Теоретические задания к курсу обыкновенный уравнений. Часть II.

Локуциевский Л.В.

21 декабря 2020 г.

1. Пусть $f(t) = t^k e^{\lambda t}$. Предложите частное решения $x(t)$ уравнения
$$x^n(t) + a_1 x^{n-1}(t) + \ldots + a_{n-1}\dot{x}(t) + a_0 x(t) = f(t)$$
в виде квазиполинома, *все* коэффициенты которого можно найти методом неопределенных коэффициентов.

2. Преобразование Лапласа переводит $x(t)$ в $y(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}x(t)\,dt$. В этом случае пишут $y = \mathcal{L}x$. Докажите, что $(\mathcal{L}\dot{x})(s) = s\mathcal{L}x(s) - x(0)$ (если все интегралы корректно определены).

3. Найдите формулу для чисел Каталана $C_0 = 1$, $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

4. Покажите, что подходящей заменой уравнение $a(t)\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = 0$ с $a(t) > 0$ может быть приведено к виду $\ddot{y} + r(t)y = 0$.

5. Решите систему
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t} \\ t & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

6. Можно ли подобрать такую плотность струны, чтобы первые две частоты колебаний давали квинту?

7. Пусть функция $q(t)$ непрерывна на $[0; l]$. Докажите, что существует счетное число таких (собственных значений) λ, что задача Штурма-Лиувилля $\ddot{x} + (q(t) + \lambda)x = 0$, $x(0) = x(l) = 0$, имеет нетривиальное решение. Покажите, что n-ое собственное значение λ_n имеет вид $\lambda_n/n^2 = \pi^2/l^2 + o(1)$ при $n \to \infty$

8. Тригонометрическими функциями Шелупского называются решения системы $\dot{x} = -|y|^{p-1}\operatorname{sgn} y$, $\dot{y} = |x|^{p-1}\operatorname{sgn} x$, $p > 1$, с начальными условиями $x(0) = 1, y(0) = 0$. Их обозначают $x(t) = \cos_p t$ и $y(t) = \sin_p t$. (i) Докажите, что $\cos_p$ и $\sin_p$ являются решениями одного и тоже уравнения Штурма. (ii) Как связаны $\cos_p$, $\sin_p$ и $\cos_q$, $\sin_q$ для $pq = p + q$.

9. Рассмотрим уравнение
$$\dot{y} = y^3 - xy^2 + x - y.$$
Обозначим через $y(x, y_0)$ решение с $y(0) = y_0$. Докажите, что для любого x_1 найдется такое $|y_1| \leq 1$, что $y(x_1, y_1) = y_1$.

10. Найти период колебаний физического маятника $\ddot{x} = -\sin x$ с начальным условием $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = a$.

11. Рассмотрим систему $\dot{x} = -yz$, $\dot{y} = xz$, $\dot{z} = -k^2xy$, где k – параметр. Найдите два полиномиальных первых интеграла. Докажите, что решение с начальными условиями $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$ (координаты которого называются эллиптическими функциями Якоби) зависит гладко от параметра k (называемым модулем эллиптичности). Стандартно обозначают $x(t) = \operatorname{cn} t$ (эллиптический косинус), $y(t) = \operatorname{sn} t$ (эллиптический синус) и $z(t) = \operatorname{dn} t$ (дельта амплитуда). Выпишите явную формулу для решения уравнения маятника $\ddot{x} = -\sin x$ на уровне энергии $E \neq \pm 1$ через эллиптические функции Якоби.

12. Верно ли, что решения уравнения $\dot{x}(t) = x(a - t)$ гладко зависят от параметра a?

13. (а) Существуют ли двумерные поверхности, касающиеся поля плоскостей в $\mathbb{R}^3$, заданных как нули 1-формы $x\,dy + dz$. (б) Найдите условия на 1-форму $\alpha = f(x, y, z)\,dx + g(x, y, z)\,dy + h(x, y, z)\,dz$, при которых найдется семейство 2-мерным поверхностей $F(x, y, z) = c$ (c – константа из некоторого интервала).

14. Опишите качественное поведение решений возмущенной системы Лотки-Вольтерры в окрестности неподвижной точки: $\dot{x} = x(ky - a)$, $\dot{y} = y(b - lx + \varepsilon y^2)$ при малых (не обязательно положительных) ε.

15. Пусть $D = \{x : F(x) < 0\}$ – ограниченная область с гладкой границей, на которой производная F' не вырождается. Выписать условие, что векторное поле f «смотрит внутрь D» и доказать, что в этом случае оно полно.