Задачи к лекциям по выпуклому анализу

Локуциевский Л.В.

2017

1. Выпуклые множества и операции над ними.

1.1. Доказать, что если точки x_1, ..., x_{d+1} из $\mathbb{R}^d$ не лежат в одном аффинном пространстве размерности $d-1$ или меньше, то множество $\Delta = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_{d+1}\}$ (называемое d-мерным симплексом) имеет непустую внутренность.

1.2. Привести пример замкнутого множества, выпуклая оболочка которого не замкнута.

1.3. Верны ли включения $\operatorname{conv}\operatorname{cl} E \subset \operatorname{cl}\operatorname{conv} E$ и $\operatorname{cl}\operatorname{conv} E \subset \operatorname{conv}\operatorname{cl} E$?

1.4. Пусть C_1 и C_2 – выпуклые замкнутые множества. Докажите, что если $\operatorname{ri} C_1 \subset C_2$ и $\operatorname{ri} C_2 \subset C_1$, то $C_1 = C_2$

1.5. Показать, что сумма по Минковскому замкнутого и компактного множеств – замкнута.

1.6. Показать, что сумма по Минковскому двух замкнутых выпуклых множеств может быть не замкнута

2. Теоремы отделимости

2.1. Докажите, что если множество $C \subset \mathbb{R}^d$ выпукло, то его граница совпадает с границей его замыкания: $\partial C = \partial \operatorname{cl} C$. Приведите контр пример для случая, когда множество не выпукло.

2.2. Пусть $C \subset \mathbb{R}^d$ - выпуклое множество. Докажите, что если $x_0 \in \operatorname{ri} C$ можно отделить от C гиперплоскостью, то только несобственным образом. Равносильно: разделяющая гиперплоскость содержит $\operatorname{aff} C$. Равносильно: разделяющий ковектор p перпендикулярен $\operatorname{aff} C$. Равносильно: $C \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \langle p, x \rangle = c_0\}$.

2.3. Докажите (используя теоремы отделимости), что если C_1 и C_2 – выпуклые подмножества $\mathbb{R}^d$, то $\operatorname{ri}(C_1 + C_2) = \operatorname{ri} C_1 + \operatorname{ri} C_2$. Попробуйте также придумать еще одно доказательство, не использующее теорему отделимости.

2.4. Доказать, что если C_1 и C_2 – выпуклые множества в $\mathbb{R}^d$, $\operatorname{ri} C_1 \cap \operatorname{ri} C_2 \neq \emptyset$ и $\dim(C_1 + C_2) = d$, то множества C_1 и C_2 нельзя разделить

2.5. Доказать, что если $E \subset \mathbb{R}^d$, то любая точка $x \in \operatorname{conv} E$ лежит в относительной внутренности некторого (невырожденного) симплекса размерности $\leqslant d$ и с вершинами из E.

3. Простейшие свойства выпуклых функций

3.1. Описать все несобственные выпуклые функции с замкнутым надграфиком.

3.2. Докажите, что собственная выпуклая функция f на $\mathbb{R}^d$ ограничена на любом компактном множестве $K \subset \operatorname{ri}\operatorname{dom} f$.

3.3. Докажите, что собственная выпуклая замкнутая функция на $\mathbb{R}^1$ непрерывна на $\operatorname{dom} f$.

3.4. (i) Пусть f_1 и f_2 – выпуклые замкнутые функции на $\mathbb{R}^d$. Докажите, что если $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ для всех $x \in \operatorname{ri}\operatorname{dom} f_1$ и $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ для всех $x \in \operatorname{ri}\operatorname{dom} f_2$, то $f_1(x) = f_2(x)$ для всех x. (ii) Останется ли утверждение верным, если заменить оба неравенства на противоположные?

3.5. Докажите, что функция расстояния $f(x) = \operatorname{dist}(x, C)$ от точки до выпуклого множества C является выпуклой.

3.6. Докажите, что функция $f : \mathbb{R}^d \to \bar{\mathbb{R}}$ непрерывна, если и только если ее график замкнут.

3.7. Верно ли, что если собственная функция f выпукла, то выпуклы множества $f^{-1}(-\infty; c]$ для всех $c \in \mathbb{R}$? Верно ли обратное утверждение: если все множества $f^{-1}(-\infty; c]$ выпуклы при всех $c \in \mathbb{R}$, то собственная функция f выпукла?

4. Субдифференциал

4.1. Докажите, что если $\partial f(x) \neq \emptyset$, то функция f полунепрерывна снизу в x.

