

О кафедре ОПУ

Сама идея создания кафедры по приложениям математики к проблемам управления была высказана выдающимся математиком И.М.Гельфандом ректору МГУ академику И.Г.Петровскому. Кафедра общих проблем управления (ОПУ) была создана 31 марта 1966 года по инициативе ректора. На правах «внештатного заведующего» кафедру возглавил академик Вадим Александрович Трапезников. В дальнейшем фактическое руководство кафедрой ОПУ осуществлялось профессором Сергеем Васильевичем Фоминым. Основной кафедральный курс "Вариационное исчисление и оптимальное управление", читается студентам мехмата на 4 году обучения, и очень важен при подготовке современного математика. Сотрудники кафедры читают также лекции и ведут семинарские занятия и по другим разделам математики. С 1989 по 2011 годы кафедрой ОПУ руководил профессор В.М. Тихомиров. С 2011 г. по настоящее время кафедру возглавляет профессор А.В. Фурсиков.

На кафедре работают десять профессоров, шесть доцентов, два ассистента, в том числе профессор В.М. Тихомиров – один из основателей общей теории экстремума и современной теории приближений, член-корр. РАН М.И.Зеликин - специалист в области вариационного исчисления и оптимального управления, член-корр. РАН В.Ю. Протасов - специалист по теории функций, выпуклой геометрии и алгоритмам выпуклой оптимизации. Долгие годы работал на кафедре и академик РАН С.В. Конягин, получивший выдающиеся результаты в разных разделах анализа, комбинаторики, теории чисел.

Научно-исследовательская работа на кафедре проводится по следующим направлениям: оптимальное управление, теория экстремальных задач, выпуклый анализ, теория аппроксимации, теория управления системами с распределенными параметрами, прикладные задачи течения жидкости и газа, оптимизация и численные методы в дифференциальных уравнениях, устойчивость динамических систем, алгоритмы численной оптимизации, оптимизация динамики космических полетов, восстановление функций по неточно заданной информации, дифференциальные игры и др.

Одним из центральных направлений исследований на кафедре является общая теория экстремума, включающая в себя вариационное исчисление и оптимальное управление. Практическое применение задач оптимального управления огромно, и здесь неважно, сможем ли мы сгенерировать устраивающую нас траекторию с помощью какого-то управления или как угодно близко приблизиться к ней генерируемыми траекториями. Оказывается, что основной инструмент исследования задач оптимального управления - принцип максимума Понтрягина - можно обобщить на траектории, хорошо приближаемые генерируемыми. С понятием оптимальности тесно связано двойственное к нему понятие управляемости системы, с которым, в свою очередь, тесно связаны вопросы возмущения задач оптимального управления. В этом круге вопросов большое число нерешенных проблем как теоретического, так и прикладного характера.

Примером классической задачи естествознания, исследуемой методами вариационного исчисления и оптимального управления, является задача о форме выпуклого тела, имеющего минимальное сопротивление при движении в разреженном газе, которая была поставлена и решена Ньютоном для выпуклых тел вращения. Решение, найденное Ньютоном, имеет очень интересную особенность -- оно имеет плоский тупой нос, а боковая поверхность подходит к нему под углом в 45 градусов (подобную форму имеет пуля для пистолета Макарова, и это не случайно). На протяжении трех веков считалось, что найденное Ньютоном решение оптимально в классе всех выпуклых тел. Однако в конце XX в. выяснилось, что это не так: в 1995 Guasoni и Buttazzo построили не осесимметричное выпуклое тело с меньшим сопротивлением. Таким образом, оптимальное выпуклое тело не может быть телом вращения! Действительно, среди тел вращения оптимально найденное Ньютоном, но форма, предложенная Guasoni и Buttazzo, заведомо лучше (хотя тоже не является оптимальной). Вопрос о точной форме тела наименьшего сопротивления имеет и большой прикладное значение, так как сопротивление на гиперзвуковых скоростях (например, для спускаемых космических аппаратов) в плотных слоях атмосферы задается именно функционалом Ньютона. Несмотря на то, что точная форма до сих пор неизвестна, на кафедре в последние годы получено существенное продвижение - удалось аналитически найти форму, очень близкую к оптимальной (отличие в сопротивлении меньше 1%).

