Программа курса “Выпуклый анализ”
Лектор — доц. А.А. Васильева
2019–20 уч. год

1. Выпуклые и аффинные множества. Аффинное множество как сдвиг линейного подпространства. Выпуклая и аффинная оболочка.
2. Аффинная независимость системы точек и связь с линейной независимостью. Размерность аффинного и выпуклого множества. Теорема Каратеодори.
3. Сумма множеств по Минковскому. Функционал Минковского и его свойства.
4. Теорема отделимости (случай, когда у одного из множеств непустая внутренность).
5. Теорема о строгой отделимости. Выпуклое замкнутое множество как пересечение семейства полупространств.
6. Конечномерная теорема отделимости.
7. Крайние и выступающие точки. Теорема Страшевича. Теорема Крейна – Мильмана.
8. Выпуклые функции. Эквивалентное условие выпуклости для собственной функции. Неравенство Йенсена.
9. Сохранение выпуклости при взятии супремума, предела и суммировании. Критерий выпуклости дифференцируемой и дважды дифференцируемой функции.
10. Субдифференциал выпуклой функции. Теоремы о непустоте субдифференциала.
11. Теоремы о локальной липшицевости выпуклой функции.
12. Субдифференциал в точке гладкости. Субдифференциал l_p-нормы в $\mathbb{R}^n$.
13. Теорема Моро – Рокафеллара.
14. Выпуклая задача без ограничений. Задача Штейнера.
15. Выпуклая задача с ограничениями. Теорема Каруша – Куна – Таккера.
16. Теорема Дубовицкого – Милютина.
17. Теоремы Радона и Хелли.
18. Теорема об очистке — случай конечного числа функций.
19. Теорема об очистке — случай бесконечного числа функций.
20. Теорема об альтернансе.
21. Поляры и их свойства. Теорема о биполяре.
22. Поляра l_p-шара в $\mathbb{R}^n$. Поляра многогранника.
23. Строгая выпуклость и гладкость множеств. Двойственность строгой выпуклости и гладкости.
24. Задача Чаплыгина (форма экстремальных траекторий).
25. Преобразование Лежандра – Юнга – Фенхеля и его свойства. Неравенство Юнга.
26. Теорема Минковского о надграфике выпуклой замкнутой собственной функции.
27. Теорема Фенхеля – Моро. Вторая сопряженная функция.
28. Двойственность строгой выпуклости и одноточечности субдифференциала.

29. Замкнутость, полунепрерывность снизу и секвенциальная полунепрерывность снизу функций.

30. Теорема существования точки минимума функции на гильбертовом пространстве.

31. Пример применения теоремы существования точки минимума: задача о движении вязкопластической среды по цилиндрической трубе.

32. Многогранные множества и их вершины.

33. Задача линейного программирования: случай отсутствия вершин у множества допустимых точек, сведение к случаю, когда вершины есть.

34. Конусы. Теорема о точечном конусе.

35. Основная теорема линейного программирования.

36. Симплекс-метод и его реализация в невырожденном случае.

37. Поиск крайней точки множества ограничений в задаче линейного программирования. Проверка непустоты множества допустимых точек.

38. Двойственная задача. Случай задачи линейного программирования. Задача линейного программирования в трех формах и связь между ними. Примеры задач линейного программирования: задача оптимального планирования производства и транспортная задача.