Об одной модели экономического роста с возобновляемым ресурсом и примыкающих вопросах оптимального управления на бесконечном интервале времени

С.М. Асеев, МИАН, Москва

15 марта 2017г.

Модель Ферхюльста (P. Verhulst, 1845):

$$\dot{S}(t) = rS(t)\left(1 - \frac{S(t)}{K}\right), \qquad S(0) = S_0 > 0.$$

Ресурс добывается с темпом $u(t) \in (0, \infty)$, $t \geq 0$,

$$\dot{S}(t) = rS(t)\left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - u(t)S(t), \qquad S(0) = S_0 > 0.$$

Производственная функция Кобба-Дугласа (K. Wicksell, 1893; C. Cobb & P. Douglas, 1928):

$$Y(t) = A(t)\left(u(t)S(t)\right)^{\alpha}, \qquad t \geq 0.$$

$A(t)$ — технологический коэффициент,
$0 < \alpha < 1$ — коэффициент эластичности.

Изоэластичная функция полезности:

$$W(C) = \begin{cases} \frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}, & \sigma > 0, \quad \sigma \neq 1, \\ \ln C, & \sigma = 1. \end{cases}$$

Логарифмическая мгновенная полезность $(\sigma = 1)$:

$$W(C(t)) = \ln A(t) + \alpha[\ln S(t) + \ln u(t)], \quad C(t) = A(t)\,[u(t)S(t)]^{\alpha}\,, \ t \geq 0.$$

Интегральный функционал полезности:

$$J(S(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\,[\ln S(t) + \ln u(t)]\;dt \to \max\,.$$

$\rho > 0$ — параметр дисконтирования.

Задача $(P1)$:

$$J(S(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t}\left[\ln S(t) + \ln u(t)\right]\,dt \to \max\,,$$

$$\dot{S}(t) = rS(t)\left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - u(t)S(t), \qquad S(0) = S_0 > 0,$$

$$u(t) \in (0,\infty).$$

Класс допустимых управлений состоит из всех измеримых локально ограниченных функций u $[0,\infty) \mapsto (0,\infty)$.
Для любой допустимой пары $(S(\cdot),u(\cdot))$ и $0 \le T < T'$ имеем

$$\int_T^{T'} e^{-\rho t}\left[\ln S(t) + \ln u(t)\right]\,dt < \int_T^{T'} e^{-\rho t}u(t)S(t)\,dt$$

$$< \int_T^{T'} e^{-\rho t}\left[rS(t) - \dot{S}(t)\right]\,dt \le \frac{rS_{\max}}{\rho}\left(e^{-\rho T} - e^{-\rho T'}\right)$$

$$+\, e^{-\rho t}S(t)\Big|_T^{T'} + \rho\int_T^{T'} e^{-\rho t}S(t)\,dt < \omega(T) = \frac{(r+\rho)S_{\max}}{\rho}e^{-\rho T}.$$

Для любой допустимой пары $(S(\cdot), u(\cdot))$ имеем

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\rho t}\ln S(t)\right] \overset{\text{п.в.}}{=} -\rho e^{-\rho t}\ln S(t) + re^{-\rho t} - e^{-\rho t}\left(\frac{r}{K}S(t) + u(t)\right), \ t > 0.$$

Интегрируя на произвольном интервале $[0, T]$, $T > 0$, получаем

$$e^{-\rho T}\ln S(T) - \ln S_0 = -\rho\int_0^T e^{-\rho t}\ln S(t)\,dt + r\int_0^T e^{-\rho t}\,dt - \int_0^T e^{-\rho t}\left(\frac{r}{K}S(t) + u(t)\right)\,dt$$

или

$$\int_0^T e^{-\rho t}\ln S(t)\,dt = \frac{\ln S_0 - e^{-\rho T}\ln S(T)}{\rho} + \frac{r}{\rho^2}\left(1 - e^{-\rho T}\right) - \int_0^T e^{-\rho t}\left(\frac{r}{\rho K}S(t) + \frac{u(t)}{\rho}\right)\,dt.$$

Для любой допустимой пары $(S(\cdot), u(\cdot))$ и любого $T > 0$ имеем

$$\int_0^T e^{-\rho t}\left[\ln S(t) + \ln u(t)\right]\, dt = \frac{\ln S_0 - e^{-\rho T}\ln S(T)}{\rho} + \frac{r}{\rho^2}\left(1 - e^{-\rho T}\right) - \frac{r}{\rho K}\int_0^T e^{-\rho t} S(t)\, dt + \int_0^T e^{-\rho t}\left(\ln u(t) - \frac{u(t)}{\rho}\right)\, dt.$$