На кафедре активно исследуются различные задачи управления системами с распределенными параметрами, например задачи управления, связанные с течением жидкости и газа. Помимо задач оптимального управления, похожих на задачу Ньютона, приведенную выше, здесь имеется много задач управления другого типа, таких как задачи точной и аппроксимативной управляемости, а также задачи стабилизации решения динамической системы посредством управления с обратной связью. Последний тип задач особенно интересен в силу их важности для приложений.

Косвенно задачи управления возникают в численных методах. Например, задача обтекания тела внешним потоком, в виду наличия сил трения за счет вязкости, описывается сложными уравнениями с частными производными. Поскольку расчет такого движения является вычислительно сложным и порождает ошибки вычислений, то задача управления заключается в контроле величин этих ошибок, чтобы они не выходили за допустимые ограничения, делая расчет параметров движения устойчивым.

Задача устойчивости управляемой линейной динамической системы берет начало с 1980-х годов с фундаментальных работ Молчанова и Пятницкого. Сейчас она активно исследуется в литературе и имеет массу приложений для электрических схем, компьютерных процессоров, в робототехнике, математической экологии, социологии, и т.д. Достаточно сказать, что одним из приложений является знаменитая модель Леонтьева эффективности экономики. Несмотря на прикладной характер задачи, при ее решении используются глубокие математические результаты, например, из геометрии выпуклых тел и многогранников и из теории неподвижных точек непрерывных преобразований. Более того известные критерии устойчивости тесно связаны с другими математическими дисциплинами: комбинаторикой, теорией чисел, теорией вероятностей. В настоящее время

для систем небольшого числа переменных (до 20) известны критерии, которые эффективно проверяют на компьютере устойчивость системы. На практике, однако, встречаются системы со 1000 и более переменными.

Научные интересы многих сотрудников кафедры связаны с теорией приближений. В наше время активно развивается многомерная теория аппроксимации. Подобные исследования важны в самых разных областях науки и технологий; в том числе, в приложениях, связанных с обработкой больших данных. Кроме того, они весьма полезны и для развития самой математики: благодаря им активно используются и создаются самые современные методы теории вероятностей, функционального анализа, выпуклой геометрии, комбинаторики, алгебры. Упомянем, например, такие задачи, как построение детерминированных матриц измерений в теории Compressed sensing, или проблематику восстановления функций большого числа переменных по неточным измерениям.

Научное направление кафедры находит свое применение во многих жизненных сферах. Часть сотрудников, студентов и аспирантов кафедры работает в созданной на механико-математическом факультете в 2018 году лаборатории "Многомерная аппроксимация и приложения". Помимо академической и научно-исследовательской работы в математических ВУЗах и институтах, полученные на кафедре знания студенты применяют на практике, работая в ведущих исследовательских институтах, занимаясь аналитической работой в крупнейших IT-корпорациях и финансовых учреждениях, осваивая самые современные IT направления.

Основные направления исследований и возможные темы курсовых работ.

«Общая теория экстремума. Экстремальные задачи классического анализа»

Профессора Е.Р.Аваков, Э.М.Галеев, Г.Г.Магарил-Ильев, К.Ю.Осипенко, В.М. Тихомиров, доценты В.Б.Демидович, А.С. Кочуров, К.С. Рютин

Решение экстремальных задач различного вида: конечномерных и бесконечномерных задач с ограничениями типа равенств и неравенств, задач вариационного исчисления, оптимального управления. Применение условий 2-ого порядка экстремума при решении экстремальных задач. В качестве иллюстрации можно привести задачу о нахождении расстояния от точки до конуса, образованного пересечением полупространств.

