

Задачи к лекциям по выпуклому анализу

Локуциевский Л.В.

2018

Экзаменационный билет включает в себя 2 теоретических вопроса и 0, 1, 2 или 3 задачи в зависимости от доли k задач из списка, решенных экзаменуемым в течение семестра:

$$\begin{array}{ll} k < \frac{1}{3} \Rightarrow 3 \text{ задачи,} & \frac{1}{3} \leq k < \frac{3}{5} \Rightarrow 2 \text{ задачи,} \\ \frac{3}{5} \leq k < \frac{5}{6} \Rightarrow 1 \text{ задача,} & k \geq \frac{5}{6} \Rightarrow 0 \text{ задач.} \end{array}$$

Каждая не решенная во время экзамена задача понижает итоговую оценку на 1 балл.

1. Выпуклые множества и операции над ними.

1.1. Доказать, что если точки x_1, \dots, x_{d+1} из \mathbb{R}^d не лежат в одном аффинном пространстве размерности $d-1$ или меньше, то множество $\Delta = \text{conv}\{x_1, \dots, x_{d+1}\}$ (называемое в этом случае d -мерным симплексом) имеет непустую внутренность.

1.2. Привести пример замкнутого множества, выпуклая оболочка которого не замкнута.

1.3. Верны ли включения $\text{conv cl } E \subset \text{cl conv } E$ и $\text{cl conv } E \subset \text{conv cl } E$?

1.4. Пусть C_1 и C_2 – выпуклые замкнутые множества. Докажите, что если $\text{ri } C_1 \subset C_2$ и $\text{ri } C_2 \subset C_1$, то $C_1 = C_2$.

1.5. Найти среднюю высоту единичного куба в \mathbb{R}^3 .

1.6. Показать, что сумма по Минковскому замкнутого и компактного множеств – замкнута.

1.7. Показать, что сумма по Минковскому двух замкнутых выпуклых множеств может быть не замкнута

2. Теоремы отделимости и теорема Каратеодори

2.1. Докажите, что если множество $C \subset \mathbb{R}^d$ выпукло, то его граница совпадает с границей его замыкания: $\partial C = \partial \text{cl } C$. Приведите контрпример для случая,

когда множество не выпукло.

2.2. Пусть $C \subset \mathbb{R}^d$ - выпуклое множество. Докажите, что если $x_0 \in \text{ri } C$ можно отделить от C гиперплоскостью, то только несобственным образом. Равносильно: разделяющая гиперплоскость содержит $\text{aff } C$. Равносильно: разделяющий ковектор p перпендикулярен $\text{aff } C$. Равносильно: $C \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \langle p, x \rangle = c_0\}$.

2.3. Докажите (используя теоремы отделимости), что если C_1 и C_2 - выпуклые подмножества \mathbb{R}^d , то $\text{ri}(C_1 + C_2) = \text{ri } C_1 + \text{ri } C_2$. Попробуйте также придумать еще одно доказательство, не использующее теорему отделимости.

2.4. Доказать, что если C_1 и C_2 - выпуклые множества в \mathbb{R}^d , $\text{ri } C_1 \cap \text{ri } C_2 \neq \emptyset$ и $\dim(C_1 + C_2) = d$, то множества C_1 и C_2 нельзя разделить

2.5. Привести пример такого линейного бесконечномерного пространства X (не снабженного ни нормой, ни топологией) и такого его выпуклого подмножества C , что с одной стороны $0 \notin C$, а с другой стороны для любого линейного функционала $p \neq 0$ на X найдется такой вектор $x \in C$, что $\langle p, x \rangle < 0$.

3. Простейшие свойства выпуклых функций

3.1. Описать все несобственные выпуклые функции с замкнутым надграфиком.

3.2. Докажите, что собственная выпуклая функция f на \mathbb{R}^d ограничена на любом компактном множестве $K \subset \text{ri dom } f$.

3.3. Докажите, что собственная выпуклая замкнутая функция на \mathbb{R}^1 непрерывна на $\text{dom } f$.