Если $\liminf_{T\to\infty} e^{-\rho T}\ln S(T) = 0$, то $\lim_{T\to\infty} e^{-\rho T}\ln S(T) = 0$ и переходя к пределу при $T \to \infty$ получаем

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}\left[\ln S(t) + \ln u(t)\right]\, dt = \frac{\ln S_0}{\rho} + \frac{r}{\rho^2} - \frac{r}{\rho K}\int_0^\infty e^{-\rho t} S(t)\, dt + \int_0^\infty e^{-\rho t}\left(\ln u(t) - \frac{u(t)}{\rho}\right)\, dt.$$

Если $\liminf_{T\to\infty} e^{-\rho T}\ln S(T) < 0$, то

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}\left[\ln S(t) + \ln u(t)\right]\, dt = \int_0^\infty e^{-\rho t}\left(\ln u(t) - \frac{u(t)}{\rho}\right)\, dt = -\infty.$$

Если $\liminf_{T\to\infty} e^{-\rho T}\ln S(T) < 0$, то $e^{-\rho T_i}\ln S(T_i) \le \varepsilon < 0$, $T_i \to \infty$.

$$V(S_0,K) = \sup_{u(\cdot)} \int_0^\infty e^{-\rho t}\left[\ln S(t) + \ln u(t)\right] dt, \qquad S_0 > 0, \quad K > 0.$$

Для $y(t) = e^{-rt}S(t)$, $t \ge 0$, имеем $\dot{y}(t) \overset{\text{п.в.}}{\le} -u(t)y(t)$, $y(0) = S_0$,

$$V(S_0,K) = \sup_{u(\cdot)} \int_0^\infty e^{-\rho t}\left[rt + \ln(u(t)y(t))\right] dt$$
$$< \sup_{u(\cdot)} \int_0^\infty e^{-\rho t}u(t)y(t)\,dt + \frac{r}{\rho^2} \le \sup_{u(\cdot)}\left[-\int_0^\infty e^{-\rho t}\dot{y}(t)\,dt\right] + \frac{r}{\rho^2} \le S_0 + \frac{r}{\rho^2}.$$

Полагая $S(t) = S_0\tilde{S}(t)$, $t \ge 0$, $\tilde{S}(0) = 1$, получаем

$$\dot{\tilde{S}}(t) \overset{\text{п.в.}}{=} r\tilde{S}(t)\left(1 - \frac{S_0\tilde{S}(t)}{K}\right) - u(t)\tilde{S}(t), \qquad t \ge 0.$$

$$V(S_0,K) = \frac{\ln S_0}{\rho} + V(1,\frac{K}{S_0}) < \frac{\ln S_0}{\rho} + 1 + \frac{r}{\rho^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\int_{T_i}^{\infty} e^{-\rho t}\left[\ln S(t)+\ln u(t)\right]\,dt \\ = e^{-\rho T_i}\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\left[\ln S(t+T_i)+\ln u(t+T_i)\right]\,dt \\ \le e^{-\rho T_i}V(S(T_i),K) < e^{-\rho T_i}\left[\frac{\ln S(T_i)}{\rho}+1+\frac{r}{\rho^2}\right].\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{i\to\infty}\int_{T_i}^{\infty} e^{-\rho t}\left[\ln S(t)+\ln u(t)\right]\,dt \le -\varepsilon < 0.$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\left[\ln S(t)+\ln u(t)\right]\,dt = \int_0^{T_i} e^{-\rho t}\left[\ln S(t)+\ln u(t)\right]\,dt \\ + \int_{T_i}^{\infty} e^{-\rho t}\left[\ln S(t)+\ln u(t)\right]\,dt.\end{aligned}$$

Задача $(P1)$ эквивалентна задаче $(\widetilde{P2})$:

$$J(S(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t}\left[\ln u(t) - \frac{u(t)}{\rho} - \frac{r}{\rho K}S(t)\right]\,dt \to \max\,,$$

$$\dot{S}(t) = rS(t)\left(1-\frac{S(t)}{K}\right) - u(t)S(t), \qquad S(0)=S_0>0,$$

$$u(t)\in(0,\infty) \qquad \Leftrightarrow \qquad u(t)\in[\rho,\infty).$$

Задача $(P1)$ эквивалентна задаче $(P2)$:

$$J(S(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t}\left[\ln S(t) + \ln u(t)\right]\,dt \to \max\,,$$

$$\dot{S}(t) = rS(t)\left(1-\frac{S(t)}{K}\right) - u(t)S(t), \qquad S(0)=S_0>0,$$

