1 Особые экстремали

Прежде чем начать исследование особых экстремалей, докажем полезную лемму, которая не имеет отношения к сути дела, однако позволяет существенно упростить запись.

Лемма 1. *Задача оптимального управления в общей форме*

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x,u)\,dt + l_0\big(x(t_0),x(t_1)\big) \to \min;$$

с дифференциальной связью

$$\dot{x} = \varphi(t,x,u); \quad x \in \mathbb{R}^n \quad u \in [a,b] \subset \mathbb{R};$$

и ограничениями

$$\int_{t_0}^{t_1} f_i(t,x,u)\,dt + l_i\big(x(t_0),x(t_1)\big) \text{ при } i = 1\dots k;$$

Может быть сведена с помощью введения новых переменных к виду

$$\begin{gathered} r_0(y(t_0),y(t_1)) \to \min; \\ \dot{y} = \psi(y,u); \quad y \in \mathbb{R}^{n'} \quad u \in [a,b] \subset \mathbb{R}; \\ r_i(y(t_0),y(t_1)) = 0, \text{ при } i = 1\dots k'. \end{gathered} \tag{1}$$

Данная лемма позволяет

1. Сделать задачу автономной (то есть не зависящей явно от переменной t).
2. Избавиться от интегралов и оставить лишь терминальные части.

Доказательство леммы. Введем новую переменную z удовлетворяющую дифференциальной связи

$$\dot{z} = 1,$$

и терминальному ограничению $z(t_0) = t_0$. Тогда очевидно $z \equiv t$. Формально подставив z вместо t в $\psi(t,x,u)$ и $f_i(t,x,u)$ мы сведем систему к автономной.

Теперь избавимся от интегралов: положим

$$\dot{w}_i = f_i(z,x,u); \quad w_i(t_0) = 0.$$

Тогда $w_i(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} f_i(z,x,u)\,dt$. Поэтому

$$\int_{t_0}^{t_1} f_i(t,x,u)\,dt = w_i(t_1)$$

Обозначив $y = (x,z,w)$ мы получим (1) с $n' = n+k+1$ и $k' = 2k+1$. □

Задача оптимального управления в форме (1) называется обшей задачей Майера.

Предположим теперь, что задача (1) аффинна по управлению, то есть

$$\psi(y, u) = \psi_0(y) + \psi_1(y)u.$$

Тогда согласно принципу максимума Понтрягина в лагранжевой форме

$$L = \int_{t_0}^{t_1} p(\dot{y} - \psi_0(y) - \psi_1(y)u)\, dt + \sum_{i=0}^{k'} \lambda_i r_i(y(t_0), y(t_1)),$$

то есть

$$\dot{p} = -p\big(\psi_0'(y) + \psi_1'(y)u\big), \tag{2}$$

а управление находится из условия

$$-p\psi_1(y)u \to \min_{u \in [a,b]}.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} u = a, & \text{если} \quad p\psi_1(y) < 0; \\ u = b, & \text{если} \quad p\psi_1(y) > 0; \\ u \in [a, b], & \text{если} \quad p\psi_1(y) = 0. \end{cases}$$

Предположим, что $p\psi_1(y)$ обратилось в 0 в некоторый момент времени τ. Если $p\psi_1(y)$ не обращается в 0 в проколотой окрестности τ, то выбор $u(\tau) \in [a, b]$ не повлияет на саму экстремаль. Действительно, решим уравнение $\dot{y} = \psi(x, u)$ сначала в левой окрестности τ (где u одначначно определено) потом в правой и состыкуем полученные решения в точке τ из непрерывности y.

Совершенно иным образом обстоит дело, если $p\psi_1(y)$ обращается в 0 на некотором промежутке времени.

Определение 1. *Экстремаль (p, y, u) называется особой на промежутке (τ_1, τ_2), если $p\psi_1(y) \equiv 0$ при $t \in (\tau_1, \tau_2)$.*

В этом случае мы не можем определить u из принципа максимума. Для определения управления u на особой экстремали потребуется совершенно другой метод.

Очевидно, что если $p\psi_1(y) = 0$ при $t \in (\tau_1, \tau_2)$, то управление u не может быть выбрано произвольно, так как при неправильном выборе u мы немедленно выскочим из поверхности $p\psi_1(y) = 0$. Естественно необходимо, чтобы

$$\frac{d}{dt}\big(p\psi(y)\big) = 0, \text{ при } t \in (\tau_1, \tau_2).$$

В силу (1) и (2), получаем

$$-p(\psi_0'(y) + \psi_1'(y)u)\psi_1(y) + p\psi_1'(y)(\psi_0(y) + \psi_1(y)u) = 0.$$

Коэффициенты при u сократились, значит

$$p\big(\psi_0(y)\psi_1'(y) - \psi_0'(y)\psi_1(y)\big) = 0, \text{ при } t \in (\tau_1, \tau_2).$$

Данное условие должно быть выполнено на особой экстремале, однако найти u из него невозможно. Продифференцируем еще раз, получим

$$p\big((\psi_0'(y))^2\psi_1(y)+(\psi_0(y))^2\psi_1''(y)-2\psi_0(y)\psi_0'(y)\psi_1'(y)\big)+p\psi_0(y)\big(\psi_1(y)\psi_1''(y)-(\psi_1'(y))^2\big)u=0$$

или

$$pA+pB\,u=0$$

Таким образом, если на особой экстремале pB не обращается в 0, мы немедленно находим

$$u=-\frac{A}{B}.$$

В противном случае, для того, чтобы найти u необходимо продолжить дифференцирование еще некоторое количество раз.

