Саратовский национальный исследовательский
государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского

Дудов Сергей Иванович, Осипцев Михаил Анатольевич

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ ЗАДАЧ ПО ШАРОВЫМ ОЦЕНКАМ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ

Семинар «Геометрическая теория оптимального управления»

24 ноября 2022

Введение

Цель доклада — дать систематизацию некоторого класса задач по оценке впуклого компакта шаром некоторой нормы.

Эта систематизация будет дана на основе специальной «канонической» задачи с параметром.

Будет показано, что в зависимости от значения параметра решения этой канонической задачи выражают решения той или иной задачи из указанного класса задач.

Для некоторых известных задач будут указаны диапазоны значений параметра, в которых каноническая задача выражает их решения. Это позволит расположить задачи в порядке возрастания параметра.

План доклада

1. Функции расстояния.
2. Примеры постановок задач по оценке выпуклого компакта шаром.
3. Общая форма постановок задач.
4. Каноническая задача с параметром. Теорема о параметризации задач.
5. Вложение решений задач в параметрическую шкалу. Сводная таблица..
6. Свойства решения канонической задачи.
7. Примеры.

1. Функция расстояния

Постановки рассматриваемых задач используют следующие функции расстояния.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^p$ — оцениваемый выпуклый компакт,

$n(x)$ — норма на $\mathbb{R}^p$, $\qquad \Omega = \overline{\mathbb{R}^p} \setminus D$.

1) $$R(x, D) = \max_{y \in D} n(x - y)$$

— расстояние от x до наиболее удаленной точки из D.

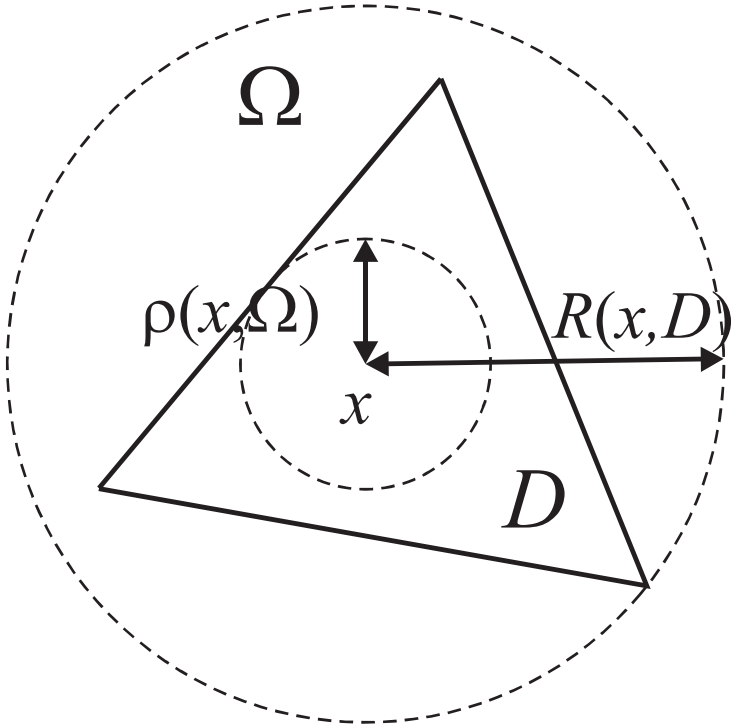
2) $$\rho(x, \Omega) = \min_{y \in \Omega} n(x - y)$$

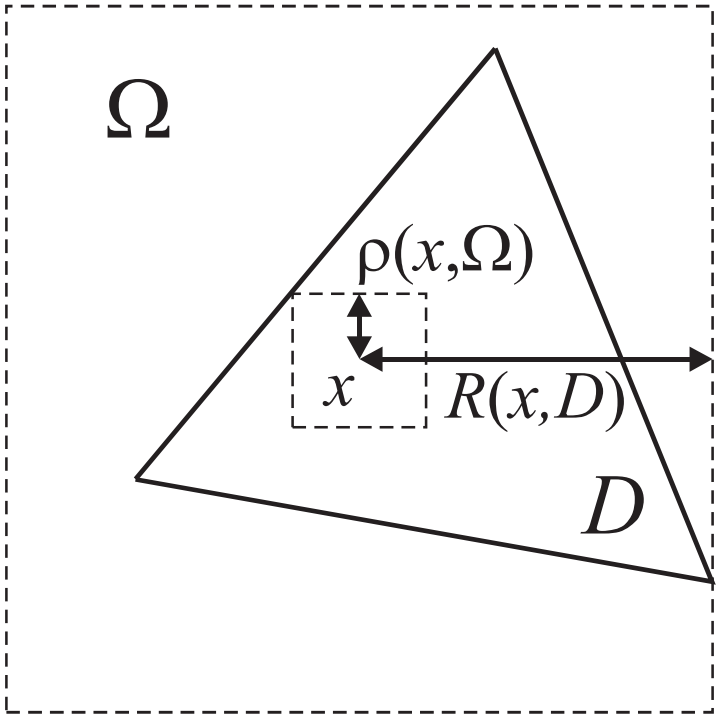
— расстояние от x до ближайшей точки из Ω.