$$u(t)\in[\rho,\infty).$$

Определим фазовую переменную $x(\cdot)$ равенством

$$x(t) = \frac{1}{S(t)}, \qquad t \geq 0.$$

Тогда в терминах переменной $x(\cdot)$ задача $(P2)$ принимает вид $(P3)$:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left[\ln u(t) - \ln x(t)\right] \, dt \to \max,$$

$$\dot{x}(t) = (u(t) - r)\, x(t) + a, \qquad x(0) = x_0 = \frac{1}{S_0},$$

$$u(t) \in [\rho, \infty).$$

Здесь $a = r/K$. Множество допустимых управлений $u(\cdot)$ в $(P3)$ состоит из всех локально ограниченных функций $u\colon [0, \infty) \mapsto [\rho, \infty)$.

Задача оптимального экономического роста

Задача (P):

$$J(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^\infty f^0(t,x(t),u(t))\,dt\to\max\,,$$

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t)),\qquad x(0)=x_0,$$

$$u(t)\in U.$$

Здесь $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $u(t)\in\mathbb{R}^m$, $t\geq 0$, $x_0\in G$ где G — открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, U — непустое множество в $\mathbb{R}^m$.

Класс *допустимых управлений* состоит из локально ограниченных функций $u(\cdot)\in L^\infty_{loc}([0,\infty),\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющих включению $u(t)\in U$, $t\geq 0$. Предполагается, что для любого допустимого $u(\cdot)$ соответствующая *допустимая траектория* $x(\cdot)$ определена на $[0,\infty)$ в G и функция $t\mapsto f^0(t,x(t),u(t))$ — локально интегрируема на$[0,\infty)$.

Допустимая пара $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ — (сильно) *оптимальная* если функционал $J(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ сходится и для произвольной допустимой пары $(x(\cdot),u(\cdot))$ выполняется неравенство

$$J(x_*(\cdot),u_*(\cdot))\geq\limsup_{T\to\infty}\int_0^T f^0(t,x(t),u(t))\,dt.$$

(A1) Условие регулярности: *Для п.в. $t \in [0, \infty)$ частные производные $f_x(t, x, u)$ и $f_x^0(t, x, u)$ существуют для любых $(x, u) \in G \times U$. Функции $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f^0(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f_x(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $f_x^0(\cdot, \cdot, \cdot)$ измеримы по t для всех $(x, u) \in G \times U$, непрерывны по (x, u) при п.в. $t \in [0, \infty)$ и локально ограничены.*

(A2) Условие роста: *Для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ существуют такие число $\beta > 0$ и интегрируемая функция $\lambda : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, что для любого $\zeta \in G$: $\|\zeta - x_0\| < \beta$, задача Коши*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad x(0) = \zeta,$$

имеет решение $x(\zeta; \cdot)$ на $[0, \infty)$ в G и

$$\max_{x \in [x(\zeta;t), x(t)]} \left| \langle f_x^0(t, x, u(t)), x(\zeta; t) - x(t) \rangle \right| \overset{\text{п.в.}}{\leq} \|\zeta - x_0\| \lambda(t).$$

(A3) Условие выпуклости: *Для любого $M > 0$ существует такой компакт $U_M \subset U$, что $\{u \in U\colon \|u\| \leq M\} \subset U_M$ и при п.в. $t \geq 0$ для всех $x \in G$ множество*

$$Q_M(t,x) = \left\{(z^0, z) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon\ z^0 \leq f^0(t,x,u),\ z = f(t,x,u),\ u \in U_M\right\}$$

— выпуклое.

(A4) Равномерная оценка на “хвост” функционала: *Существует такая убывающая функция $\omega : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, $\omega(t) \to +0$ as $t \to \infty$, что для любых $0 \leq T \leq T'$ и произвольной допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ выполняется неравенство*

$$\int_T^{T'} f^0(t, x(t), u(t))\, dt \leq \omega(T).$$

Вспомогательный результат

Пусть $(x(\cdot), u(\cdot))$ — допустимая пара. Рассмотрим систему

$$\dot{z}(t) = -\left[f_x(t, x(t), u(t))\right]^* z(t).$$

Нормированное матричное решение $Z(\cdot)$ определено на $[0, \infty)$.
Лемма. *Если допустимая пара* $(x(\cdot), u(\cdot))$ *удовлетворяет* $(A2)$, *то*

$$\left\| Z^{-1}(t) f_x^0(t, x(t), u(t)) \right\| \leq \sqrt{n}\lambda(t), \qquad t \geq 0.$$