3.4. (i) Пусть f_1 и f_2 - выпуклые замкнутые функции на \mathbb{R}^d . Докажите, что если $f_1(x) \geq f_2(x)$ для всех $x \in \text{ri dom } f_1$ и $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in \text{ri dom } f_2$, то $f_1(x) = f_2(x)$ для всех x . (ii) Останется ли утверждение верным, если заменить оба неравенства на противоположные?

3.5. Докажите, что функция расстояния $f(x) = \text{dist}(x, C)$ от точки до выпуклого множества C является выпуклой.

3.6. Пусть $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ - какая-то не обязательно выпуклая функция. Рассмотрим два утверждения: (i) функция f непрерывна и (ii) график f замкнут. Верны ли следствия (i) \Rightarrow (ii) и (ii) \Rightarrow (i)? А если $f(x) \neq \pm\infty$ для всех x ?

3.7. Верно ли, что если собственная функция f выпукла, то выпуклы множества $f^{-1}(-\infty; c]$ для всех $c \in \mathbb{R}$? Верно ли обратное утверждение: если все множества $f^{-1}(-\infty; c]$ выпуклы при всех $c \in \mathbb{R}$, то собственная функция f выпукла?

3.8. Докажите следующую теорему существования: если замкнутая функция в конечномерном пространстве имеет ограниченную эффективную область, то она достигает своего минимума.

4. Субдифференциал

4.1. Докажите, что если $\partial f(x) \neq \emptyset$, то функция f полунепрерывна снизу в x .

4.2. Предположим f – выпуклая собственная функция на \mathbb{R}^d и $k = \dim \text{dom } f < d$ и $0 \in \text{aff dom } f$. Пусть $\varphi : \text{aff dom } f \rightarrow \mathbb{R}^k$ – линейный изоморфизм. Тогда f можно рассмотреть как функцию на \mathbb{R}^k , $g = f \circ \varphi^{-1}$, которая тоже будет выпуклой функцией. Пусть L^\perp обозначает множество ковекторов, перпендикулярных подпространству L . Докажите, что для $x_0 \in \text{dom } f$ выполнено

$$\partial f(x_0) = (\text{aff dom } f)^\perp \oplus \varphi^*[\partial g(\varphi(x_0))].$$

4.3. Докажите, что в любой точке $x_0 \in \text{ri dom } f$ субдифференциал $\partial f(x_0)$ есть сумма линейного подпространства $(\text{aff dom } f)^\perp$ и компактного выпуклого множества, аффинная оболочка которого трансверсальна $(\text{aff dom } f)^\perp$.

4.4. Вычислить субдифференциал нормы в 0.

4.5. Докажите, что субдифференциал выпуклой функции циклично монотонен, т.е. для любых x_i и $p_i \in \partial f(x_i)$, $i = 0, \dots, n-1$, выполнено

$$\langle p_0, x_1 - x_0 \rangle + \langle p_1, x_2 - x_1 \rangle + \dots + \langle p_{n-2}, x_{n-1} - x_{n-2} \rangle + \langle p_{n-1}, x_0 - x_{n-1} \rangle \leq 0.$$

4.6. Пусть $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow 2^{\mathbb{R}^{d*}}$ – многозначное отображение, т.е. $\rho(x) \subset \mathbb{R}^{d*}$ для каждого $x \in \mathbb{R}^d$. Докажите, что ρ циклично (т.е. для любого набора пар $p_i \in \rho(x_i)$ выполняется неравенство из упражнения 4.5) тогда и только тогда, когда найдется такая выпуклая, замкнутая, собственная функция $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, что $\rho(x) \subset \partial f(x)$ при всех x .

5. Выпуклый принцип Лагранжа

5.1. Докажите лемму Фаркаша: пусть f_0, f_1, \dots, f_n – линейные (однородные) функции на \mathbb{R}^d , тогда если для любого такого $x \in \mathbb{R}^d$, что неравенства $f_i(x) \geq 0$ выполняются при всех $i \geq 1$, выполняется также неравенство $f_0(x) \geq 0$, то найдутся неотрицательные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, что $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$.