Теорема 1. *В первый раз управление u может появится в явном виде только на четном шаге дифференцирования.*

Доказательство. Без доказательства. □

Определение 2. *Если в первый раз u появилось на шаге с номером n, то $\frac{n}{2}$ называется порядком особой экстремали.*

Применим описанную технику к конкретному примеру:

Задача 1 (об экономическом росте)**.** *Пусть есть две связанные отрасли производства с объемами производства $x>0$ и $y>0$. Суммарный доход в единицу времени пропорционален произведению xy и может быть распределён между отраслями для их развития. Требуется достичь заданного уровня дохода C за наименьшее время.*

Итак,

$$T\to\min;$$

при

$$\begin{cases}\dot{x}=u\,xy;\\ \dot{y}=(1-u)\,xy.\end{cases}$$

Здесь $u\in[0,1]$ и

$$x(0)=x_0;\quad y(0)=y_0;\quad ;x(T)y(T)=C.$$

Согласно принципу максимума Понтрягина в форме Лагранжа

$$L=\int_0^T\big(p(\dot{x}-u\,xy)+q(\dot{y}-(1-u)xy)\big)\,dt+\lambda_0T+\lambda_1x(0)+\lambda_2y(0)+\lambda_3x(T)y(T).$$

Значит,

$$\begin{cases} \dot{p} = -(pu + q(1-u))y; \\ \dot{q} = -(pu + q(1-u))x; \end{cases} \tag{3}$$

а управление определяется из условия

$$xy(q-p)u \to \min_{u\in[0,1]}.$$

То есть

$$\begin{cases} u = 0, & \text{если} \quad q > p; \\ u = 1, & \text{если} \quad q < p; \\ u \in [0,1], & \text{если} \quad q = p. \end{cases}$$

Итак, особая экстремаль определяется условием

$$p = q \text{ при } t \in (\tau_1, \tau_2).$$

Как было сказано выше – для того, чтобы найти u на особой экстремали, необходимо это условие продифференцировать: $\dot{p} = \dot{q}$. В силу уравнений (3) после перегруппировки слагаемых получаем

$$(pu + (1-u)q)(x-y) = 0.$$

Поскольку на особой экстремали $p = q$, то коэффициенты при u сокращаются и найти u после первого дифференцирования невозможно. С другой стороны, $x = y$ на особой экстремали и, продолжив дифференцирование, получаем $\dot{x} = \dot{y}$ или

$$u\,xy = (1-u)xy.$$

Поскольку $x > 0$ и $y > 0$, находим $u = \frac{1}{2}$. Итак, особая экстремаль: $p = q$, $x = y$ и $u = \frac{1}{2}$.

Исследуем полный синтез в задаче. Предположим, что оптимальная траектория заканчивается в точке $x(T) \le y(T)$. Тогда из условий трансверсальности и стационарности по T получаем

$$\begin{cases} p(T) = -\lambda_3 y(T); \\ q(T) = -\lambda_3 x(T); \\ \lambda_0 + \lambda_3(\dot{x}(T)y(T) + x(T)\dot{y}(T)) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Учитывая, что $\lambda_0 \ge 0$, получаем $\lambda_3 \le 0$ и $p(T) \ge q(T) \ge 0$. Поскольку $x(T) \le y(T)$, получаем, что $u = 1$, $x \le y$ и $p \ge q \ge 0$ при всех $t \in [0, T]$. При $x(T) \ge y(T)$ результат симметричен. Из условий (4) и уравнений (3) вытекает, что p или q положительны при всех t.

Если же в какой-то момент времени τ получилось $x(\tau) = y(\tau)$, то $p(\tau) = q(\tau)$, и при $t > \tau$ может быть использовано только особое управление $u = \frac{1}{2}$. Действительно, если, скажем, $u = 1$ при $t \in (\tau; \tau + \varepsilon)$, то мы немедленно приходим к противоречию:

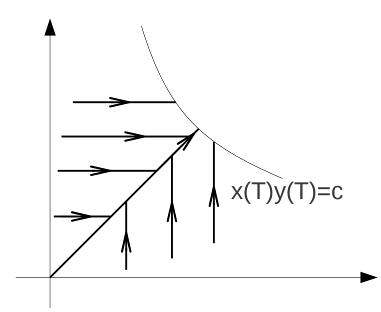

Рис. 1: Оптимальный синтез в задаче 1.

$$(u = 1) \Rightarrow (\dot{x} > \dot{y}) \Rightarrow (x > y) \Rightarrow (\dot{p} < \dot{q}) \Rightarrow (p < q) \Rightarrow (u = 0) \text{ при } t \in (\tau; \tau + \varepsilon).$$

Таким образом, оптимальный синтез в задаче 1 устроен следующим образом: $u = 1$ при $x < y$, $u = 0$ при $x > y$ и $u = \frac{1}{2}$ при $x = y$ (см. рис. 1).