Для любого $T > 0$ функция $\psi_T : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$:

$$\psi_T(t) = Z(t) \int_t^T Z^{-1}(s) f_x^0(s, x(s), u(s))\, ds, \qquad t \in [0, T],$$

— абсолютно непрерывна, а функция ψ: $[0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$:

$$\psi(t) = Z(t) \int_t^\infty Z^{-1}(s) f_x^0(s, x(s), u(s))\, ds, \qquad t \geq 0,$$

— локально абсолютно непрерывна.
Определим $\mathcal{H} : [0, \infty) \times G \times U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ стандартным образом:

$$\mathcal{H}(t, x, u, \psi) = f^0(t, x, u) + \langle \psi, f(t, x, u) \rangle,$$

$$t \in [0, \infty), \; x \in G, \; u \in U, \; \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема существования

Теорема 1. *Пусть выполняются $(A1)$–$(A4)$ и существует дупустимая пара $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$: $J(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)) > -\infty$. Пусть существуют такие непрерывная положительная функция $M\colon\ [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ и непрерывная функция $\delta\colon\ [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, $\lim_{t\to\infty} \frac{\delta(t)}{t} = 0$, что для любой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющей на некотором множестве $\mathfrak{M} \subset [0,\infty)$, $\operatorname{meas} \mathfrak{M} > 0$, неравенству $\|u(t)\| > M(t)$, при п.в. $t \in \mathfrak{M}$ и всех $T - \delta(T) \geq t$ выполняется неравенство*

$$\sup_{u\in U:\|u\|\leq M(t)} \mathcal{H}(t, x(t), u, \psi_T(t)) - \mathcal{H}(t, x(t), u(t), \psi_T(t)) > 0. \qquad (*)$$

Тогда существует оптимальное управление $u_*(\cdot)$ и $\|u_*(t)\| \overset{\text{п.в.}}{\leq} M(t)$. Если $(*)$ выполняется равномерно по $T : T - \delta(T) \geq t$, т.е.

$$\inf_{T\colon T-\delta(T)\geq t} \left\{ \sup_{u\in U:\|u\|\leq M(t)} \mathcal{H}(t, x(t), u, \psi_T(t)) - \mathcal{H}(t, x(t), u(t), \psi_T(t)) \right\} > 0,$$

тогда для любого оптимального $u_*(\cdot)$ в (P) имеем $\|u_*(t)\| \overset{\text{п.в.}}{\leq} M(t)$.

Теорема 2. *Существует оптимальное допустимое управление* $u_*(\cdot)$ *в задаче* $(P3)$. *Кроме того, для любой оптимальной допустимой пары* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *выполняется неравенство*

$$u_*(t) \overset{\text{п.в.}}{\leq} \left(1 + \frac{1}{Kx_*(t)}\right)(r + \rho), \qquad t \geq 0.$$

Для произвольного $\delta > 0$ определим $M_\delta \colon [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ равенством

$$M_\delta(t) = \frac{(rx_0 + a)(r + \rho)}{rx_0\left[1 - e^{-(r+\rho)\delta}\right]} e^{rt} + \frac{1}{\delta}, \qquad t \geq 0.$$

Тогда для любого T: $T - \delta \geq t$ и любой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ функция $u \mapsto \mathcal{H}(t, x(t), u, \psi_T(t))$ достигает максимума на $[\rho, \infty)$ в точке

$$u_T(t) = -\frac{e^{-\rho t}}{x(t)\psi_T(t)} \leq \frac{(rx_0 + a)(r + \rho)}{rx_0\left[1 - e^{-(r+\rho)(T-t)}\right]} e^{rt} \leq M_\delta(t) - \frac{1}{\delta}.$$

Для произвольного $\delta > 0$ положим $\delta(t) \equiv \delta$ и $M(t) \equiv M_\delta(t)$, $t \geq 0$.

В силу Теоремы 2 существует оптимальное управление $u_*(\cdot)$ в $(P3)$ и

$$u_*(t) \overset{\text{п.в.}}{\leq} M_\delta(t) = \frac{(rx_0 + a)(r+\rho)}{rx_0\left[1 - e^{-(r+\rho)\delta}\right]} e^{rt} + \frac{1}{\delta}.$$

Переходя к пределу при $\delta \to \infty$ пулучаем

$$u_*(t) \overset{\text{п.в.}}{\leq} \left(1 + \frac{1}{Kx_0}\right)(r+\rho)e^{rt}, \qquad t \geq 0.$$