4.2. Предположим f – выпуклая собственная функция на $\mathbb{R}^d$ и $k = \dim\operatorname{dom} f < d$. Пусть $\varphi : \operatorname{aff}\operatorname{dom} f \to \mathbb{R}^k$ – линейный изоморфизм. Тогда f можно рассмотреть как функцию на $\mathbb{R}^k$, $g = f \circ \varphi^{-1}$, которая тоже будет выпуклой функцией. Пусть $L^\perp$ обозначает множество ковекторов, перпендикулярных подпространству L. Докажите, что для $x_0 \in \operatorname{dom} f$ выполнено

$$\partial f(x_0) = (\operatorname{aff}\operatorname{dom} f)^\perp \oplus \varphi^*[\partial g(\varphi(x_0))].$$

4.3. Докажите, что в любой точке $x_0 \in \operatorname{ri}\operatorname{dom} f$ субдифференциал $\partial f(x_0)$ есть сумма линейного подпространства $(\operatorname{aff}\operatorname{dom} f)^\perp$ и компактного выпуклого множества, аффинная оболочка которого трансверсальна $(\operatorname{aff}\operatorname{dom} f)^\perp$.

4.4. Вычислить субдифференциал нормы в 0.

5. Выпуклый принцип Лагранжа

5.1. Докажите лемму Фаркаша: пусть $f_0, f_1, \dots, f_n$ – линейные (однородне) функции на $\mathbb{R}^d$, тогда если для любого $x \in \mathbb{R}^d$ из неравенств $f_i(x) \geqslant 0$ при $i \geqslant 1$ следует неравенство $f_0(x) \geqslant 0$, то найдутся неотрицательные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, что $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$.

5.2. Остается ли верной теорема о разрешимости системы выпуклых неравенств если отказаться от требования собственности?

5.3. Остается ли верной модификация теоремы о разрешимости системы выпуклых неравенств, если в первом пункте заменить строгое неравенство $f_i(x) < 0$ нестрогим $f_i(x) \leqslant 0$, а во втором наоборот – нестрогое $\sum_i \lambda_i f_i(x) \geqslant 0$ на строгое $\sum_i \lambda_i f_i(x) > 0$.

6. Основные выпуклые функции

6.1. Доказать, что если множество C выпукло и $0 \in \operatorname{ri} C$, то $\mu_C = \mu_{\operatorname{cl} C}$

6.2. Привести примеры (i) такого выпуклого множества C, что $0 \in C$, но $\mu_C \neq \mu_{\operatorname{cl} C}$ и (ii) такого множества C, что $0 \in \operatorname{int} C$, но $\mu_C \neq \mu_{\operatorname{cl} C}$.

6.3. Описать все такие функции $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d*}$, что g и $-g$ монотонны, т.е. $\langle g(x) - g(y), x - y\rangle = 0$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$.

6.4. Пусть $f : \mathbb{R}^d \to \bar{\mathbb{R}}$ – положительно однородная неотрицательная функция и $f(0) = 0$. Доказать, что $f = \mu_{\{x: f(x) \leqslant 1\}}$.

6.5. Пусть $\|\cdot\|$ – какая-либо норма на $\mathbb{R}^d$ и $B = \{x : \|x\| \leqslant 1\}$ – единичный шар в этой норме. Докажите, что B – выпуклое, компактное множество, $0 \in \operatorname{int} B$ и $\mu_B(x) = \|x\|$.

6.6. Пусть C – не пустое, выпуклое, компактное множество. Докажите, что s_C является полунормой на $\mathbb{R}^{d*}$, если и только если только если $-C = C$.

6.7. Пусть C – не пустое, выпуклое, компактное множество. При каких условиях опорная функция s_C будет нормой?

7. Выпуклые операции

7.1. Построить пример такой функции f, что $\operatorname{epi} \operatorname{conv} f \neq \operatorname{conv} \operatorname{epi} f$.

7.2. Привести пример такой замкнутой функции f, что функция $\operatorname{conv} f$ не замкнута. Этот же пример показывает, что, вообще говоря, $\operatorname{cl} \operatorname{conv} f \neq \operatorname{conv} \operatorname{cl} f$.

7.3. Докажите, что если выпуклая функция f является собственной, то ее замыкание $\operatorname{cl} f$ также является собственной функцией.

7.4. Пусть f – выпуклая функция. Докажите, что если $x_1 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} f$, то для любой точки x_0 существует предел $\lim_{\lambda \to +0} f(x_\lambda)$ и он равен $\operatorname{cl} f(x_0)$.

7.5. Зафиксируем произвольное выпуклое множество $C \subset \mathbb{R}^d$. Выразите функцию расстояния $d(x, C)$ от точки до множества через стандартные выпуклые функции (s_C, δ_C, μ_C, $|x|$) и операции ($\operatorname{cl} f$, $\operatorname{conv} f$, $f + g$, $f \,\square\, g$, $f \vee g$, $f \wedge g$).

7.6. Докажите, если если линейное отображение $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ обратимо, то $Af = fA^{-1}$.

7.7. Привести пример двух таких выпуклых функций f и g, что $\mathrm{cl}(f+g) \neq \mathrm{cl} f + \mathrm{cl} g$. Доказать, что если $\mathrm{ri\,dom} f \cap \mathrm{ri\,dom}\, g \neq \emptyset$, то все же $\mathrm{cl}(f+g) = \mathrm{cl} f + \mathrm{cl} g$.

8. Двойственность выпуклых объектов

8.1. Докажите, что результат теоремы о геометрии выпуклой двойственности верен только для выпуклых замкнутых множеств.

