Теоретические задания к курсу обыкновенный уравнений. Часть I.

Локуциевский Л.В.

29 октября 2020 г.

1. Решить систему $\dot{x} = 5x + y$, $\dot{y} = -4x + y$

2. Может ли решение уравнения $\dot{x} = 1/t$ иметь разные значения в точках $t = \pm 1$? Так ли уж важна связность промежутка I в определении решения?

3. Найти, как меняется правая часть уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ при замене времени $s = S(t, x)$ и координат $y = Y(t, x)$. При каких условиях на отображения S и Y переменная s действительно может быть выбрана в качестве независимой?

4. Являются ли полными нормированными линейным пространствами множества $C^1([\alpha; \beta] \to V)$, $C((\alpha; \beta) \to V)$, $C((-\infty; \infty) \to V)$? Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$. При каких K множество $C(K \to V)$ является полным нормированным линейным пространством?

5. Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ — компактное множество и $\Phi : K \to K$ непрерывное отображение. Верно ли, что найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что отображение Φ^k имеет неподвижную точку?

6. Известно, что любое непрерывное отображение на компактном подмножестве $K \subset \mathbb{R}$ равномерно непрерывно. Верно ли обратное утверждение, что если любая непрерывная на некотором множестве $K \subset \mathbb{R}$ функция равномерно непрерывна, то K – компакт?

7. Постройте фазовый портрет на плоскости (x, p) и опишите все решения системы $\dot{x} = \operatorname{sgn} p$, $\dot{p} = x$.

8. Напишите точную оценку точности для метода Эйлера $x_{n+1} = x_n + \Delta t f(t_n, x_n)$.

9. Дискретным аналогом уравнения роста популяции является такое уравнение: $x_{n+1} = r x_n(1 - x_n/\chi)$. Пусть $\chi = 1$ и $r = 4$ (как раз максимум функции $4x(1 - x)$ на отрезке $[0; 1]$ равен 1, поэтому точка из $[0; 1]$ переходит в точку из $[0; 1]$). Найдите общую формулу для x_n. Почему численный подсчет на компьютере по двум формулам $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ и $x_{n+1} = 4x_n - 4x_n^2$ дает разные ответы?

10. Проверьте, верен ли аналог предложения об уравнении в полных дифференциалах, если область D не круг, а является (i) произвольно повернутым прямоугольником, (ii) диском с выколотым центром, (iii) невыпуклым восьмиугольником в виде буквы П с вершинами в точках $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 0), (3, 0), (3, 2), (0, 2)$, (iv) повернутым восьмиугольником в виде буквы П.

11. Предположим, на V введена некоторая норма $\|\cdot\|$ (не задающаяся скалярным произведением). Напишите оценку на $\|x(t)\|$ через $x(t_0)$, если известно, что $\|\dot{x}\| \le a\|x\| + b$.

12. Верно ли, что ограниченное замкнутое подмножество гладкой поверхности в $\mathbb{R}^n$ компактно?

13. Рассмотрим такие кривые $p(t)$ в двойственном пространстве V^*, что $\langle p(t), x(t)\rangle = \mathrm{const}$ для любого решения уравнения $\dot{x} = A(t)x$. Докажите, что все такие кривые $p(t)$ удовлетворяют некоторому линейному ОДУ. Выпишите это уравнение и дифференциальное уравнение его потока.

14. Получите формулу Якоби для дифференциала определителя без предположения о невырожденности матрицы из $\mathrm{Mat}_{n\times n}$.

15. (а) Докажите, что если $\mathrm{tr}A = 0$, то $\det e^A = 1$. (б) Всякий ли невырожденный оператор $X \in GL(V)$ можно представить в виде $X = e^Y$ для некоторого $Y \in \mathrm{Lin}(V)$?

16. Предположим, на V задано скалярное произведение. Покажите, что если A – кососимметрический оператор, то e^A – ортогональный и ориентированный, т.е. $e^A \in SO(V)$.

17. Корректно ли следующее определение числа e: «числом e называется значение решения уравнения $\dot{x}(t) = x(t)$ с начальным условием $x(0) = 1$ в момент времени $t = 1$, $e = x(1)$»?

18. Пусть P_n – пространство многочленов от t степени не больше n. Рассмотрим оператор дифференцирования $\frac{d}{dt} : P_n \to P_n$, $\frac{d}{dt} : p(t) \mapsto p'(t)$. Вычислите $\exp(\frac{d}{dt})$.

19. Пусть A и B такие операторы, что $[A, B] = AB - BA$ коммутирует с ними обоими. Докажите, что $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$.