IV ОЛИМПИАДА
по "экстремальным задачам"
11 апреля 2013 г.

Дипломы
Диплом I степени

—

Диплом II степени
Почеревин Роман 207 гр.
Крохмаль Николай 111 гр.
Диплом III степени
Салиев Шоди 309 гр.
Похвальная Грамота
Жуков Георгий 207 гр.
Адамов Арсений 105 гр.(ВМК)
Волобуев Алексей 306 гр.

Результаты

1. Почеревин Роман 207 гр. 23 балла (10 5 8 0 0)
2. Крохмаль Николай 111 гр. 22 балла (10 5 5 0 2)
3. Салиев Шоди 309 гр. 20 баллов (8 5 7 0 0)
4. Жуков Георгий 207 гр. 16 баллов (10 6 5 0 0)
5-6.Адамов Арсений 105 гр.(ВМК) 15 баллов (10 5 0 0 0)
Волобуев Алексей 306 гр. 15 баллов (10 5 0 0 0)
7. Косинов Никита 112 гр. 10 балла (0 5 5 0 0)
8. Богачев Николай 403 гр. 8 баллов (0 6 2 0 0)

Задача 1. Даны угол и точка внутри него. Провести отрезок с концами на сторонах угла, проходящий через эту точку так, чтобы полученный треугольник имел минимальную площадь.(М.Заплетин)

Задача 2. Существует ли многочлен

a) одного действительного переменного,

b) двух действительных переменных, который неотрицателен при всех значениях аргумента и не имеет локальных минимумов.(В. Протасов)

Задача 3. Пусть непрерывные кусочно-гладкие функции $x(t)$ и $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

в точках гладкости $x(t)$ и $y(t)$. Функция $u(t)$ кусочно-непрерывна и должна в любой момент времени t удовлетворять условию $y(t)u(t) = \quad |y(t)|$.

a) Существует ли решение системы, при котором $y(t) = const$? Если да, то найти все такие решения.

b) Построить фазовый портрет на плоскости (x, y) и описать все решения системы, в которых функция $u(t)$ имеет две точки разрыва.(Л. Локуциевский)

Задача 4. *(точка Торичелли-Штейнера в метрике $C[0,1]$).* В пространстве $C[0,1]$ дан треугольник с вершинами $f_1 f_2 f_3$, где $f_1(x) \quad = x$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = \sin 2x$. Для какой точки $f \in C[0,1]$ сумма расстояний до вершин треугольника – наименьшая ? Расстояние между точками f и g в пространстве $C[0,1]$ определяется как $\|f - g\| = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$.(В. Протасов)

Задача 5. Пусть

$$1 < p, \quad q < \infty, \quad r \in \mathbb{N}, \quad r \geqslant 2, \quad \varkappa = \frac{1}{r + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}}.$$

Доказать, что найдется значение $C(p, q, r) > 0$, такое что для любой функции $f \in C^r[0, 1]$, такой что $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(r-1)}(0) = 0$ и для любой возрастающей функции $g : [0, 1) \to (0, \infty)$ справедливо неравенство

$$\left(\int\limits_0^1 |f(t)|^q \, dt \right)^{1/q} \leqslant C(p, q, r) \left(\int\limits_0^1 |g(t)|^{\varkappa} \, dt \right)^{1/\varkappa} \left(\int\limits_0^1 \left| \frac{f^{(r)}(t)}{g(t)} \right|^p dt \right)^{1/p}.$$

(А. Васильева)

Результаты и награждение победителей — 18 апреля (четверг) в 14-00 ауд. 13-14 (кафедра общих проблем управления).

Ответы и Решения

Задача 1.

Решение. Пусть M заданная точка внутри угла AOB. Точки C и D лежат на сторонах угла, $M \in [CD]$. Проведем прямую через точку M паралельную OA. F -точка пересечения этой примой с OB. Пусть длина OF равна a, а длина FD - x. Тогда искомая площадь:

$$S(x) = k\frac{(x+a)^2}{x} \longrightarrow inf \;\; x \geqslant 0$$

$$S' = 0 \Rightarrow \;\; x = a$$

В силу единственности $x = a$ - точка абсолютного минимума. **Ответ.** Отрезок $[CD]$ делится точкой M пополам.