4) $$P(x, D) = \rho(x, D) - \rho(x, \Omega)$$

— расстояние от x до границы D, причем, если $x \in D$, то со знаком минус.

$R(x, D)$, $\rho(x, D)$, $P(x, D)$ — выпуклые функции на $\mathbb{R}^p$, $\rho(x, \Omega)$ — вогнутая функция на D.





$p=2$

$n(\cdot)$ – евклидова норма

$p=2$

$n(x)=\max\limits_{i=1,2}|x^{(i)}|$ –

– чебышевская норма

2. Примеры постановок задач по оценке выпуклого компакта шаром

1) Задача <u>о внешней оценке</u>
(задача о чебышевском центре):

$$R(x, D) \equiv \max_{y \in D} n(x - y) \to \min_{x \in \mathbb{R}^p} \tag{1}$$

— требует построения шара наименьшего радиуса, содержащего компакт D.

Обозначения:

$$R^* = \min_{x \in \mathbb{R}^p} R(x, D), \quad C_R = \operatorname{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^p} R(x, D).$$

2) Задача <u>о внутренней оценке</u>
(задача о вписанном шаре):

$$\rho(x,\Omega) \equiv \min_{y\in\Omega} n(x-y) \to \max_{x\in D}, \tag{2}$$

$$\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D},$$

— означает построение шара наибольшего радиуса, содержащегося в D.

Обозначения:

$$\rho^* = \max_{x\in D} \rho(x,\Omega), \quad C_\rho = \operatorname{Arg}\max_{x\in D} \rho(x,\Omega).$$

3) Задача <u>о шаровой оболочке наименьшей толщины</u> для границы выпуклого тела D:

$$\Phi(x, D) \equiv R(x, D) - \rho(x, \Omega) \to \min_{x \in D}, \tag{3}$$

$$C_\Phi = \operatorname{Arg} \min_{x \in D} \Phi(x, D).$$

$n(\cdot)$ —евклидова норма: M.D'Ocagne (1884), H. Lebesgue (1921), T. Bonnesen (1923), N. Kritikos (1927),. . . , I. Barany (1988).

$n(\cdot)$ — произвольная норма: С. И. Дудов (2001).

4) Задача о равномерной оценке (наилучшем приближении) выпуклого компакта D шаром нормы $n(\cdot)$ в метрике Хаусдорфа:

$$\varphi(x,r) \equiv h(D, Bn(x,r)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p,\, r\geq 0}, \tag{4}$$

где $Bn(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x-y) \leq r\}$,

$$h(A,B) = \max\Big\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} n(a-b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} n(a-b)\Big\}.$$

$n(\cdot)$ — евклидова норма: М. Никольский – Д. Силин (1995),
$n(\cdot)$ — произвольная норма: С. Дудов – И. Златорунская (2000).

$$C_\varphi = \{y \in \mathbb{R}^p :\ \exists\, \hat{r} \geq 0,\ \varphi(y,\hat{r}) = \min_{x\in\mathbb{R}^p,\, r\geq 0} \varphi(x,r)\}.$$

Доказано, что

$$C_\Phi = C_\varphi \cap D.$$

5) Задача об асферичности выпуклого тела D:

$$\psi(x) \equiv \frac{R(x, D)}{\rho(x, \Omega)} \to \min_{x \in D} . \tag{5}$$

С. Дудов, Е. Мещерякова (2010–2012).

$\psi(x)$ — квазивыпуклая на D функция.

$$C_\psi = Arg \min_{x \in D} \psi(x).$$

6) Задача о шаровой оболочке наименьшего объема для границы выпуклого тела

$$D) \equiv R^p(x, D) - \rho^p(x, \Omega) \to \min_{x \in D}, \tag{6}$$

$$C_\varkappa = \operatorname{Arg} \min \varkappa(x, D).$$

3. Общая форма постановок задач

Все приведенные задачи имеют следующую общую форму

$$f(x, D) \equiv F(R(x, D), P(x, D)) \to \min_{x \in S}, \tag{7}$$

где $S \in \{\mathbb{R}^p, D\}$, $F(t_1, t_2)$ — неубывающая функция по $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 \in \mathbb{R}$ (или по $t_2 \in R_-$ если $S = D$) и возрастающая хотя бы по одной из переменных.

Эти условия вместе с формой (7) определяют некоторый класс задач оценочного характера.

4. Каноническая задача с параметром. Теорема о параметризации

Решение любой задачи из указанного класса может быть выражено решением следующей задачи:

$$\varphi(x,r) \equiv \max\{R(x,D) - r, P(x,D) + r\} \to \min_{x \in \mathbb{R}^p} \qquad (8)$$

при некотором значении параметра r.

