При каких условиях на отображения S и Y переменная s действительно может быть выбрана в качестве независимой?

2. Являются ли полными нормированными линейным пространствами множества $C^1([\alpha;\beta] \to V)$, $C((\alpha;\beta) \to V)$, $C((-\infty;\infty) \to V)$? Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$. При каких K множество $C(K \to V)$ является полным нормированным линейным пространством?

3. Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ — компактное множество и $\Phi : K \to K$ непрерывное отображение. Верно ли, что найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что отображение Φ^k имеет неподвижную точку?

4. Постройте фазовый портрет на плоскости (x,p) и опишите все решения системы $\dot{x} \in \operatorname{sgn} p$, $\dot{p} = x$ (считая $\operatorname{sgn} = [-1;1]$).

5. Проверьте, верен ли аналог предложения об уравнении в полных дифференциалах, если область D не круг, а является (i) произвольно повернутым прямоугольником, (ii) диском с выколотым центром, (iii) невыпуклым восьмиугольником в виде буквы П с вершинами в точках $(0,0), (1,0), (1,1), (2,1), (2,0), (3,0), (3,2), (0,2)$, (iv) повернутым восьмиугольником в виде буквы П.

6. Предположим, на V введена некоторая норма $\|\cdot\|$ (не задающаяся скалярным произведением). Напишите оценку на $\|x(t)\|$ через $x(t_0)$, если известно, что $\|\dot{x}\| \le a\|x\| + b$.

7. Рассмотрим такие кривые $p(t)$ в двойственном пространстве V^*, что $\langle p(t), x(t)\rangle = \mathrm{const}$ для любого решения уравнения $\dot{x} = A(t)x$. Докажите, что все такие кривые $p(t)$ удовлетворяют некоторому линейному ОДУ. Выпишите это уравнение и дифференциальное уравнение его потока.

8. (а) Докажите, что если $\mathrm{tr} A = 0$, то $\det e^A = 1$. (б) Всякий ли невырожденный оператор $X \in GL(V)$ можно представить в виде $X = e^Y$ для некоторого $Y \in \mathrm{Lin}(V)$? (в) Предположим, на V задано скалярное произведение. Покажите, что если A – кососимметрический оператор, то e^A – ортогональный и ориентированный, т.е. $e^A \in SO(V)$.

9. Пусть P_n – пространство многочленов от t степени не больше n. Рассмотрим оператор дифференцирования $\frac{d}{dt} : P_n \to P_n$, $\frac{d}{dt} : p(t) \mapsto p'(t)$. Вычислите $\exp(\frac{d}{dt})$.

10. Пусть A и B такие операторы, что $[A,B] = AB - BA$ коммутирует с ними обоими. Докажите, что $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$.

11. Пусть $f(t) = t^k e^{\lambda t}$. Предложите частное решения $x(t)$ уравнения
$$x^n(t) + a_1 x^{n-1}(t) + ... + a_{n-1}\dot{x}(t) + a_0 x(t) = f(t)$$
в виде квазиполинома, *все* коэффициенты которого можно найти методом неопределенных коэффициентов.

12. Покажите, что подходящей заменой уравнение $a(t)\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = 0$ с $a(t) > 0$ может быть приведено к виду $\ddot{y} + r(t)y = 0$.

13. Найти общее решение системы $\dot{x}(t) = x\cos t - y$, $\dot{y} = -x\sin t$.

