Программа курса “Вариационное исчисление и оптимальное управление”

Лектор — доц. А.А. Васильева

2020–21 уч. год

1. Вариация по Лагранжу, производные по Гато и по Фреше. Правило Лейбница и теорема о производной композиции.
2. Непрерывная дифференцируемость. Теорема о среднем. Связь непрерывной дифференцируемости и дифференцируемости по Фреше.
3. Оператор Немыцкого и его производная.
4. Гладкая задача на экстремум без ограничений. Необходимое условие локального минимума. Достаточное условие глобального минимума.
5. Простейшая задача вариационного исчисления: постановка задачи, вычисление производной интегрального функционала, переформулировка в виде гладкой задачи без ограничений. Необходимое условие локального минимума и достаточное условие глобального минимума в терминах производной интегрального функционала.
6. Лемма Дюбуа-Реймона. Эквивалентность уравнений Эйлера–Лагранжа и равенства нулю производной интегрального функционала.
7. Задача Больца.
8. Гладкая задача с ограничениями типа равенств: постановка и формулировка необходимого условия в общем случае.
9. Касательный вектор. Необходимое условие локального минимума в терминах касательных векторов.
10. Фактор-пространство для банахова пространства, его полнота.
11. Теорема Банаха об обратном операторе (формулировка). Лемма о правом обратном.
12. Теорема Люстерника.
13. Теорема о касательном пространстве.
14. Теорема об аннуляторе ядра оператора. Теорема отделимости (формулировка). Лемма о нетривиальности аннулятора.
15. Необходимое условие локального минимума в гладкой задаче с ограничениями типа равенств: завершение доказательства.
16. Изопериметрическая задача.
17. Гладкая задача с ограничениями типа равенств и неравенств.
18. Достаточное условие глобального минимума в задаче с ограничениями типа равенств и неравенств.
19. Задача Лагранжа: постановка задачи, формулировка необходимого условия локального минимума, доказательство непрерывной дифференцируемости и вычисление производных отображений из задачи Лагранжа.
20. Лемма о замкнутости образа. Доказательство замкнутости образа отображения, задающего ограничения типа равенств в задаче Лагранжа.
21. Сопряженное пространство к $C[t_0, t_1]$. Обобщенная лемма Дюбуа-Реймона.
22. Вывод необходимых условий локального минимума в задаче Лагранжа.
23. Задача оптимального управления: постановка, формулировка необходимого условия локального минимума в общем случае.

24. Теоремы существования, единственности и гладкости по начальному условию решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

25. Задача оптимального управления со свободным правым концом. Формулировка необходимого условия локального минимума для этого случая. Игольчатые вариации, равномерная сходимость функций x_λ и производная по λ.

26. Завершение доказательства необходимого условия локального минимума в задаче оптимального управления со свободным концом.

27. Аэродинамическая задача Ньютона.

28. Слабый и сильный минимум в простейшей задаче вариационного исчисления. Лемма о скруглении углов.

29. Необходимые условия сильного минимума (в терминах функции Вейерштрасса и непрерывности $L_{\dot{x}}$).

30. Необходимое и достаточное условия слабого минимума в простейшей задаче вариационного исчисления в терминах квадратичных форм.

31. Условие Лежандра — необходимое условие слабого минимума.

32. Условие Якоби — необходимое условие слабого минимума.

33. Достаточное условие слабого минимума.

34. Центральное поле экстремалей. Функция действия и ее производные.

35. Формула Вейерштрасса. Достаточные условия сильного минимума.

36. Доказательство неравенств с помощью проверки формулы Вейерштрасса (на примере неравенства Гильберта).

37. Сохраняющиеся величины. Геодезические на плоскости Лобачевского.

38. Теорема о существовании точки минимума секвенциально полунепрерывной снизу функции. Существование точки минимума слабо секвенциально полунепрерывной снизу функции на шаре в гильбертовом пространстве.

39. Пространство Соболева $\mathring{W}_2^1([t_0,\, t_1],\, \mathbb{R}^n)$. Существование точки минимума в задаче Дидоны.

40. Теорема Тонелли (для функций одной переменной).