5.2. Остается ли верной теорема о разрешимости системы выпуклых неравенств если отказаться от требования собственности?

5.3. Остается ли верной модификация теоремы о разрешимости системы выпуклых неравенств, если в первом пункте заменить строгое неравенство $f_i(x) < 0$ нестрогим $f_i(x) \leq 0$, а во втором наоборот – нестрогое $\sum_i \lambda_i f_i(x) \geq 0$ на строгое $\sum_i \lambda_i f_i(x) > 0$.

6. Основные выпуклые функции

6.1. Пусть C – непустое, выпуклое, компактное множество. Докажите, что s_C является полунормой на \mathbb{R}^{d*} , если и только если $-C = C$. При каких дополнительных условиях на C опорная функция s_C будет нормой?

- 6.2.** Доказать, что если множество C выпукло и $0 \in \text{ri} C$, то $\mu_C = \mu_{\text{cl} C}$.
- 6.3.** Привести примеры (i) такого выпуклого множества C , что $0 \in C$, но $\mu_C \neq \mu_{\text{cl} C}$ и (ii) такого множества C , что $0 \in \text{int} C$, но $\mu_C \neq \mu_{\text{cl} C}$.
- 6.4.** Описать все такие функции $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d*}$, что g и $-g$ монотонны, т.е. $\langle g(x) - g(y), x - y \rangle = 0$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$.
- 6.5.** Пусть $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – положительно однородная неотрицательная функция и $f(0) = 0$. Доказать, что $f = \mu_{\{x: f(x) \leq 1\}}$.
- 6.6.** Пусть $\|\cdot\|$ – какая-либо норма на \mathbb{R}^d и $B = \{x : \|x\| \leq 1\}$ – единичный шар в этой норме. Докажите, что B – выпуклое, компактное множество, $0 \in \text{int} B$ и $\mu_B(x) = \|x\|$.
- 6.7.** Привести пример такого выпуклого замкнутого множества $C \subset \mathbb{R}^d$, что его функция Минковского μ_C не замкнута.
- 6.8.** Докажите, что если множество C выпукло и компактно, то функция μ_C выпукла и замкнута.

7. Выпуклые операции

- 7.1.** Построить пример такой функции f , что $\text{epi conv} f \neq \text{conv epi} f$.
- 7.2.** Привести пример такой замкнутой функции f , что функция $\text{conv} f$ не замкнута. Этот же пример показывает, что, вообще говоря, $\text{cl conv} f \neq \text{conv cl} f$.
- 7.3.** Пусть на единичной сфере $S^{d-1} = \{|x| = 1\} \subset \mathbb{R}^d$ задана некоторая полунепрерывная снизу функция $h : S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$. Докажите, что существует такая выпуклая замкнутая функция $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, что f и h совпадают на S^{d-1} .
- 7.4.** Докажите, что если выпуклая функция f является собственной, то ее замыкание $\text{cl} f$ также является собственной функцией.
- 7.5.** Пусть f – выпуклая функция. Докажите, что если $x_1 \in \text{ri dom} f$, то для любой точки x_0 существует предел $\lim_{\lambda \rightarrow +0} f(x_\lambda)$ и он равен $\text{cl} f(x_0)$.
- 7.6.** Зафиксируем произвольное выпуклое множество $C \subset \mathbb{R}^d$. Выразите функцию расстояния $d(x, C)$ от точки до множества через стандартные выпуклые функции и операции.
- 7.7.** Привести пример двух таких выпуклых функций f и g , что $\text{cl}(f + g) \neq \text{cl} f + \text{cl} g$. Доказать, что если $\text{ri dom} f \cap \text{ri dom} g \neq \emptyset$, то все же $\text{cl}(f + g) = \text{cl} f + \text{cl} g$.

8. Двойственность выпуклых объектов

- 8.1.** Остается ли верной теорема Минковского о геометрии выпуклой двойственности, если вместо замкнутых полупространств рассмотреть открытые?

8.2. Доказать, что любое относительно открытое выпуклое множество совпадает с пересечением открытых полупространств, его содержащих.

8.3. Пусть $f = f^{**}$. Что можно сказать об f ?

8.4. Докажите теорему Минковского о том, что любая выпуклая замкнутая собственная функция $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ есть поточечный супремум аффинных функций $l_{p,b}(x) = \langle p, x \rangle - b$, $p \in \mathbb{R}^{d*}$, $b \in \mathbb{R}$, ее не превосходящих.

8.5. Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклый конус. Докажите, что если K не содержит линейных подпространств размерности 1 или больше, то найдутся такой ковектор p и число $c > 0$, что $\langle p, \frac{x}{|x|} \rangle > c$ для всех $x \in K$.

9. Субдифференциальное исчисление

9.1. Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ – непустой выпуклый конус. Докажите, что $p \in \partial \delta_K(x)$ если и только если $x \in K$, $p \in K^*$ и $\langle p, x \rangle = 0$.

9.2. Приведите пример двух таких выпуклых замкнутых функций, что $\partial(f_1 \vee f_2)(x_0) \neq \text{conv}(\partial f_1(x_0) \cup \partial f_2(x_0))$ для некоторой точки x_0 , в которой их значения совпадают $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

9.3. Докажите, что если f_1, f_2 – выпуклые собственные функции и $\text{ri dom } f_1 \cap \text{ri dom } f_2 \neq \emptyset$, то $(f_1 + f_2)^* = (f_1^* \square f_2^*)$.

9.4. На плоскости \mathbb{R}^2 заданы прямая l и две точки $x_0 \neq x_1$, не лежащие на ней. Найти такую точку $x \in \mathbb{R}^2$, что сумма трех расстояний от нее до прямой и двух точек (глобально) минимальна.

10. Двойственность выпуклых задач

10.1. Постройте двойственное семейство задач к семейству транспортных задач $\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$ при условиях $\sum_i x_{ij} = b_j$ для всех i , $\sum_j x_{ij} = a_i$ для всех i и $x_{ij} \geq 0$ для всех i и j . Здесь $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $x = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{nm}$ – неизвестные, а $(a, b, c) \in \mathbb{R}^{n+m+nm}$ – параметры семейства.

10.2. Докажите, что двойственное семейство задач к семейству $f_0(x) \rightarrow \min_x$, $f_i(x) \leq y_i$, $i = 1, \dots, n$, $x \in A$, есть семейство задач $-\inf_{x \in A} \mathcal{L}(\lambda, x, y) \rightarrow \min_\lambda$, $\lambda_i \geq 0$, где $\lambda = -q$ и $\mathcal{L} = f_0(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(f_i(x) - y_i)$.

10.3. Докажите, что если в предыдущем упражнении все функции выпуклы и выполнено условие Слейтера, то отсутствует разрыв двойственности.

11. Топологические свойства выпуклых множеств

11.1. Докажите, что любое открытое звездное множество $A \subset \mathbb{R}^d$ гомеоморфно открытому шару в \mathbb{R}^d .

11.2. Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклое множество и P – проективное преобразование на \mathbb{R}^d . Докажите, что если $P(x)$ не уходит на бесконечность ни при каком $x \in A$, то $P(A)$ – выпуклое подмножество \mathbb{R}^d .

11.3. Доказать, что если $E \subset \mathbb{R}^d$, то любая точка $x \in \operatorname{conv} E$ лежит в относительной внутренней некоторого (невырожденного) симплекса размерности $\leq d$ и с вершинами из E .

11.4. Верно ли, что множество крайних точек компактного выпуклого множества компактно?

11.5. Легко понять, что выпуклая замкнутая функция f не обязана достигать своего максимума на выпуклом компактном множестве S . Верно ли, что если она его все-таки достигает, то найдется точка из $\operatorname{extr} S$ с максимальным значением?

Итого: 61 задача.