Известно, что

$$h(D, Bn(x,r)) = \max\{R(x,D) - r, P(x,D) + r\}.$$

Таким образом, (8) — задача о наилучшем приближении в метрике Хаусдорфа выпуклого компакта D шаром фиксированного радиуса r.

Общая форма постановок задач:

$$f(x, D) \equiv F(R(x, D), P(x, D)) \to \min_{x \in S}, \tag{7}$$

$$C_f = \operatorname{Arg} \min_{x \in S} f(x, D).$$

Каноническая задача с параметром r:

$$\varphi(x, r) \equiv \max\{R(x, D) - r, P(x, D) + r\} \to \min_{x \in \mathbb{R}^p}, \tag{8}$$

$$C_\varphi(r) = \operatorname{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^p} \varphi(x, r).$$

Теорема. Пусть $S \in \{\mathbb{R}^p, D\}$ и функция $F(t_1, t_2)$ не убывающая по $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 \in \mathbb{R}$ (или по $t_2 \in \mathbb{R}_-$, если $S = D$) и возрастающая хотя бы по одной из переменных.

Тогда если $x^* \in C_f$, то $x^* \in C_\varphi(r)$ для

$$r = (R(x^*, D) - P(x^*, D))/2.$$

Это дает возможность систематизировать задачи с помощью параметра r.

5. Вложение задач в параметрическую шкалу. Сводная таблица

Используя решение задачи о внешней оценке

$$R^* = \min_{x \in \mathbb{R}^p} R(x, D), \quad C_R = \operatorname{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^p} R(x, D).$$

и решение задачи о внутренней оценке

$$\rho^* = \max_{x \in D} \rho(x, \Omega), \quad C_\rho = \operatorname{Arg} \max_{x \in D} \rho(x, \Omega).$$

Вводим обозначения:

$$R^\pm = \max_{x \in C_\rho} (\min) R(x, D), \quad P^\pm = \max_{x \in C_R} (\min) P(x), \tag{9}$$

$$r_R^\pm = (R^* - P^\mp)/2, \quad r_P^\pm = (R^\pm + \rho^*)/2. \tag{10}$$

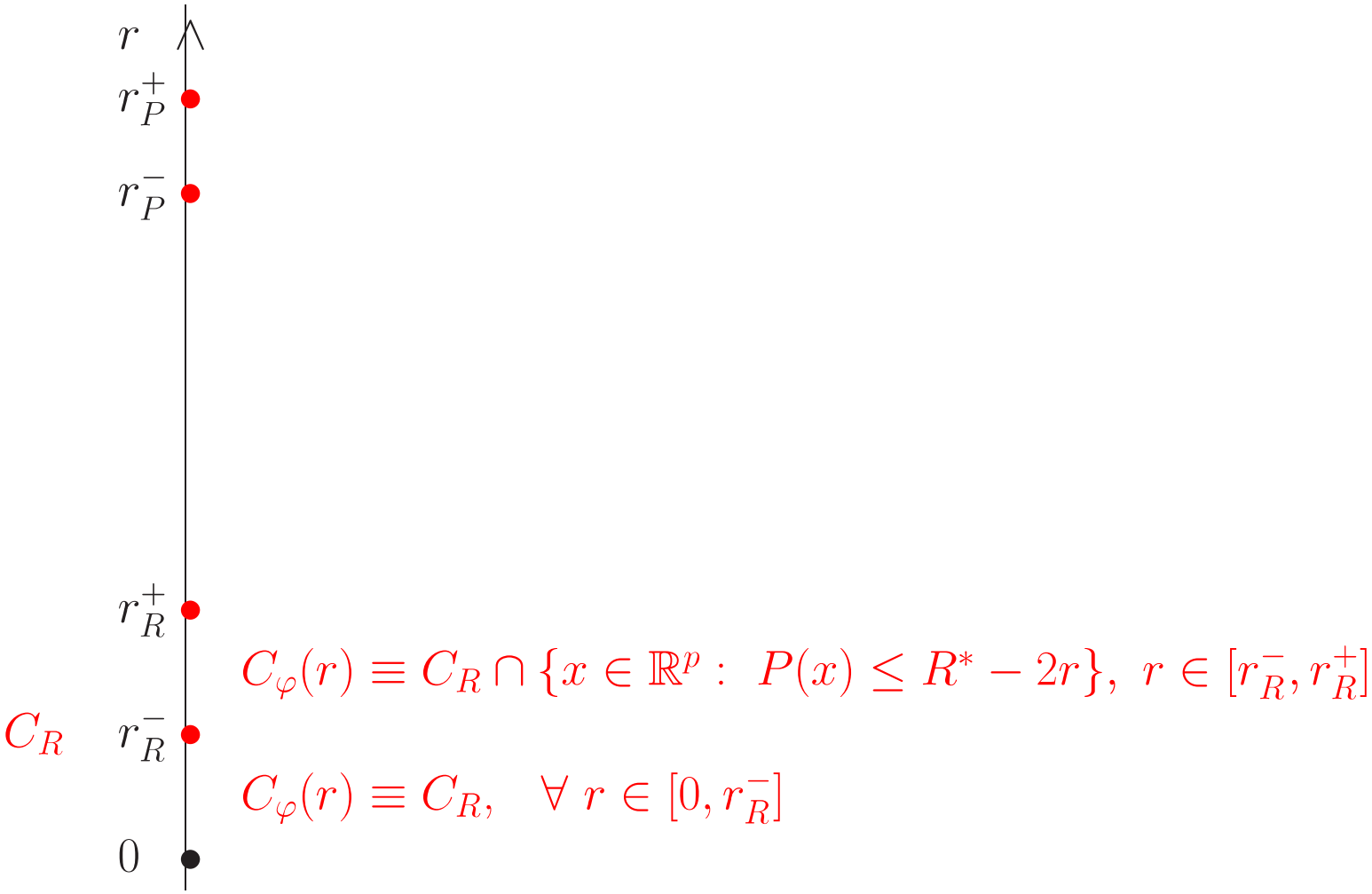
Поскольку $R(x,D) \geq P(x,D)$, то из (9)–(10) вытекает

