

# ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

## программа курса

МГУ, мех-мат, первый поток. Осенний семестр 2013-2014 г.

лектор – проф. В.Ю.Протасов.

1. Конечномерные гладкие экстремальные задачи. Компактность и коэрцитивность. Теорема Ферма. Выпуклые задачи.
2. Теорема Лагранжа для конечномерных задач с ограничениями типа равенств. Примеры.
3. Вариация по Лагранжу, производные по Гато и по Фреше. Примеры. Гладкие экстремальные задачи в нормированных пространствах. Первая теорема отделимости (без док-ва). Вторая теорема отделимости.
4. Лемма Фаркаша. Теорема Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств (доказательство для случая ограничений типа неравенств).
5. Теорема Минковского о многогранниках с заданными площадями и направлениями граней.
6. Субдифференциал и его свойства. Теорема о непустоте субдифференциала. Теоремы Рокафеллара-Моро и Дубовицкого-Милютин (без док-ва). Субдифференциальное исчисление. Примеры.
7. Теорема Каруша-Куна-Таккера (ККТ). Формулировка ККТ в терминах субдифференциалов.
8. Простейшая задача вариационного исчисления. Слабый минимум. Необходимые условия первого порядка. Импульс и энергия.
9. Пример Гильберта. Задача о минимальной площади поверхности вращения (нахождение допустимых экстремалей).
10. Задача Больца. Изопериметрическая задача. Задача Дидоны (нахождение экстремалей).
11. Задача с подвижными концами. Формула вариации интегрального функционала с подвижными концами.
12. Сильный экстремум и его свойства. Лемма о скруглении углов.
13. Теорема Вейерштрасса-Эрдмана.
14. Вторая производная по Фреше. Вторая вариация интегрального функционала. Условие Лежандра.
15. Условие Якоби. Необходимые условия второго порядка на слабый минимум.
16. Достаточные условия второго порядка на слабый минимум. Исследование простейшей задачи в случае “квадратичного + линейного” функционала.
17. Игольчатые вариации. Функция Вейерштрасса. Условие Вейерштрасса – необходимое условие сильного минимума.

18. Центральное поле экстремалей. Функция наклона поля. S-функция. Основная формула Вейерштрасса. Пример с гармоническим осциллятором.
19. Усиленные и глобальные условия Вейерштрасса. Достаточные условия сильного минимума и достаточные условия абсолютного минимума в простейшей задаче. Случай интегранта, не зависящего явно от  $x$ .
20. Задача о брахистохроне: нахождение экстремалей, построение центрального поля и доказательство оптимальности.
21. Задача Лагранжа. Примеры. Необходимые условия слабого минимума (без док-ва).
22. Лемма о решении линейных систем и лемма о централизованной системе (без док-ва). Вывод необходимых условий в задаче Лагранжа с фиксированными концами.
23. Постановка задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина (без док-ва).
24. Доказательство принципа максимума для задачи со свободным концом.