При $\tau > 0$ пара $(\tilde{x}_*(\cdot), \tilde{u}_*(\cdot))$: $\tilde{x}_*(t) = x_*(t+\tau)$, $\tilde{u}_*(t) = u_*(t+\tau)$, — оптимальная в $(P3)$ с $x(0) = x_*(\tau)$. Следовательно,

$$\tilde{u}_*(t) \overset{\text{п.в.}}{\leq} \left(1 + \frac{1}{K\tilde{x}_*(0)}\right)(r+\rho)e^{rt}, \qquad t \geq 0.$$

Следовательно, для любого $\tau > 0$ имеем

$$u_*(t) = \tilde{u}_*(t-\tau) \overset{\text{п.в.}}{\leq} \left(1 + \frac{1}{Kx_*(\tau)}\right)(r+\rho)e^{r(t-\tau)}, \qquad t \geq \tau.$$

Следовательно,

$$u_*(t) \overset{\text{п.в.}}{\leq} \left(1 + \frac{1}{Kx_*(t)}\right)(r+\rho), \qquad t \geq 0. \qquad \square$$

Принцип максимума

Теорема 3. *Пусть* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *— оптимальная пара в* (P), *и пусть выполняются условия* $(A1)$ *и* $(A2)$. *Тогда функция*

$$\psi(t) = Z_*(t) \int_t^{\infty} [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds, \qquad t \geq 0,$$

локально абсолютно непрерывна и

(i) $\psi(\cdot)$ *— решение сопряженной системы:*

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)),$$

(ii) *выполняется условие максимума:*

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} \sup_{u \in U} \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi(t)).$$

Здесь $Z_*(\cdot)$ – нормированная фундаментальная матрица системы

$$\dot{z}(t) = -\left[f_x(t, x_*(t), u_*(t))\right]^* z(t).$$

Случай автономной задачи с дисконтированием

Если задача (P) — автономная с дисконтированием:

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} g(x(t),u(t))\,dt \to \max\,,$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)), \qquad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in U.$$

То, кроме того,

$$H(t,x_*(t),\psi(t)) = \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s),u_*(s))\,ds, \qquad t \geq 0,$$

что эквивалентно условию

$$\lim_{t\to\infty} H(t,x_*(t),\psi(t)) = 0.$$

P. Michel, *On the transversality conditions in infinite horizon optimal problems*, Econometrica, vol. 50, pp. 975–985, 1982.

Теорема 4. *Пусть* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *— оптимальная пара в* $(P3)$*. Тогда*

$$\psi(t) = -e^{-\int_0^t u_*(\xi)\,d\xi + rt} \int_t^\infty \frac{e^{-\rho\tau} e^{\int_0^\tau u_*(\xi)\,d\xi - r\tau}}{e^{\int_0^\tau u_*(\xi)\,d\xi - r\tau}\left[x_0 + a\int_0^\tau e^{-\int_0^\theta u_*(\xi)\,d\xi + r\theta}\,d\theta\right]}\,d\tau$$

— локально абсолютно непрерывная функция и

$$\dot\psi(t) = -\mathcal{H}_x\left(x_*(t), u_*(t), \psi(t)\right),$$

$$\mathcal{H}(x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H(x_*(t), \psi(t)),$$

$$H(t, x_*(t), \psi(t)) = \rho\int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s))\,ds, \qquad t \geq 0.$$

$$
\begin{aligned}
&0 > \psi(t) \\
&= -e^{-\int_0^t u_*(\xi)\,d\xi + rt} \int_t^\infty \frac{e^{-\rho\tau} e^{\int_0^\tau u_*(\xi)\,d\xi - r\tau}}{e^{\int_0^\tau u_*(\xi)\,d\xi - r\tau} \left[x_0 + a \int_0^\tau e^{-\int_0^\theta u_*(\xi)\,d\xi + r\theta}\, d\theta \right]}\, d\tau \\
&\qquad = -e^{-\int_0^t u_*(\xi)\,d\xi + rt} \int_t^\infty \frac{e^{-\rho\tau}}{x_0 + a \int_0^\tau e^{-\int_0^\theta u_*(\xi)\,d\xi + r\theta}\, d\theta}\, d\tau \\
&> -\frac{e^{-\int_0^t u_*(\xi)\,d\xi + rt}}{x_0 + a \int_0^t e^{-\int_0^\theta u_*(\xi)\,d\xi + r\theta}\, d\theta} \int_t^\infty e^{-\rho\tau}\, d\tau = -\frac{e^{-\rho t}}{\rho x_*(t)}, \qquad t \geq 0.
\end{aligned}
$$