$$0 \leq r_R^- \leq r_R^+ \leq r_P^- \leq r_P^+ < \infty. \tag{11}$$

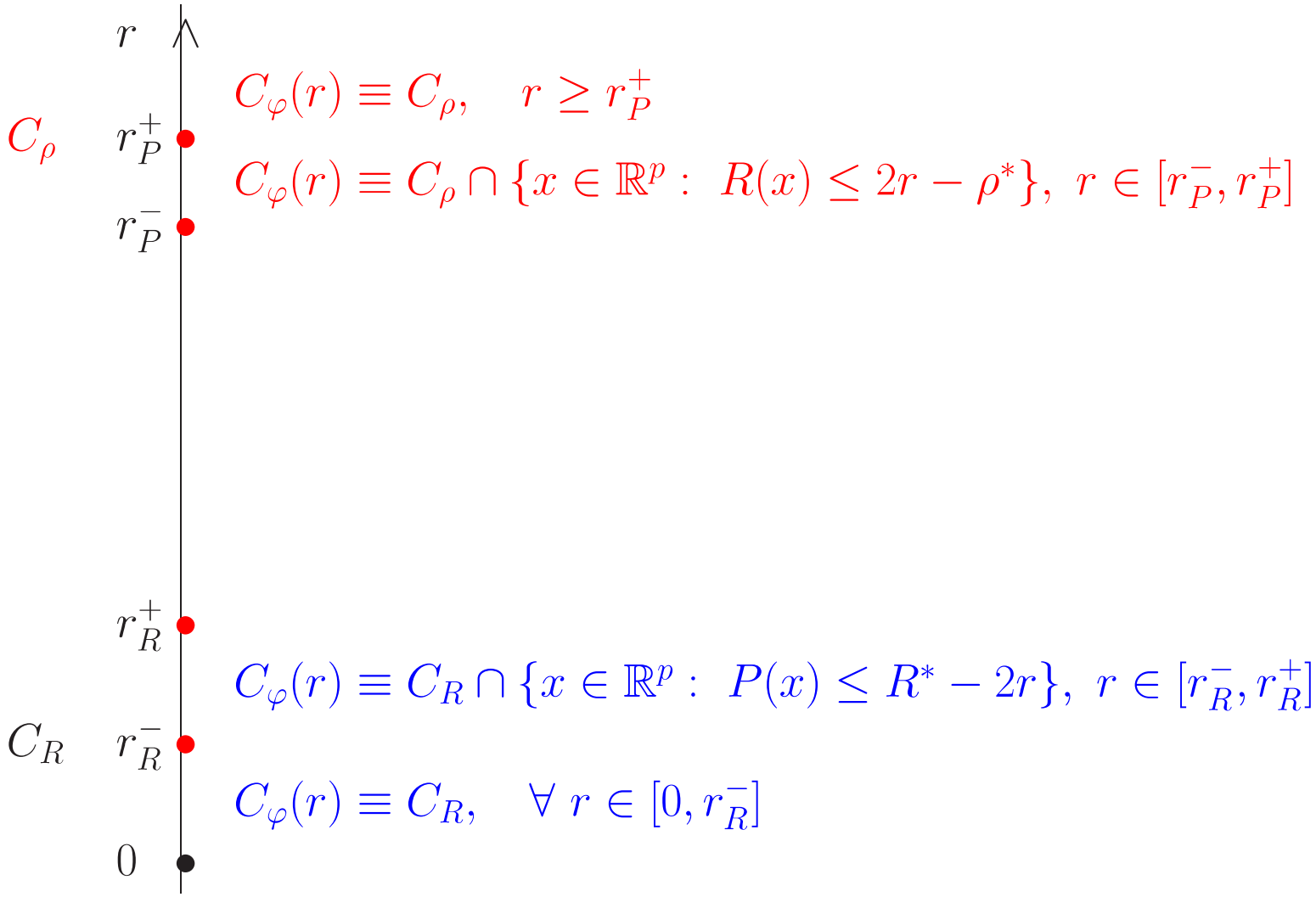
Доказано

$$r_R^+ = r_P^- \quad \Leftrightarrow \quad C_R \cap C_\rho \neq \emptyset, \tag{12}$$