Задача 2.

Решение. а) Ответ: нет. Если $p(x) \geqslant 0$ при всех x, то p имеет четную степень и положительный старший коэффициент, поэтому $p(x) \to +\infty$ при $x \to \infty$. Следовательно, при достаточно большом N минимум многочлена p на отрезке $[-N, N]$ достигается в его внутренней точке, которая является точкой локального минимумума. б) Ответ: да. Пример: $p(x, y) = x^2 + (1 + xy)^2$. Градиент обращается в ноль в единственной точке $(x, y) = (0, 0)$, которая не является локальным минимумом, поскольку $t(t, -t) < f(0, 0)$ при любом $t \in (-1, 1)$.

Задача 3.

Решение. (а) Если $y(t) \equiv y_0$ при всех t, то $\dot{y} = 0$. Значит $x + y = 0$. То есть $x(t) \equiv -y_0$. Следовательно, $\dot{x} = 0$ и $u(t) \equiv -y_0$. Отсюда немедленно получаем, что $y(t)u(t) \equiv -y_0^2$. Поэтому $|y_0| = -y_0^2$, что возможно, только при $y_0 = 0$. Если $y_0 = 0$, то получаем единственное решение $x(t) = y(t) = u(t) \equiv 0$, удовлетворяющее условию $y(t) = const$.

(b) Очевидно, что $u(t) = 1$, если $y(t) > 0$ и $u(t) = -1$, если $y(t) < 0$. Поэтому система может быть явно решена в верхней и нижней полуплоскостях: необходимо найти нули правой части, и разобраться, что в каждом из них – седло. Другой способ (эквивалентный конечно, но более простой с точки зрения выкладок) такой: вместо этого можно сделать замену $z = x+y$. Тогда исходная система перепишется в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = z; \\ \dot{z} = y + u. \end{array} \right.$$

Поскольку $u = const$ в областях $y > 0$ и $y < 0$, то в этой системе напрашивается замена $w = y + u$. Получаем

$$\begin{cases} \dot{z} = w; \\ \dot{w} = z. \end{cases}$$

Фазовый портрет - это седло, состоящее из семейства гипербол $z^2 - w^2 = const$. Теперь осталось перейти на плоскость (x, y). Если $y > 0$, то $(x + y)^2 - (y + 1)^2 = const$, или $(x - 1)(2x + y + 1) = const$ – семейство гипербол. Если $y < 0$, то всю картину надо отразить относительно начала координат, и $(x + 1)(2x + y - 1) = const$.

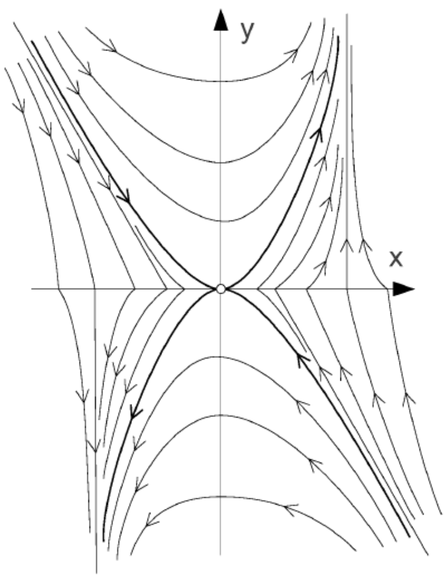

Рис. 1: Фазовый портрет.

Исследуем точки разрыва функции $u(t)$. разрыв очевидно возможен только при $y = 0$. Тут возможны два варианта.

(i) Если траектория пересекает ось Ox в точке $x \neq 0$, то она обязана проткнуть ось Ox (по пункту (a)) и функция $u(t)$ имеет ровно одну точку разрыва.