Следовательно, для $\psi(\cdot)$ выполняется неравенство

$$
0 < -\psi(t) x_*(t) < \frac{e^{-\rho t}}{\rho}, \qquad t \geq 0.
$$

Условие максимума:

$$u_*(t) = \arg\max_{u\in[\rho,\infty)} \left[\psi(t)x_*(t)u + e^{-\rho t}\ln u\right]$$

$$\Rightarrow\ u_*(t) \overset{\text{п.в.}}{=} -\frac{e^{-\rho t}}{\psi(t)x_*(t)} > \rho, \qquad t\in[0,\infty).$$

Гамильтонова система:

$$\dot{x}(t) = -rx(t) - \frac{e^{-\rho t}}{\psi(t)} + a,$$

$$\dot{\psi}(t) = r\psi(t) + \frac{2e^{-\rho t}}{x(t)}.$$

Условие роста:

$$0 < -\psi(t)x_*(t) < \frac{e^{-\rho t}}{\rho}, \qquad t\geq 0.$$

Условие стационарности:

$$H(t,x_*(t),\psi(t)) = \rho\int_t^\infty e^{-\rho s}g(x_*(s),u_*(s))\,ds, \qquad t\geq 0.$$

В терминах $\lambda(\cdot)$, $\lambda(t) = e^{\rho t}\psi(t)$, $t \geq 0$, получаем:
Условие максимума:

$$u_*(t) \overset{\text{п.в.}}{=} -\frac{1}{\lambda(t)x_*(t)}, \qquad t \geq 0.$$

Гамильтонова система:

$$\dot{x}(t) = -rx(t) - \frac{1}{\lambda(t)} + a,$$
$$\dot{\lambda}(t) = (\rho + r)\lambda(t) + \frac{2}{x(t)}.$$

Условие роста:

$$0 < -\lambda(t)x_*(t) < \frac{1}{\rho}, \qquad t \geq 0.$$

Условие стационарности ($M(x, \lambda) = e^{\rho t}H(t, x, \psi)$, $t \geq 0$, $x > 0$, $\psi < 0$):

$$M(x_*(t), \lambda(t)) = \rho e^{\rho t} \int_t^{\infty} e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s))\, ds, \qquad t \geq 0.$$

Определим функции $(a = r/K)$

$$y_1(x) = \frac{1}{a - rx}, \quad x \in \left(\frac{1}{K}, \infty\right), \qquad y_2(x) = -\frac{2}{(\rho + r)x}, \quad x \in (0, \infty).$$

$$\gamma_1 = \{(x, \lambda)\colon\ \lambda = y_1(x), x \in (1/K, \infty)\}$$

$$\gamma_2 = \{(x, \lambda)\colon\ \lambda = y_2(x), x \in (0, \infty)\}$$

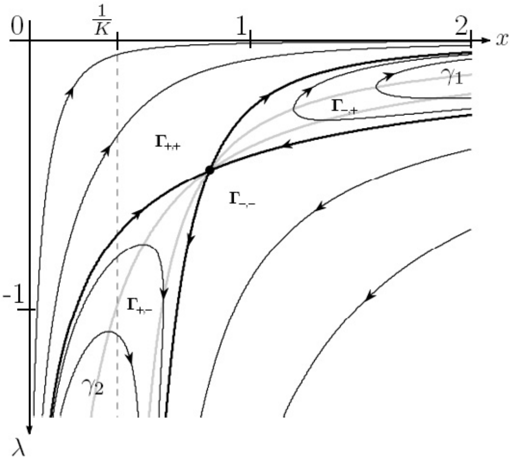
— изоклины на которых производные $\dot{x}(\cdot)$ и $\dot{\lambda}(\cdot)$ равны нулю.
Возможны два случая: (i) $r > \rho$ и (ii) $r \le \rho$.
В случае (i) $y_2(x) > -1/(\rho x)$, $x \ge 0$, и изоклины γ_1 и γ_2 пересекаются в $(\hat{x}, \hat{\lambda})$

$$\hat{x} = \frac{2r}{(r - \rho)K}, \qquad \hat{\lambda} = \frac{(\rho - r)K}{(\rho + r)r}.$$

$$\hat{u}(t) \equiv \hat{u} = \frac{\rho + r}{2}, \qquad t \ge 0.$$

В случае (ii) изоклины γ_1 и γ_2 непересекаются.

Фазовый портрет гамильтоновой системы: $r > \rho$



Решение задачи $(P3)$: $r > \rho$

Пусть $x_{\xi,\beta}(t), \lambda_{\xi,\beta}(t))$ — решение гамильтоновой системы с начальным состоянием $(\xi, \beta) \in \Gamma$, $[0, T_{\xi,\beta})$ — интервал определнения.

