Теоретические задания к курсу обыкновенный уравнений. Часть III.

Локуциевский Л.В.

28 апреля 2021 г.

1. Рассмотрим двумерную линейную систему седла. Пусть Π – прямоугольная окрестность начала координат со сторонами, параллельными выделенным решениям. Рассмотрим действие потока P_t на Π. Опишите как устроены образы $P^t\Pi$ и что с ними происходит при $t \to \pm\infty$.

2. Сформулируйте определения устойчивости и асимптотической устойчивости некоторого решения $x(t)$ неавтономной системы $\dot{x} = f(t, x)$.

3. Постройте пример векторного поля на плоскости $\mathbb{R}^2$ с единственной неподвижной точкой, которая не является устойчивой, но все решения к ней стремятся при $t \to \infty$.

4. Можно ослабить условие теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, разрешив производной функции Ляпунова вдоль векторного поля быть неотрицательной в окрестности неподвижной точки, но обращаться в 0 не более чем в счетном числе точек?

5. Может ли существовать такая функция Ляпунова L, что $dL[f](x_*) < 0$ в некоторой неподвижной точке x_* поля f?

6. Вычислите явно в каком-нибудь базисе матрицу оператора B из доказательства теоремы об асимптотической устойчивости по линеаризации.

7. Докажите, что свойство асимптотической устойчивости является грубым относительно любых малых в C^1 возмущений, а именно: если x_* – неподвижная точка поля $f(x)$, все собственные значения $df(x_*)$ имеют отрицательную действительную часть, а поле $\varphi(x)$ достаточно мало в C^1 метрике, то поле $\tilde{f}(x) = f(x) + \varphi(x)$ имеет единственную близкую к x_* неподвижную точку $\tilde{x}_*$, и она является асимптотически устойчивой.

8. Докажите, что любое определенное при всех $t \in \mathbb{R}$ решение $x(t)$ является либо (i) неподвижной точкой; либо (ii) незамкнутой траекторий ($x(t_1) \neq x(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$); либо (iii) периодической траекторией (найдется минимальное $\tau > 0$, что $x(t) = x(t + \tau)$ при всех t).

9. В условиях теоремы оструктуре α- и ω- предельных множеств, верно ли, что ω-предельное множество линейно связно?

---

10. Привести пример такого потока на сфере, что ω-предельные множества любой точки есть северный полюс. Можно ли привести пример такого потока на торе?

11. Докажите, что если $T = \{P^t(x), t \in \mathbb{R}\}$ – ограниченная траектория, то $\operatorname{cl} T = T \cup \alpha(x) \cup \omega(x)$.

12. Найдите производные отображения последования Паункаре Φ и времени движения τ в терминах решений уравнения в вариациях.

13. Какова будет гладкость отображений $\tau : S_0 \to \mathbb{R}$ и $\Phi : S_0 \to S_1$, если f, S_0 и S_1 являются C^k-гладкими.

14. Остается ли верной теорема Пуанкаре-Бендиксона, если M – проективная плоскость, цилиндр, тор или лист Мебиуса?

15. Верно ли, что в условиях теоремы Пуанкаре-Бендиксона $\omega(x)$ является либо неподвижной точкой, либо циклом?

16. Пусть $w \in \mathbb{C}^1$ и $f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} a_{km} z^k w^m$. Найдите рекуррентную формулу для коэффициентов разложения в ряд Тейлора решения уравнения $w'(z) = f(z, w(z))$ с начальным условием $w(0) = 0$.

17. Дано линейное уравнение $w' = A(z)w$, а отображение A аналитично в проколотой окрестности 0. Докажите, для что обход вокруг 0 по замкнутой кривой определяется линейное отображение $B : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, которое ставит в соответствие значению решения $w(z)$ в точке z_0 его новое значение в z_0 после обхода. Как это отображение зависит от пути и точки z_0?

18. Пусть $z_1 \in \mathbb{C}$ из проколотой окрестности 0. Голоморфные решения уравнения Эйлера образуют двумерное пространство S в открытой $|z_1|$-окрестности z_1. Проведем через z_1 замкнутую кривую, обхватывающую 0. Продолжив каждое решение вдоль этой кривой мы получим новое решение в окрестности z_1. Построенное отображение называется *монодромией*. Докажите, что монодромия не зависит от выбора кривой и является линейным отображением $S \to S$.

19. Докажите, что дискриминантная кривая является огибающей для семейства проекций геометрических решений.

20. Докажите, что не существует такого двумерного многообразия $N \subset \mathbb{R}^2$, что $T_\theta N = \ker \alpha(\theta)$.

21. Преобразованием Лежандра (гладкой, строго) выпуклой функции $f(p)$ называется функция $f^*(x) = \sup_p (px - f(p))$. Решите уравнение Клеро $f(y') = xy' - y$ и покажите как связаны решения этого уравнения и f^*.

22. Нарисуйте фазовый портрет для решений уравнения $y'^2 + x^2 = 4y$. Теряется ли существование или единственность в особых точках дискриминантной кривой?

23. Доказать, что максимальная размерность изотропного многообразия равна $n = \dim M$.

24. Векторное поле v на $J^1(M)$ называется контактным, если оно сохраняет контактные гиперплоскости. Контактным гамильтонианом называется функция $F : J^1(M) \to \mathbb{R}$, равная значению 1-формы Пуанкаре-Картана на этом поле, $F = \alpha[v]$. Решите обратную задачу: дана функция $F : J^1(M) \to \mathbb{R}$, требуется доказать, что существует и единственное векторное поле v на $J^1(M)$, контакный гамильтониан которого совпадает с F (подсказка: воспользуйтесь магической формулой Картана). Каким образом это векторное поле связано с характеристическим полем уравнения $F(x, u', u) = 0$?