Программа курса “Вариационное исчисление и оптимальное управление”

Лектор — доц. А.А. Васильева

2023–24 уч. год

1. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимое условие локального минимума терминах вариации интегрального функционала.

2. Обобщенная лемма Дюбуа-Реймона. Эквивалентность уравнений Эйлера–Лагранжа и равенства нулю вариации интегрального функционала.

3. Гармонический осциллятор и геодезические на римановом многообразии. Достаточное условие C^2-гладкости экстремали.

4. Уравнения Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом: формализация через уравнения Эйлера–Лагранжа.

5. Законы сохранения импульса и энергии.

6. Задача Больца.

7. Вариация по Лагранжу, производные по Гато и по Фреше. Правило Лейбница и теорема о производной композиции.

8. Строгая и непрерывная дифференцируемость. Теорема о среднем. Связь непрерывной дифференцируемости и строгой дифференцируемости.

9. Оператор Немыцкого и его производная.

10. Гладкая задача на минимум на аффинном подпространстве. Необходимое условие локального минимума. Достаточное условие глобального минимума; применение к простейшей задаче вариационного исчисления и задаче Больца.

11. Гладкая задача с ограничениями типа равенств: постановка и формулировка необходимого условия в общем случае. Касательный вектор. Необходимое условие локального минимума в терминах касательных векторов.

12. Лемма о правом обратном. Теорема Люстерника.
13. Теорема о касательном пространстве.
14. Функционал Минковского. Теорема отделимости точки и множества.
15. Теорема отделимости двух множеств. Теорема о строгой отделимости.
16. Вид линейного непрерывного функционала на декартовом произведении пространств. Теорема об аннуляторе ядра оператора.
17. Лемма о нетривиальности аннулятора. Завершение доказательства принципа Лагранжа для гладкой задачи с ограничениями типа равенств.
18. Изопериметрическая задача.
19. Задача выпуклого программирования. Теорема Куна–Таккера.
20. Гладкая задача с ограничениями типа равенств и неравенств. Необходимое условие локального минимума.
21. Достаточное условие глобального минимума в задаче с ограничениями типа равенств и неравенств.
22. Задача Лагранжа: постановка задачи, формулировка необходимого условия локального минимума, доказательство непрерывной дифференцируемости и вычисление производных отображений из задачи Лагранжа.
23. Лемма о замкнутости образа. Доказательство замкнутости образа отображения, задающего ограничения типа равенств в задаче Лагранжа.
24. Вывод необходимых условий локального минимума в задаче Лагранжа.
25. Задача оптимального управления: постановка, формулировка необходимого условия локального минимума в общем случае.

26. Теоремы существования, единственности и гладкости по начальному условию решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

27. Задача оптимального управления со свободным правым концом. Формулировка необходимого условия локального минимума для этого случая. Игольчатые вариации, равномерная сходимость функций x_λ и производная по λ.

28. Завершение доказательства необходимого условия локального минимума в задаче оптимального управления со свободным концом.

29. Слабый и сильный минимум в простейшей задаче вариационного исчисления. Лемма о скруглении углов.

30. Необходимые условия сильного минимума (в терминах функции Вейерштрасса и непрерывности $L_{\dot{x}}$).

31. Центральное поле экстремалей. Функция действия и ее производные.

32. Формула Вейерштрасса. Достаточные условия сильного минимума.

33. Необходимое условие слабого минимума в простейшей задаче вариационного исчисления в терминах квадратичных форм. Условие Лежандра.

34. Условие Якоби — необходимое условие слабого минимума.

35. Формулировка теоремы о погружении экстремали в центральное поле. Достаточные условия слабого и сильного минимума.

36. Гамильтонова форма уравнений Эйлера–Лагранжа.

37. Уравнение в вариациях для системы Гамильтона. Связь с уравнением Якоби.

38. Построение центрального поля экстремалей в предположении, что усиленное условие Якоби выполнено на расширенном отрезке.

39. Завершение доказательства теоремы о погружении в центральное поле: доказательство усиленного условия Якоби на расширенном отрезке.

40. Доказательство неравенств с помощью проверки формулы Вейерштрасса (на примере неравенства Гильберта).

41. Теорема о существовании точки минимума секвенциально полунепрерывной снизу функции. Рефлексивные пространства и их свойства. Теорема существования точки минимума функции на рефлексивном пространстве.

42. Теорема Мазура. Достаточное условие слабой секвенциальной полунепрерывности снизу.

43. Пространство Соболева $\mathring{W}_p^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ и его свойства. Достаточные условия существования точки минимума функционала на пространстве Соболева.

44. Существование точки минимума в задаче Дидоны.

45. Теорема Тонелли (для функций одной переменной).