14. Пусть функция $q(t)$ непрерывна на $[0; l]$. Докажите, что существует счетное число таких (собственных значений) λ, что задача Штурма-Лиувилля $\ddot{x} + (q(t) + \lambda)x = 0$, $x(0) = x(l) = 0$, имеет нетривиальное решение. Покажите, что n-ое собственное значение λ_n имеет вид $\lambda_n/n^2 = \pi^2/l^2 + o(1)$ при $n \to \infty$

15. Тригонометрическими функциями Шелупского называются решения системы $\dot{x} = -|y|^{p-1}\operatorname{sgn} y$, $\dot{y} = |x|^{p-1}\operatorname{sgn} x$, $p > 1$, с начальными условиями $x(0) = 1, y(0) = 0$. Их обозначают $x(t) = \cos_p t$ и $y(t) = \sin_p t$. (i) Докажите, что $\cos_p$ и $\sin_p$ являются решениями одного и тоже уравнения Штурма. (ii) Как связаны $\cos_p$, $\sin_p$ и $\cos_q$, $\sin_q$ для $pq = p + q$.

16. Рассмотрим уравнение
$$\dot{y} = y^3 - xy^2 + x - y.$$
Обозначим через $y(x, y_0)$ решение с $y(0) = y_0$. Докажите, что для любого x_1 найдется такое $|y_1| \leq 1$, что $y(x_1, y_1) = -y_1$.

17. Верно ли, что решения уравнения $\dot{x}(t) = x(a - t)$ с начальным условие $x(0) = 1$ гладко зависят от параметра a?

18. (а) Существуют ли двумерные поверхности, касающиеся поля плоскостей в $\mathbb{R}^3$, заданных как нули 1-формы $x\,dy + dz$. (б) Найдите условия на 1-форму $\alpha = f(x, y, z)\,dx + g(x, y, z)\,dy + h(x, y, z)\,dz$, при которых найдется (локальное) семейство 2-мерным поверхностей $F(x, y, z) = c$ (c – константа из некоторого интервала), касающихся в каждой своей точке ядра α.

19. Пусть $D = \{x : F(x) < 0\}$ – ограниченная область с гладкой границей, на которой производная F' не вырождается. Выписать условие, что векторное поле f «смотрит внутрь D» и доказать, что в этом случае всякое решение уравнения $\dot{x} = f(x)$ с начальным условием $x(0) \in D$ продолжается на промежуток $t \in [0; \infty)$.

20. Рассмотрим двумерную линейную систему седла. Пусть Π – прямоугольная окрестность начала координат со сторонами, параллельными выделенным решениям. Рассмотрим действие потока P_t на Π. Опишите как устроены образы $P^t\Pi$ и что с ними происходит при $t \to \pm\infty$.

21. Постройте пример векторного поля на плоскости $\mathbb{R}^2$ с единственной неподвижной точкой, которая не является устойчивой, но все решения к ней стремятся при $t \to \infty$.

22. Можно ослабить условие теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости следующим образом. Производная функции Ляпунова вдоль векторного поля является неотрицательной в окрестности неподвижной точки, но (1) она обращаться в 0 не более чем в счетном числе точек и (2) неподвиждная точка является изолированной?

23. Вычислите явно в каком-нибудь базисе матрицу билинейной формы B из доказательства теоремы об асимптотической устойчивости, считая линеаризацию поля в точке известной.

24. Докажите, что свойство асимптотической устойчивости является грубым относительно любых малых в C^1 возмущений, в следующем смысле. Если x_* – неподвижная точка поля $f(x)$, все собственные значения $df(x_*)$ имеют отрицательную действительную часть, а поле $\varphi(x)$ достаточно мало в C^1 метрике, то поле $\tilde{f}(x) = f(x) + \varphi(x)$ имеет единственную близкую к x_* неподвижную точку $\tilde{x}_*$, и она является асимптотически устойчивой.

25. Докажите, что любое определенное при всех $t \in \mathbb{R}$ решение автономного ОДУ $x(t)$ является либо (i) неподвижной точкой; либо (ii) незамкнутой траекторий ($x(t_1) \neq x(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$); либо (iii) периодической траекторией (найдется минимальное $\tau > 0$, что $x(t) = x(t + \tau)$ при всех t).