Возможны 3 случая:

1) $(x_{\xi,\beta}(t), \lambda_{\xi,\beta}(t)) \in \Gamma_{-,-}$ или $(x_{\xi,\beta}(t), \lambda_{\xi,\beta}(t)) \in \Gamma_{+,-}$ для всех достаточно больших t. Тогда $T_{\xi,\beta} = \infty$, $\lim_{t\to\infty} \lambda_{\xi,\beta}(t) = -\infty$ и $\lim_{t\to\infty} x_{\xi,\beta}(t) = 1/K$. **Не может реализоваться для** $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$**.**

2) $\lim_{t\to T_{\xi,\beta}} x_{\xi,\beta}(t) = \infty$ and $\lim_{t\to T_{\xi,\beta}} \lambda_{\xi,\beta}(t) = 0$. В этом случае $T_{\xi,\beta} < \infty$. **Не может реализоваться для** $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$**.**

3) $\lim_{t\to\infty}(x(t), \lambda(t)) = (\hat{x}, \hat{\lambda})$ при $t \to \infty$. **Вполняются все условия принципа максимума.**

Случай 2): $\lim_{t\to T_{\xi,\beta}} x_{\xi,\beta}(t) = \infty$ и $\lim_{t\to T_{\xi,\beta}} \lambda_{\xi,\beta}(t) = 0$. Тогда $(x_{\xi,\beta}(t), \lambda_{\xi,\beta}(t)) \in \Gamma_{+,+}$ при всех достаточно больших $t < T_{\xi,\beta}$.

Если $(x_{\xi,\beta}(\cdot), \lambda_{\xi,\beta}(\cdot))$ отвечает $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ in $(P3)$, то $x_*(\cdot) \equiv x_{\xi,\beta}(\cdot)$, $T_{\xi,\beta} = \infty$, $\lim_{t\to\infty} x_*(t) = \infty$, и $\lim_{t\to\infty} \lambda_{\xi,\beta}(t) = 0$.

Пусть $\lambda_*(\cdot) \equiv \lambda_{\xi,\beta}(\cdot)$ и определим функцию

$$\phi_*(t) = \lambda_*(t)x_*(t), \qquad t \in [0,\infty).$$

Прямым дифференцированием в силу системы получаем

$$\dot{\phi}_*(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \dot{\lambda}_*(t)x_*(t) + \lambda_*(t)\dot{x}_*(t)$$
$$= (\rho+r)\lambda_*(t)+2-r\lambda(t)x_*(t)-1+a\lambda_*(t) = \rho\phi_*(t)+1+a\lambda_*(t), \qquad t \in [0,\infty).$$

Следовательно,

$$\phi_*(t) = e^{\rho t}\left[\phi_*(0) + \int_0^t e^{-\rho s}\left(1 + a\lambda_*(s)\right)\, ds\right], \qquad t \in [0,\infty).$$

$$\phi_*(t) = e^{\rho t}\left[\phi_*(0) + \int_0^t e^{-\rho s}\left(1 + a\lambda_*(s)\right)\, ds\right], \qquad t \in [0, \infty).$$

Т.к. $0 > \phi_*(t) = \lambda_*(t)x_*(t) > -1/\rho$ for all $t > 0$. В силу условия роста

$$\phi_*(0) = -\int_0^\infty e^{-\rho s}\left(1 + a\lambda_*(s)\right)\, ds = -\frac{1}{\rho} - a\int_0^\infty e^{-\rho s}\lambda_*(s)\, ds.$$

Следовательно,

$$\phi_*(t) = -\frac{1}{\rho} - ae^{\rho t}\int_t^\infty e^{-\rho s}\lambda_*(s)\, ds, \qquad t \in [0, \infty).$$

По правилу Лопиталя получаем

$$\lim_{t\to\infty} e^{\rho t}\int_t^\infty e^{-\rho s}\lambda_*(s)\, ds = \lim_{t\to\infty}\frac{\int_t^\infty e^{-\rho s}\lambda_*(s)\, ds}{e^{-\rho t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_*(t)}{\rho} = 0.$$

$$\lim_{t\to\infty} u_*(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\lambda_*(t)x_*(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\phi_*(t)} = \rho.$$

В силу условия $r > \rho$ это влечет $\lim_{t\to\infty} x_*(t) \leq a < \infty$, что противоречит равенству $\lim_{t\to\infty} x_*(t) = \infty$.

$y_2(x) > y_1(x)$ для всех $x > 1/K$, изоклины γ_1 и γ_2 не пересекаются.