Ещё одна экстремальная задача: найти максимум модуля полинома заданной степени в данной точке на комплексной плоскости, зная что на отрезке $[-1,1]$, он ограничен по модулю 1.

«Теория оптимального управления, геометрические методы»

чл.-корр. РАН М.И.Зеликин, проф. Л.В.Локуциевский

Хорошей иллюстрацией задач этого направления может служить аэродинамическая задача Ньютона, о которой шла речь в вводной части. Основной упор делается на связь геометрии и анализа в задачах оптимального управления. Одно из возможных направлений для курсовых – задачи связанные выпуклой тригонометрией.

«Управление распределенными системами, обратные задачи для уравнения в частных производных, приложения»

Профессора А.С.Демидов, А.В.Фурсиков, доц. А.В. Горшков, асс. Л.С. Осипова

Примером такой задачи управления является стабилизация стационарного движения тела (самолета) в воздушном пространстве. Из-за разных случайных флуктуаций заданное движение подвергается искажениям, и поэтому корректируется с помощью управления, которое задается изменением скорости обтекающего потока на некотором подмножестве границы тела. Указанная ситуация может быть смоделирована рядом математических задач управления.

«Теория аппроксимации: поперечники, теоремы вложения»

Профессора Э.М.Галеев, В.М.Тихомиров, доценты А.А.Васильева, А.С. Кочуров, К.С. Рютин

Приближение конечномерных множеств и классов функций ортопроекторами, проекторами, ядерными операторами, линейными подпространствами, оператором Фурье. Теория наилучших приближений, поперечники. Вложения конечномерных множеств и классов функций. Например, изучаются задачи о приближении классов функций на одномерных и многомерных областях (эти классы задаются в помощью ограничений на производные различных порядков).

«Теория восстановления, многомерные аппроксимации, сжатые измерения»

Профессора В.М.Тихомиров Г.Г.Магарил-Ильяев, К.Ю.Осипенко, доц. К.С. Рютин

Задачи восстановления имеют важное значение как для развития математики так и для приложений. Обычно, такого типа задача устроена так: для неизвестной функции из заданного класса, по определенным измерениям, восстановить наилучшим образом, скажем, значение в заданной точке.

Задача сжатых измерений (восстановление целочисленного вектора по малому числу измерений) обсуждалась в вводной части.

«Исследование специальных систем функций (вейвлетов), спектральный радиус операторов, некоторые задачи линейной алгебры и их приложения»

Эти исследования активно проводятся чл.-корр. РАН В.Ю. Протасовым. Область, находится на стыке нескольких математических дисциплин (гармонический анализ, выпуклая геометрия, линейная алгебра, комбинаторика) и имеет многочисленные приложения в разных областях (скажем, хранение и передача информации, работа с изображениями).

«Численные методы и алгоритмы решения экстремальных задач»

Чл.-корр. РАН В.Ю. Протасов, доц. М.П. Заплетин.

Исследуются общие алгоритмы выпуклой оптимизации и их приложения к решению конкретных задач. Кроме того, важным направлением деятельности является исследование динамики космических полетов и различные задачи управления, возникающие в этой области.

«Управляемость, оптимальность, возмущение и аномальность в задачах оптимального управления»

Профессора Е.Р.Аваков, Г.Г.Магарил-Ильяев.

«Математические методы в задачах экономики»

Доценты В.Б. Демидович, А.С.Кочуров, А.В. Горшков, К.С. Рютин руководят курсовыми и дипломными работами по этой тематике

«Теория особенностей и её приложения»

Ассистент Е. А. Асташов.

На кафедре начинает развиваться новое направление: классификация комплексно-аналитических функций и отображений, обладающих заданными свойствами (например, свойством инвариантности относительно действия конечной группы), с точностью до различных отношений эквивалентности. Такие задачи находятся на стыке нескольких областей математики — алгебры, анализа, топологии, а полученные результаты полезны в дифференциальной геометрии и теории дифференциальных уравнений, а также при решении прикладных задач, например, распознавания образов.