26. Докажите, что если $x(t)$ решение автономного ОДУ, определенное при всех $t \in \mathbb{R}$, и $G = \{x(t), t \in \mathbb{R}\}$, то $\mathrm{cl}G = G \cup \alpha(x) \cup \omega(x)$.

27. Найдите производные отображения последования Паункаре Φ и времени движения τ в терминах решений уравнения в вариациях.

28. Пусть S_0 и S_1 – две малые площадки, трансверсальные некоторому циклу γ уравнения $\dot{x} = f(x)$. Докажите, что производные отображений последования Пуанкаре $\Phi_0 : S_0 \to S_0$ и $\Phi_1 : S_1 \to S_1$ в точках $\gamma \cap S_0$ и $\gamma \cap S_1$ имеют одинаковые жордановы нормальные формы.

29. Остается ли верной теорема Пуанкаре-Бендиксона, если M – проективная плоскость, цилиндр, тор или лист Мебиуса?

30. Верно ли, что в условиях теоремы Пуанкаре-Бендиксона $\omega(x)$ является либо неподвижной точкой, либо циклом?

31. Пусть $w \in \mathbb{C}^1$ и $f(z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} a_{km} z^k w^m$. Найдите рекуррентную формулу для коэффициентов разложения в ряд Тейлора решения уравнения $w'(z) = f(z, w(z))$ с начальным условием $w(0) = 0$.

32. Дано линейное уравнение $w' = A(z)w$, а отображение A аналитично в проколотой окрестности 0. Докажите, для что обход вокруг 0 по замкнутой кривой определяется линейное отображение $B : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (называемое монодромией), которое ставит в соответствие значению решения $w(z)$ в точке z_0 его новое значение в z_0 после обхода. Как это отображение зависит от пути и точки z_0?

33. Докажите, что дискриминантная кривая является огибающей для семейства проекций геометрических решений.

34. Преобразованием Лежандра (гладкой, строго) выпуклой функции $f(p)$ называется функция $f^*(x) = \sup_p(px - f(p))$. Решите уравнение Клеро $f(y') = xy' - y$ и покажите как связаны решения этого уравнения и f^*.

35. Доказать, что максимальная размерность изотропного многообразия равна $n = \dim M$.

36. Векторное поле v на $J^1(M)$ называется контактным, если оно сохраняет контактные гиперплоскости. Контактным гамильтонианом называется функция $F : J^1(M) \to \mathbb{R}$, равная значению 1-формы Пуанкаре-Картана на этом поле, $F = \alpha[v]$. Решите обратную задачу: дана функция $F : J^1(M) \to \mathbb{R}$, требуется доказать, что существует и единственное векторное поле v на $J^1(M)$, контакный гамильтониан которого совпадает с F (подсказка: воспользуйтесь магической формулой Картана). Каким образом это векторное поле связано с характеристическим полем уравнения $F(x, u', u) = 0$?

37. Пусть L – геометрическое решение уравнения эйконала $u_x^2 + u_y^2 = 1$ с начальным условием $u|_S = 0$, где S – гладкая кривая на плоскости $\mathbb{R}^2$. Доказать что проекция точек особенностей проектирования L на $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$ является эволютой S.

38. Продолжением векторного поля с $J^0(\mathbb{R})$ на пространство k-струй называется инфинтизимальный генератор продолжения действия его потока. Докажите что продолжение скобки векторных полей есть скобка их продолжений.

39. Найдите дифференциальные инварианты первого и второго порядков для действия группы поворотов плоскости $J^0(\mathbb{R})$ вокруг начала координат и дайте им геометрическую интерпретацию.

3 Литература

[1] Филиппов А.Ф., «Введение в теорию дифференциальных уравнений».

[2] Арнольд В.И., «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

[3] Арнольд В.И., «Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений».

[4] Голубев В.В., «Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений»

[5] Ибрагимов Н.Х., «Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений»

[6] Капустина Т.О., Чечкин Г.А., Чечкина Т.П., «Конспекты лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям».