Список задач по курсу “Вариационное исчисление и оптимальное управление”

Лектор — доц. А.А. Васильева

2018–19 уч. год

1. 1) Пусть $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задано равенством $F(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1^2 x_2}$. Показать, что F имеет вариацию по Лагранжу, но не дифференцируемо по Гато в нуле. 2) Пусть X — бесконечномерное нормированное пространство, $F : X \to \mathbb{R}$ — линейный неограниченный функционал. Показать, что F имеет вариацию по Лагранжу в нуле, но не дифференцируем по Гато.

2. Пусть $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 > 0,\ x_2 = x_1^2\}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in M, \\ 0, & (x_1, x_2) \notin M. \end{cases}$$
Показать, что f дифференцируемо по Гато, но не дифференцируемо по Фреше в т. $(0, 0)$.

3. Построить пример отображений $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таких, что F дифференцируемо по Фреше в т. 0, G дифференцируемо по Гато в т. $(0, 0)$, $F(0) = (0, 0)$, при этом $G \circ F$ не имеет вариации по Лагранжу в т. 0.

4. 1) Если $x_0, x_1 \in X$, $F : X \to \mathbb{R}$ дифференцируемо по Гато на $[x_0, x_1]$, то существует $x \in [x_0, x_1]$ такое, что $F(x_1) - F(x_0) = F'(x)[x_1 - x_0]$. 2) Если $\dim Y > 1$, то утверждение из п. 1 может быть неверным (пример: $F(t) = (\sin t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$).

5. Пусть X — пространство непрерывных функций на $[0, 1]$ с нормой $\|x\| = \int\limits_0^1 |x(t)|\, dt$, $T : X \to X$, $T(x)(t) = x^2(t)$. Показать, что T дифференцируемо по Гато.

6. Пусть X — пространство непрерывных функций на $[0, 1]$ с нормой $\|x\| = \int\limits_0^1 |x(t)|\, dt$, $r : X \to X$, $r(h)(t) = h^2(t)$. Показать, что $r(h) \neq o(\|h\|)$ при $\|h\| \to 0$.

7. Пусть $\mathcal{L}(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$, $x \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$. Пусть для любого $t \in [t_0, t_1]$ отображение $(\xi, \eta) \mapsto L(t, \xi, \eta)$ выпукло ($\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$). Тогда функционал $\mathcal{L}$ выпуклый.

8. Рассмотрим задачу $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \to \mathrm{extr}$, $x(0) = 0$, $x(T_0) = 0$. Пусть $T_0 < \pi$. Доказать, что найдется функция $\omega \in C^1[0, T_0]$ такая, что для любой функции $x \in C^1[0, T_0]$ такой, что $x(0) = x(T_0) = 0$, выполнено $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt = \int\limits_0^{T_0} (\dot{x} - \omega x)^2\, dt$.

9. Рассмотрим задачу $\mathcal{L}(x) := \int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \to \mathrm{extr}$, $x(0) = 0$, $x(T_0) = 0$. 1) Пусть $T_0 > \pi$, $x(t) = c \sin \frac{\pi t}{T_0}$. Показать, что $\mathcal{L}(x) < 0$ при $c \neq 0$. 2) Почему рассуждения с выводом формулы $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt = \int\limits_0^{T_0} (\dot{x} - \omega x)^2\, dt$ ($x \in C^1[0, T_0]$, $x(0) = x(T_0) = 0$) в этом случае не проходят?

10. Показать, что $\int\limits_0^{\pi} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt = \int\limits_0^{\pi} (\dot{x} - x \cdot \mathrm{ctgt})^2\, dt$, $x \in C^1[0, \pi]$, $x(0) = x(\pi) = 0$.

11. Доказать, что в задаче
$$\int\limits_0^1 t^{1/2} \dot{x}^2\, dt \to \inf, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$
точки локального минимума в пространстве $C^1[0, 1]$ не существует.

12. Доказать, что в задаче

$$\int_0^1 (1-\dot{x}^2)^2\,dt \to \inf, \quad x(0)=0, \quad x(1)=0$$

точки локального минимума в пространстве $C^1[0,\,1]$ не существует, при этом точная нижняя грань функционала равна 0.

13. Пусть $A : l_2 \to l_2$,

$$A(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n,\,\ldots) = (x_1,\,x_2/2,\,\ldots,\,x_n/n,\,\ldots),$$

$y = (y_1,\,\ldots,\,y_n,\,\ldots) = (1,\,1/2,\,\ldots,\,1/n,\,\ldots)$. Показать, что $y \in l_2 \backslash \operatorname{Im} A$. Рассмотрим задачу

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \to \inf, \quad A(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n,\,\ldots) = 0.$$

Какая точка будет точкой минимума в этой задаче? Показать, что для этой задачи принцип Лагранжа неверен. Какое из условий теоремы здесь не выполнено?

14. Привести пример гладких функций $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что в задаче $f_0(x) \to \min$, $f_1(x) = 0$ будет существовать точка локального минимума и будет выполнен принцип Лагранжа с $\lambda_0 = 0$ (а с $\lambda_0 \neq 0$ принцип Лагранжа не выполнен).

15. (распределение с максимальной энтропией). Пусть $\rho : [0,\,+\infty) \to (0,\,+\infty)$, $\int\limits_0^{\infty} \rho(x)\,dx = 1$ (функция ρ имеет смысл плотности распределения). Энтропией называется величина $S = -\int\limits_0^{\infty} \rho(x) \ln \rho(x)\,dx$. Найти функцию ρ, для которой энтропия максимальна при заданном среднем (т.е. задано ограничение $\int\limits_0^{\infty} x\rho(x)\,dx = C_1$).

16. Решить задачу

$$\int_0^{T_0} \frac{t}{1+u^2}\,dt \to \inf, \quad \dot{x} = u, \quad x(0)=0,\, x(T_0)=\xi, \quad u \geqslant 0$$

($T_0 > 0$, $\xi > 0$ — фиксированные параметры).

17. Решить задачу

$$\int_0^{R} (\mu t u^2 + \tau t|u| - ctx)\,dt \to \inf, \;\; \dot{x} = u, \;\; x(R) = 0;$$

$\mu > 0$, $\tau > 0$, $c > 0$, $R > 0$ — фиксированные параметры.

18. Показать, что существует такая простейшая задача вариационного исчисления, для которой 0 является точкой глобального минимума, при этом усиленное условие Лежандра не выполнено и условие Якоби не выполнено.

19. Рассмотрим задачу $\int\limits_0^{\pi} (\dot{x}^2 - x^2 - x^4)\,dt \to \inf$, $x(0) = x(\pi) = 0$. Показать, что для $\hat{x} = 0$ выполнено усиленное условие Лежандра, условие Якоби, при этом $\hat{x}$ не является точкой слабого минимума.

20. Показать, что если L явно зависит только от $\dot{x}$, то для допустимой экстремали в простейшей задаче вариационного исчисления условие Вейерштрасса является достаточным условием сильного минимума.

21. Показать, что геодезические на плоскости Лобачевского (полуокружности с центром на оси абсцисс) являются точками сильного минимума в соответствующей простейшей задаче вариационного исчисления.