Возможны 2 случая:

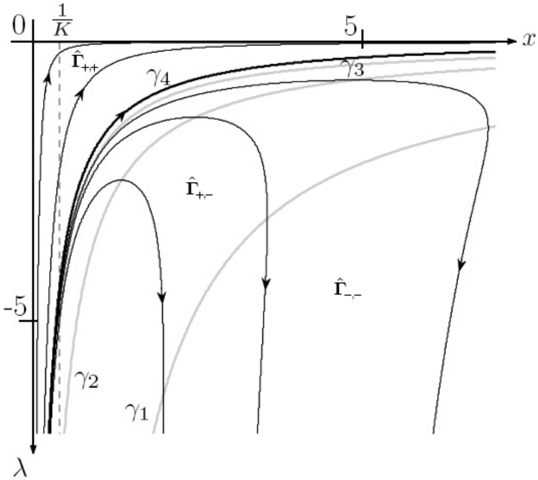
1) $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1/K$, $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = -\infty$. Тогда $(x(t), \lambda(t)) \in \hat{\Gamma}_{-,-}$ при больших $t \geq 0$. Имеем: $\lim_{t\to\infty} \lambda(t)x(t) = -\infty$, что противоречит условию роста. **Не может реализоваться для $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$.**

2) $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$, $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$. В этом случае $(x(t), \lambda(t)) \in \hat{\Gamma}_{+,+}$ для всех $t \geq 0$.
Определим $y_3\colon (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ и кривые $\gamma_3, \gamma_4 \subset \Gamma$:

$$y_3(x) = -\frac{1}{\rho x}, \quad x \in (0, \infty), \qquad \gamma_3 = \{(x, \lambda)\colon \lambda = y_3(x), x \in (0, \infty)\},$$

$$\gamma_4 = \mathbf{graph}\,(\mathrm{x}_*(\cdot), \lambda(\cdot)) = \{(\mathrm{x}, \lambda)\colon \mathrm{x} = \mathrm{x}_*(\mathrm{t}), \lambda = \lambda_*(\mathrm{t}), \mathrm{t} \geq 0\}.$$

Фазовый портрет гамильтоновой системы: $r \leq \rho$



"Sustainable development is development that meets the needs of the present without compromising the ability of future generations to meet their own needs."(*Our common future: report of the world commission on environment and development*, United Nations (1987)).

Определение 1. Допустимая пара $(S(\cdot), u(\cdot))$ — *устойчива*, если

$$\lim_{T\to\infty} \inf_{t\geq T} \frac{d}{dt} \ln Y(t) = \lim_{T\to\infty} \inf_{t\geq T} \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} \geq 0.$$

Подставляя $Y(t) = A(t)\,(u(t)S(t))^{\alpha}$, $A(t) = A_0 e^{\mu t}$, $t \geq 0$, получаем

$$\mu + \alpha \lim_{T\to\infty} \inf_{t\geq T} \left[\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} + \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} \right] \geq 0.$$

$r > \rho \Rightarrow u_*(t) \to (r+\rho)/2$, $S_*(t) \to ((r-\rho)K)/(2r)$.

$r \leq \rho \Rightarrow u_*(t) \to \rho$, $\dot{S}_*(t)/S_*(t) = r - (rS_*(t))/K - u_*(t) \to r - \rho$.

Критерий устойчивости оптимальной пары:

$$\mu/\alpha + r \geq \rho.$$

Определение 2. Допустимая пара $(S(\cdot), u(\cdot))$ — *сильно устойчива*, если она устойчива и

$$\lim_{T\to\infty} \inf_{t\geq T} S(t) = S_\infty > 0.$$

Пусть $r > \rho$, тогда $u_*(t) \to (r+\rho)/2$, $S_*(t) \to ((r-\rho)K)/(2r)$.

Пусть $r \leq \rho$, тогда $u_*(t) \to \rho$, $S_*(t) \to 0$.

Критерий сильной устойчивости оптимальной пары:

$$r > \rho.$$

Литература

1. С.М. Асеев, *Существование оптимального управления в задачах на бесконечном интервале времени с неограниченным множеством ограничений на управления*, Тр. ИММ УрО РАН, 22, № 2, 18-27, 2016.
2. С.М. Асеев, *Сопряженные переменные и межвременные цены в задачах оптимального управления на бесконечном интервале времени*, Тр. МИАН, 290, 239-253, 2015.
3. S. Aseev, T. Manzoor, *Optimal growth, renewable resources and sustainability*, International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), Laxenburg, Austria, 29 pp., WP-16-017, 2016.
4. S.M. Aseev, V. M. Veliov, *Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions*, Тр. ИММ УрО РАН, 20, № 3, 41-57, 2014.