(ii) С началом координат ситуация следующая: траектория может прийти в точку $x = y = 0$ по одной из ветвей гипербол с $u = \pm 1$, простоять в начале координат любое время с $u = 0$ и уйти по одной ветвей гипербол с $u = \pm 1$ (с независимым знаком). Это и есть все решения, в которых $u(t)$ имеет две точки разрыва.

Задача 4.

Ответ. $f(x) = x + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12} + \frac{\sin 2 - 1}{2}$. Наименьшая сумма расстояний равна $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12} - \frac{\sin 2}{2} + \frac{3}{2}$.

Решение. Сделаем параллельный перенос: прибавим к каждой вершине треугольника вектор $g(x) = -x$. Получим треугольник с вершинами $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 1$, $\varphi_3(x) = \sin 2x - x$. Так как расстояния при параллельном переносе не меняются, достаточно решить задачу для треугольника $\varphi_1\varphi_2\varphi_3$. Для произвольной функции $\varphi \in C[0, 1]$ обозначим через x_1 и x_2 точки ее максимума и минимума (на отрезке $[0, 1]$) соответственно, а через a – разность между максимальным и минимальным значением. Тогда $\|\varphi - \varphi_1\| + \|\varphi - \varphi_2\| \geqslant$

$$|\varphi(x_1) - \varphi_1(x_1)| + |\varphi(x_2) - \varphi_2(x_2)| = |\varphi(x_1)| + |\varphi(x_2) - 1| =$$

$$= |\varphi(x_1)| + |\varphi(x_1) - a - 1| \geqslant 1 + a\,.$$

Максимум функции φ_3 на отрезке $[0,1]$ достигается в точке $\frac{\pi}{6}$ и равен $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$, а минимум – в точке 1 и равен $\sin 2-1$. Разность между максимумом и минимумом равна $b=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}-\sin 2+1$, и $\|\varphi-\varphi_3\|\geqslant\frac{b-a}{2}$. Следовательно, $\sum_{k=1}^{3}\|\varphi-\varphi_k\|\geqslant 1+a+\frac{b-a}{2}\geqslant 1+\frac{b}{2}$. Равенство достигается, если $a=0$, т.е., φ – тождественная константа, и $\|\varphi-\varphi_3\|=\frac{b}{2}$, а значит φ – полусумма максимума и минимума функции φ_3. Таким образом, $\varphi(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}+\frac{\sin 2-1}{2}$ – единственная точка минимума, и $f(x)=x+\varphi(x)$.

Задача 5.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\left(\int\limits_0^1\left|\int\limits_0^t(t-s)^{r-1}g(s)\varphi(s)\,ds\right|^q\,dt\right)^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant\tilde{C}(p,\,q,\,r)\left(\int\limits_0^1|g(t)|^{\varkappa}\,dt\right)^{1/\varkappa}\left(\int\limits_0^1|\varphi(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Заметим, что $\varkappa\leqslant 1$. Из неравенства Минковского следует, что левая часть выпукла по g, из обратного неравенства Минковского следует, что правая часть вогнута по g. Значит, функция

$$\Phi(g)=\left(\int\limits_0^1\left|\int\limits_0^t(t-s)^{r-1}g(s)\varphi(s)\,ds\right|^q\,dt\right)^{1/q}-$$

$$-\tilde{C}(p,\,q,\,r)\left(\int\limits_0^1|g(t)|^{\varkappa}\,dt\right)^{1/\varkappa}\left(\int\limits_0^1|\varphi(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

выпукла по g. Легко проверить, что найдется $\tilde{C}(p,\,q,\,r)>0$ такое, что для любого $\tau\in(0,\,1)$ выполнено $\Phi(\chi_{[\tau,\,1]})\leqslant 0$. Пусть g — кусочно-постоянная возрастающая функция. Тогда $g=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{[\tau_i,\,1]}$, $0<\tau_i<1$, $\alpha_i\geqslant 0$. В силу однородности Φ, достаточно доказать неравенство $\Phi(g)\leqslant 0$ для случая $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, а это следует из выпуклости Φ. Если g — произвольная возрастающая функция, то утверждение доказывается предельным переходом.