1. Привести пример замкнутого множества в $\mathbb{R}^2$ такого, что $\operatorname{conv} A$ незамкнуто.

2. Привести пример компактного множества в l_2 такого, что $\operatorname{conv} A$ некомпактно.

3. 1) Показать, что $\operatorname{conv}(A \cup \operatorname{conv}(B \cup C)) = \operatorname{conv}(A \cup B \cup C)$. 2) Пусть $M_1, \ldots, M_N \subset X$ — выпуклые множества. Показать, что

$$\operatorname{conv}(M_1 \cup \cdots \cup M_N) = \left\{ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j : \ x_j \in M_j, \ \lambda_j \geqslant 0, \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\}.$$

4. Привести пример двух выпуклых замкнутых множеств A, $B \subset \mathbb{R}^2$ таких, что $A+B$ незамкнуто.

5. Показать, что у единичного шара в пространстве c_0 нет крайних точек.

6. Описать множество всех выпуклых функций $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ таких, что $\operatorname{int}\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x, y) = -\infty\} = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 < 1\}$.

7. Описать множество всех выпуклых функций $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ таких, что $\operatorname{int}\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x, y) = -\infty\} = \{(x, y) : \ \max\{|x|, |y|\} < 1\}$.

8. Показать, что функция $f(x_1, \ldots, x_n) = \ln(e^{x_1} + \cdots + e^{x_n})$ выпукла.

9. Найти функционал Минковского для а) единичного круга на плоскости с центром в нуле, б) квадрата с вершинами $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, в) множества $\{(x, y) : \ y > x^2 - 1\}$.

10. а) Показать, что субдифференциал нормы в нуле совпадает с единичным шаром в сопряженном пространстве. б) Показать, что субдифференциал нормы в точке $x_0 \neq 0$ совпадает с множеством $\{x^* \in X^* : \ \|x^*\| = 1, \ x^*(x_0) = \|x_0\|\}$.

11. Привести пример выпуклой функции на прямой, у которой субдифференциал в некоторой точке пуст.

12. Привести пример задачи выпуклого программирования, в которой для любого набора чисел $(\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$, удовлетворяющего 1–3 (из теоремы Куна – Таккера), выполнено $\lambda_0 = 0$.

13. Привести пример задачи выпуклого программирования такой, что допустимая $\hat{x}$ — не точка минимума, но существует набор $(\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$, удовлетворяющий 1–3 (из теоремы Куна – Таккера).

14. Верно ли равенство $(A \cap B)^\circ = \overline{\operatorname{conv}}(A^\circ \cup B^\circ)$, если A, B выпуклы, замкнуты и имеют непустое пересечение?

15. Пусть $p(x)$ — выпуклая положительно-однородная функция (т.е. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ для любого $\lambda \geqslant 0$). Пусть
$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leqslant 1\}.$$
Показать, что $A^\circ = \operatorname{conv}(\partial p(0) \cup \{0\})$.

16. Пусть $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a)^2 + x_2^2 \leqslant R^2\}$, где $0 < a \leqslant R$. Найти A°.

17. Пусть $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a)^2 + x_2^2 \leqslant R^2\}$, где $a > R > 0$. Найти A°.

18. Найти поляру множеств $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 \geqslant x_1^2 + c\}$, где $c \in \mathbb{R}$.