

Программа курса “Вариационное исчисление и оптимальное управление”

Лектор — доц. А.А. Васильева
2023–24 уч. год

1. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимое условие локального минимума терминах вариации интегрального функционала.
2. Обобщенная лемма Дюбуа-Реймона. Эквивалентность уравнений Эйлера–Лагранжа и равенства нулю вариации интегрального функционала.
3. Гармонический осциллятор и геодезические на римановом многообразии. Достаточное условие C^2 -гладкости экстремали.
4. Уравнения Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом: формализация через уравнения Эйлера–Лагранжа.
5. Законы сохранения импульса и энергии.
6. Задача Больца.
7. Вариация по Лагранжу, производные по Гато и по Фреше. Правило Лейбница и теорема о производной композиции.
8. Строгая и непрерывная дифференцируемость. Теорема о среднем. Связь непрерывной дифференцируемости и строгой дифференцируемости.
9. Оператор Немыцкого и его производная.
10. Гладкая задача на минимум на аффинном подпространстве. Необходимое условие локального минимума. Достаточное условие глобального минимума; применение к простейшей задаче вариационного исчисления и задаче Больца.
11. Гладкая задача с ограничениями типа равенств: постановка и формулировка необходимого условия в общем случае. Касательный вектор. Необходимое условие локального минимума в терминах касательных векторов.

12. Лемма о правом обратном. Теорема Люстерника.
13. Теорема о касательном пространстве.
14. Функционал Минковского. Теорема отделимости точки и множества.
15. Теорема отделимости двух множеств. Теорема о строгой отделимости.
16. Вид линейного непрерывного функционала на декартовом произведении пространств. Теорема об аннуляторе ядра оператора.
17. Лемма о нетривиальности аннулятора. Завершение доказательства принципа Лагранжа для гладкой задачи с ограничениями типа равенств.
18. Изопериметрическая задача.
19. Задача выпуклого программирования. Теорема Куна–Таккера.
20. Гладкая задача с ограничениями типа равенств и неравенств. Необходимое условие локального минимума.
21. Достаточное условие глобального минимума в задаче с ограничениями типа равенств и неравенств. Достаточное условие единственности точки минимума.
22. Задача Лагранжа: постановка задачи, формулировка необходимого условия локального минимума, доказательство непрерывной дифференцируемости и вычисление производных отображений из задачи Лагранжа.
23. Лемма о замкнутости образа. Доказательство замкнутости образа отображения, задающего ограничения типа равенств в задаче Лагранжа.
24. Вывод необходимых условий локального минимума в задаче Лагранжа.
25. Задача оптимального управления: постановка, формулировка необходимого условия локального минимума в общем случае.

26. Теоремы существования, единственности и гладкости по начальному условию решений обыкновенных дифференциальных уравнений.
27. Задача оптимального управления со свободным правым концом. Формулировка необходимого условия локального минимума для этого случая. Игольчатые вариации, равномерная сходимость функций x_λ и производная по λ .
28. Завершение доказательства необходимого условия локального минимума в задаче оптимального управления со свободным концом.
29. Слабый и сильный минимум в простейшей задаче вариационного исчисления. Лемма о скруглении углов.
30. Необходимые условия сильного минимума (в терминах функции Вейерштрасса и непрерывности $L_{\dot{x}}$).
31. Центральное поле экстремалей. Функция действия и ее производные.
32. Формула Вейерштрасса. Достаточные условия сильного минимума.
33. Необходимое условие слабого минимума в простейшей задаче вариационного исчисления в терминах квадратичных форм. Условие Лежандра.
34. Условие Якоби — необходимое условие слабого минимума.
35. Формулировка теоремы о погружении экстремали в центральное поле. Достаточные условия слабого и сильного минимума.
36. Гамильтонова форма уравнений Эйлера–Лагранжа.
37. Уравнение в вариациях для системы Гамильтона. Связь с уравнением Якоби.
38. Построение центрального поля экстремалей в предположении, что усиленное условие Якоби выполнено на расширенном отрезке.
39. Завершение доказательства теоремы о погружении в центральное поле: доказательство усиленного условия Якоби на расширенном отрезке.

40. Доказательство неравенств с помощью проверки формулы Вейерштрасса (на примере неравенства Гильберта).
41. Теорема о существовании точки минимума секвенциально полунепрерывной снизу функции. Рефлексивные пространства и их свойства. Теорема существования точки минимума функции на рефлексивном пространстве.
42. Теорема Мазура. Достаточное условие слабой секвенциальной полунепрерывности снизу.
43. Пространство Соболева $\mathring{W}_p^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ и его свойства. Достаточные условия существования точки минимума функционала на пространстве Соболева.
44. Существование точки минимума в задаче Дидоны.
45. Теорема Тонелли (для функций одной переменной).