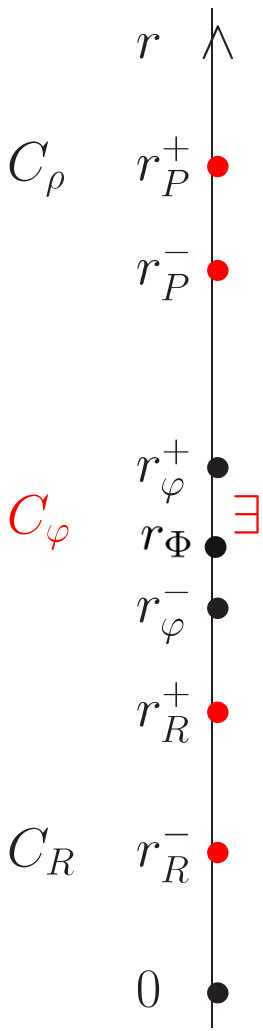
$$\begin{aligned} C_R \cap C_\rho \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad C_\varphi = C_\Phi = C_\psi = \\ = C_{\varkappa} = C_\varphi((R^* + \rho^*)/2) = C_R \cap C_\rho. \end{aligned} \tag{13}$$



$$C_R \cap C_\rho = \emptyset$$



$$C_R \cap C_\rho = \emptyset$$



$$C_\varphi(r) \equiv C_\rho, \quad r \geq r_P^+$$

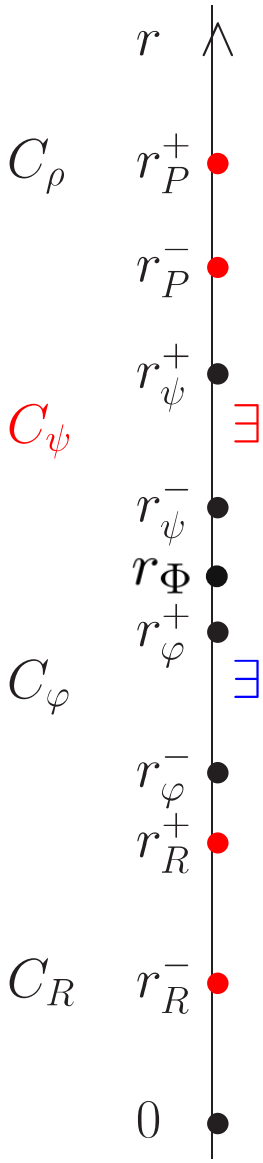
$$C_\varphi(r) \equiv C_\rho \cap \{x \in \mathbb{R}^p : \ R(x) \leq 2r - \rho^*\}, \ r \in [r_P^-, r_P^+]$$

$$\exists\, [r_\varphi^-, r_\varphi^+] \subset [r_R^+, r_P^-]: \ C_\varphi = \bigcup_{r \in [r_\varphi^-, r_\varphi^+]} C_\varphi(r) \qquad C_\Phi = C_\varphi \cap D = \bigcup_{r \in [r_\Phi; r_\varphi^+]} C_\varphi(r)$$

$$C_\varphi(r) \equiv C_R \cap \{x \in \mathbb{R}^p : \ P(x) \leq R^* - 2r\}, \ r \in [r_R^-, r_R^+]$$

$$C_\varphi(r) \equiv C_R, \quad \forall\, r \in [0, r_R^-]$$

$$C_R \cap C_\rho = \emptyset$$



$$C_\varphi(r) \equiv C_\rho, \quad r \geq r_P^+$$

$$C_\varphi(r) \equiv C_\rho \cap \{x \in \mathbb{R}^p : \ R(x) \leq 2r - \rho^*\}, \ r \in [r_P^-, r_P^+]$$

$$\exists\ [r_\psi^-, r_\psi^+] \subset [r_\varphi^+, r_P^-]: \ C_\psi = \bigcup_{r \in [r_\psi^-, r_\psi^+]} C_\varphi(r)$$

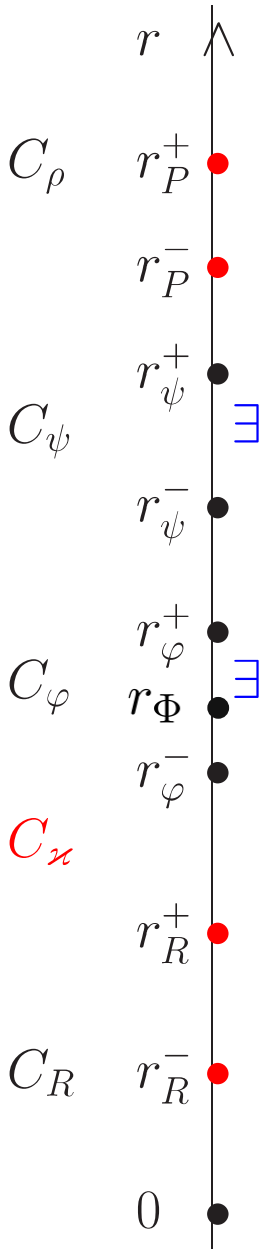
$$C_\Phi = C_\varphi \cap D = \bigcup_{r \in [r_\Phi; r_\varphi^+]} C_\varphi(r)$$

