I ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА
по «экстремальным задачам»
для студентов высших учебных заведений

1. Как нужно поставить парус, чтобы максимально быстро двигаться в северном направлении при постоянном ветре с севера? Считать парус плоским, а движение корабля параллельным линии киля.

2. Найти точку максимума на отрезке $[0;8]$ решения уравнения

$$\ddot{x}(t) - t x(t) = 0$$

с начальными условиями $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 1$ (здесь и далее $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$). Показать, что максимальное значение больше 2015.

3. Доказать, что при любом $T \in (0, \pi)$ неравенство

$$\operatorname{ctg} T \cdot x^2(0) \ + \int_0^T x^2(t)\,dt \ \le \ \int_0^T \dot{x}^2(t)\,dt$$

справедливо для любой функции $x(\cdot) \in W_2^1[0,T]$ с условием $x(T) = 0$.

4. Плоскость x, y разделена кривой $y = \frac{1}{2} b\, x^2$ на две зоны. Скорость света в верхней зоне равна c_1 , а в нижней c_2 . Свет идет из точки $(0,\ a_1)$ в точку $(0,\ -a_2)$ (оба $a_1,\ a_2 > 0$) по двум отрезкам, преломляясь в некоторой точке (x, y) на указанной кривой. Описать все наборы $a_1,\ a_2,\ c_1,\ c_2,\ b$, при которых точка $(x_0,\ y_0) = (0, 0)$ дает локальный минимум времени движения света.

5. Найдите многогранник наибольшего объема, имеющий 5 вершин и лежащий в единичном кубе.

6. Показать, что для любой функции $u(\cdot) \in L_2[0,\infty)$ решение уравнения

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \qquad \text{с начальным условием} \qquad x(0) = 0$$

также принадлежит $L_2[0,\infty)$. Таким образом, определен линейный оператор $u \mapsto x$ из пространства $L_2[0,\infty)$ в себя. Найти его норму и спектр.

Решения (например, фото рукописного текста) присылать на адрес кафедры ОПУ:

msu.opu@gmail.com

до **26 апреля 2015 г.**

http://new.math.msu.su/department/opu/

Кафедра ОПУ механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова

8 апреля 2015 г.