8.2. Остается ли верной теорема о геометрии выпуклой двойственности, если вместо замкнутых полупространснтв рассмотреть открытые?

8.3. Доказать, что любое относительно открытое выпуклое множество совпадает с пересечением открытых полупространств его содержащих.

8.4. Попробуйте, не используя теорему Фенхеля-Моро, доказать предложение о том, что две выпуклые замкнутые положительно однородные функции f_1 и f_2 совпадают если и только если $\partial f_1(0) = \partial f_2(0)$.

8.5. Пусть $f = f^{**}$. Что можно сказать об f?

8.6. Докажите теорему Минковского о том, любая выпуклая замкнутая собственная функция $f : \mathbb{R}^d \to \bar{\mathbb{R}}$ есть поточечный супремум аффинных функций $l_{p,b}(x) = \langle p, x\rangle - b$, $p \in \mathbb{R}^{d*}$, $b \in \mathbb{R}$, ее не превосходящих.

8.7. Докажите, что для любого множества A выполнено $A^{00} = \mathrm{cl\,conv}(A \cup \{0\})$.

9. Субдифференциальное исчисление

9.1. Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ – непустой выпуклый конус. Докажите, что для $p \in \partial\delta_K(x)$ если и только если $x \in K$, $p \in K^*$ и $\langle p, x\rangle = 0$.

9.2. Пусть $g : \mathbb{R}^{d'} \to \bar{\mathbb{R}}$ – выпуклая собственная функция и $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ – линейный оператор. Докажите, что если $\mathrm{Im}\, A \cap \mathrm{ri\,dom}\, g \neq \emptyset$, то $(gA)^* = A^* g^*$.

9.3. Приведите пример двух таких выпуклых замкнутых функций, что $\partial(f_1 \vee f_2)(x_0) \neq \mathrm{conv}(\partial f_1(x_0) \cup \partial f_2(x_0))$ для некоторой точки x_0.

9.4. Докажите, что если f_1, f_2 – выпуклые собственные функции и $\mathrm{ri\,dom} f_1 \cap \mathrm{ri\,dom} f_2 \neq \emptyset$, то $(f_1 + f_2)^* = (f_1^* \square f_2^*)$.

9.5. На плоскости $\mathbb{R}^2$ заданы прямая l и две точки $x_0 \neq x_1$ не лежащие на ней. Найти такую точку $x \in \mathbb{R}^2$, что сумма трех расстояний от нее до прямой и двух точек (глобально) минимальна.

9.6. Доказать, что $\sqrt{x^2 + y^2} + |x| + \frac{3}{2}x + y^4 + \frac{1}{2}y \geqslant 0$.

10. Двойственность строгой выпуклости и гладкости

10.1. Пусть $C \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклое компактное множество и $0 \in \operatorname{int} C$. Докажите, что множество C строго выпукло, если и только если множество C° имеет гладкую границу (множество называется строго выпуклым, если любая его граничная точка является крайней, т.е. не может помещена внутрь отрезка из этого множества).

10.2. Пусть f – выпуклая замкнутая функция. Верно ли, что если множество $\operatorname{dom} f$ открыто и $f \in C^1(\operatorname{dom} f)$, то сопряженная функция f^* строго выпукла на $\operatorname{dom} f^*$?

11. Двойственность выпуклых задач

11.1. Постройте двойственное семейство задач к семейству транспортных задач $\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \to \min$ при условиях $\sum_i x_{ij} = b_j$ для всех i, $\sum_j x_{ij} = a_i$ для всех i и $x_{ij} \geqslant 0$ для всех i и j. Здесь $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $x = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{nm}$ – неизвестные, а $(a, b, c) \subset \mathbb{R}^{n+m+nm}$ – параметры семейства.

11.2. Докажите, что двойственное семейство задач к семейству $f_0(x) - y_0 \to \min_x$, $f_i(x) \leqslant y_i$, $i = 1, \dots, n$, $x \in A$ есть семейство задач $-\inf_{x \in A} \mathscr{L}(\lambda, x, y) \to \min_\lambda$, $\lambda_i \geqslant 0$, где $\lambda = -q$ и $\mathscr{L} = \sum_{i=0}^n \lambda_i (f_i(x) - y_i)$.

11.3. Докажите, что если в предыдущем упражнении все функции выпуклы, $A \subset \operatorname{dom} f_i$ и выполнено условие Слейтера, то отсутствует разрыв двойственности.

12. Топологические свойства выпуклых множеств

12.1. Докажите, что любое открытое звездное множество $A \subset \mathbb{R}^d$ гомеоморфно открытому шару в $\mathbb{R}^d$.

12.2. Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклое множество, и P – проективное преобразование на $\mathbb{R}^d$. Докажите, что если $P(x)$ не уходит не бесконечность ни при каком $x \in A$, то $P(A)$ – выпуклое подмножество $\mathbb{R}^d$.

12.3. Верно ли, что множество крайних точек компактного выпуклого множества компактно?

12.4. Верно ли, что если $B \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклый компакт, что $B = \operatorname{conv} \operatorname{extr} B$?

Итого: 61 задача.