$$\exists\ [r_\varphi^-, r_\varphi^+] \subset [r_R^+, r_P^-]: \ C_\varphi = \bigcup_{r \in [r_\varphi^-, r_\varphi^+]} C_\varphi(r)$$

$$C_\varphi(r) \equiv C_R \cap \{x \in \mathbb{R}^p : \ P(x) \leq R^* - 2r\}, \ r \in [r_R^-, r_R^+]$$

$$C_\varphi(r) \equiv C_R, \quad \forall\, r \in [0, r_R^-]$$

$$C_R \cap C_\rho = \emptyset$$



$$C_\varphi(r) \equiv C_\rho, \quad r \geq r_P^+$$

$$C_\varphi(r) \equiv C_\rho \cap \{x \in \mathbb{R}^p : \ R(x) \leq 2r - \rho^*\}, \ r \in [r_P^-, r_P^+]$$

$$\exists\ [r_\psi^-, r_\psi^+] \subset [r_\varphi^+, r_P^-]: \ C_\psi = \bigcup_{r \in [r_\psi^-, r_\psi^+]} C_\varphi(r)$$

$$\exists\ [r_\varphi^-, r_\varphi^+] \subset [r_R^+, r_P^-]: \ C_\varphi = \bigcup_{r \in [r_\varphi^-, r_\varphi^+]} C_\varphi(r) \quad C_\Phi = C_\varphi \cap D = \bigcup_{r \in [r_\Phi; r_\varphi^+]} C_\varphi(r)$$

$$C_\varkappa \subset \bigcup_{r \in [r_R^+, r_\varphi^-]} C_\varphi(r)$$

$$C_\varphi(r) \equiv C_R \cap \{x \in \mathbb{R}^p : \ P(x) \leq R^* - 2r\}, \ r \in [r_R^-, r_R^+]$$

$$C_\varphi(r) \equiv C_R, \quad \forall\ r \in [0, r_R^-]$$

Задача: $F(R(x), P(x)) \to \min\limits_{x \in S}$	C_F	Ось значений r	Связь с канонической задачей
Внешняя оценка: $F(t_1, t_2) = t_1$, $S = \mathbb{R}^p$	C_R	0 r_R^- r_R^+	$C_\varphi(r) \equiv C_R$, $\forall\, r \in [0, r_R^-]$; $C_\varphi(r) = C_R \cap \{x \in \mathbb{R}^p : R(x) - r \geq P(x) + r\}$, $\forall\, r \in [r_R^-, r_R^+]$;
Шаровая оболочка наименьшего объема: $F(t_1, t_2) = t_1^p - \lvert t_2 \rvert^p$, $S = D$	$C_\varkappa$	r_φ^-	$C_\varkappa \subset \bigcup\limits_{r \in [r_R^+, r_\varphi^-]} C_\varphi(r)$;
Равномерная оценка: $F(t_1, t_2) = t_1 + t_2$, $S = \mathbb{R}^p$	C_φ	r_φ^+	$C_\varphi = \bigcup\limits_{r \in [r_\varphi^-, r_\varphi^+]} C_\varphi(r)$;
Шаровая оболочка наименьшей толщины: $F(t_1, t_2) = t_1 + t_2$, $S = D$	C_Φ	r_ψ^-	$C_\Phi = C_\varphi \cap D$;
Оценка на асферичность: $F(t_1, t_2) = t_1 / \lvert t_2 \rvert$, $S = D$	C_ψ	r_ψ^+ r_P^-	$C_\psi = \bigcup\limits_{r \in [r_\psi^-, r_\psi^+]} C_\varphi(r)$;
Внутренняя оценка: $F(t_1, t_2) = t_2$, $S = D$	C_ρ	r_P^+	$C_\varphi(r) = C_\rho \cap \{x \in \mathbb{R}^p : R(x) - r \leq P(x) + r\}$, $\forall\, r \in [r_P^-, r_P^+]$; $C_\varphi(r) \equiv C_\rho$, $\forall\, r \geq r_P^+$.

6. Свойства решения канонической задачи $C_\varphi(r)$

Теорема 1. Пусть $C_R \cap C_\rho = \emptyset$, тогда
1) $C_\varphi(r) \cap \{C_R \cup C_\rho\} = \emptyset, \quad \forall\, r \in (r_R^+, r_P^-)$,
2) $C_\varphi(r_1) \cap C_\varphi(r_2) = \emptyset, \quad \forall\, r_1 \neq r_2,\, r_i \in [r_R^+, r_P^-)$.

Теорема 2. Многозначное отображение

$$C_\varphi(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to Kv(\mathbb{R}^p)$$

1) полунепрерывно сверху на $\mathbb{R}_+$,
2) строго монотонно убывает на $[r_R^-, r_R^+]$ по включению,
3) строго монотонно возрастает $[r_P^-, r_P^+]$ по включению.

Теорема 3. 1) $f_\varphi(r) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p} \varphi(x,r)$ — выпуклая функция на $\mathbb{R}_+$, причем

2) $f_\varphi(r) = \begin{cases} R^* - r, & r \in [0, r_R^+], \\ r - \rho^*, & r \geq r_P^-. \end{cases}$

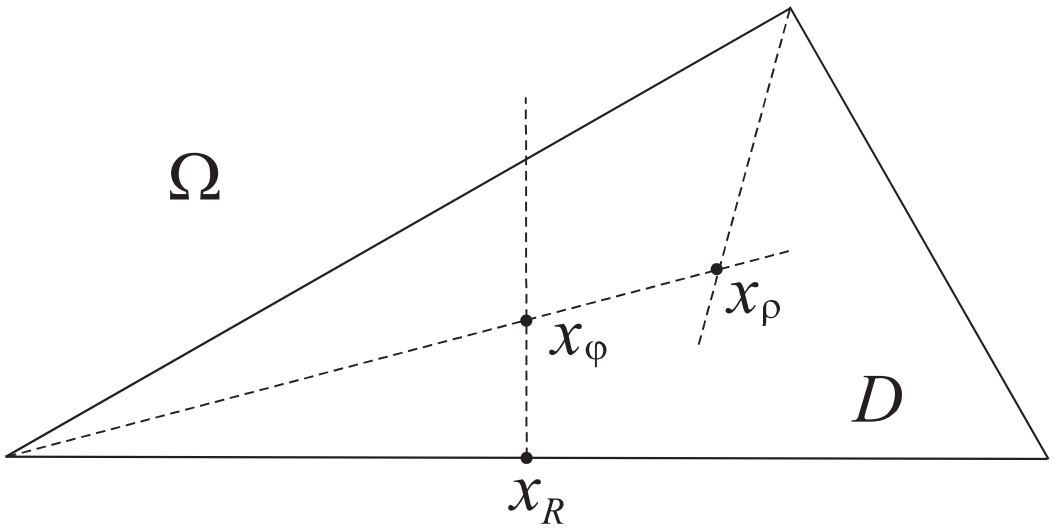
3) $\forall\, x \in C_\varphi(r)$, $r \in [r_R^+, r_P^-]$:

$$P(x,D) \equiv f_\varphi(r) - r, \quad R(x,D) \equiv f(r) + r.$$

Теорема 4. *1)Шар строго выпуклый $\Rightarrow$ единственность решения на $[0, r_P^-]$;*
2) D – строго выпуклое тело и $C_R \cap D \neq \emptyset \Rightarrow$ единственность решения при $r \geqslant r_R^+$;
3) D – строго выпуклое тело $C_R \cap D = \emptyset \Rightarrow$ единственность решения при $r \geqslant \frac{1}{2}\min\limits_{x\in D} R(x)$;
4) $p = 2 \Rightarrow$ единственность решения при $r \in (r_R^+, r_R^-)$.

7. Примеры

1) $p = 2$, $n(\cdot)$ — евклидова норма, D — треугольник



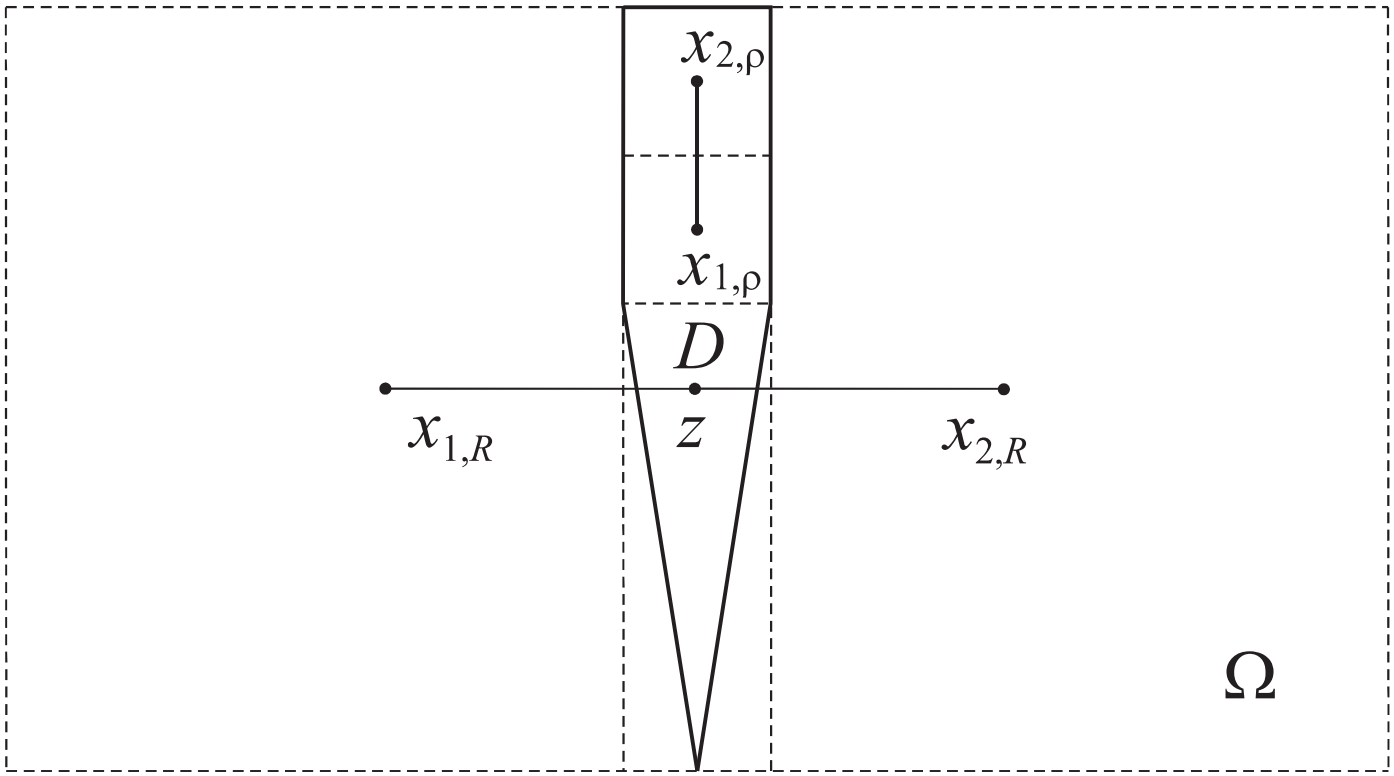
$$r_R^- = r_R^+,$$
$$r_P^- = r_P^+$$

$$C_R = \{x_R\}, \quad C_\rho = \{x_\rho\}, \quad C_\varphi = C_\Phi = \{x_\varphi\},$$

$$C_\psi = [x_\varphi, x_\rho], \quad C_\varkappa = [x_R, x_\varphi].$$

$$r_R^\pm = \frac{R^*}{2} = r_\varkappa^- < r_\varkappa^+ = r_\varphi^- = r_\varphi^+ < r_\psi^- < r_\psi^+ = r_P^\pm = \frac{R(x_\rho)+\rho^*}{2}$$

2) $p = 2$, $n(x) = \max\limits_{i=1,2} |x^{(i)}|$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$



$$r_R^- < r_R^+,$$
$$r_P^- < r_P^+$$

$$C_R = [x_{1,R}, x_{2,R}], \quad C_\rho = [x_{1,\rho}, x_{2,\rho}],$$
$$C_\varphi(r_R^+) = C_\varphi = C_\Phi = C_\varkappa = \{z\}, \quad C_\psi = [z, x_{1,\rho}].$$

$$0 < r_R^- < r_R^+ = r_\varkappa^\pm = r_\varphi^- = r_\varphi^+ = r_\psi^- < r_\psi^+ = r_P^- < r_P^+$$

Библиография

1. *С. И. Дудов, И. В. Златорунская,* Равномерная оценка выпук- лого компакта шаром произвольной нормы // Матем. сб., 191:10 (2000), 13–38.

2. *С. И. Дудов,* Об оценке границы выпуклого компакта шаровым слоем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 1:2 (2001), 64–75.

3. *S. Dudov and I. Zlatorunskya,* Best approximation of a compact set by a ball in an arbitrary norm // Adv. Math. Res. 2 (2003), 81–114.

4. *С. И. Дудов,* Взаимосвязь некоторых задач по оценке выпуклого компакта шаром // Матем. сб., 198:1 (2007), 43–58

5. *С. И. Дудов, Е. А.Мещерякова,* О методе приближённого решения задачи об асферичности выпуклого тела // ЖВМ и МФ., 2013, т. 53,N 10, с. 1668-1678.

6. *S. Dudov, M. Osiptsev,* Uniform Estimation of a Convex Body by a Fixed- Radius Ball// Journal of Optimization Theory and Applications, 2016, V. 171, № 2, pp. 465–480.

7. *С.И. Дудов, М.А. Осипцев,* О шаровой оболочке границы компакта с наименьшей площадью сечения двумерной плоскостью // ЖВМ и МФ., 2019, т. 59, № 1, стр. 169-182

8. *С. И. Дудов, Е. А. Мещерякова,* Об асферичности выпуклого тела // Изв. вузов. Матем., 2015, № 2, 45–58;

9. *С. И. Дудов,* Систематизация задач по шаровым оценкам выпуклого компакта // Матем. сб., 206:9 (2015), 99–120