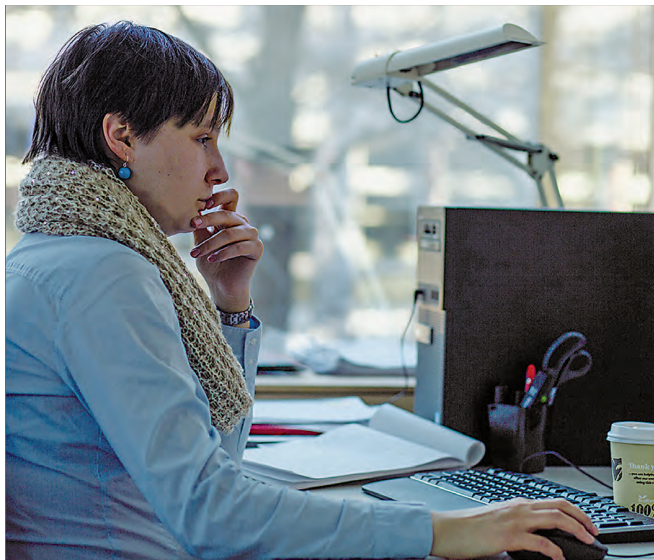


# Задача о плотнейшей упаковке многомерных шаров

А. И. Овсеевич

ИПМех РАН

Геометрическая теория оптимального управления, 29 марта 2017



- Постановка задачи о плотнейшей упаковке
- Результаты для малых размерностей
- Задача о магических функциях
- Анзац Марины Вязовской
- Модулярные формы
- Решение в размерности 8 и 24

Упаковка шарами радиуса  $r$  — множество  $P$  шаров радиуса  $r$ , внутренности которых не пересекаются. Плотность упаковки

$$\delta_P = \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{\sum_{B \in P} \text{vol}(B \cap Q)}{\text{vol } Q}, \quad (1)$$

где  $Q$  пробегает семейство заполняющих пространство концентрических шаров. Задача о плотнейшей упаковке состоит в оптимизации плотности

$$\delta_P \rightarrow \max \quad (2)$$

по всевозможным упаковкам. Задача не зависит от выбора  $r$  и семейства  $Q$ .

## Определение 1

Решетка  $L \subset \mathbf{R}^n$  — это множество векторов вида  $\sum a_i e_i$ , где  $a_i \in \mathbf{Z}$ , а  $\{e_i\}$  — некоторый фиксированный базис в  $\mathbf{R}^n$ .

## Определение 2

С каждой решеткой связана билинейная форма (матрица)  $Q = Q_L$ ,  $Q_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$  и квадратичная форма на  $\mathbf{Z}^n$   
 $Q(x) = Q_L(x) := \left| \sum x_i e_i \right|^2$

## Определение 3

Пусть  $R = \min_{0 \neq l \in L} |l|$  — (нетривиальный) минимум евклидовой нормы на решетке. Тогда множество  $P$  шаров  $B(l, R/2)$  с центрами в  $L$  и радиусом  $r = R/2$  называется решетчатой упаковкой.

## Факт

Плотность  $\delta_P$  решетчатой упаковки  $P$ , связанной с решеткой  $L$ , равна

$$\delta_P = \frac{\text{vol } B(R/2)}{\sqrt{\det Q_L}} = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)! \sqrt{\det Q_L}} \left(\frac{R}{2}\right)^n, \quad (3)$$

где  $Q_L$  — симметрическая матрица, связанная с решеткой,

$$R = \min_{0 \neq l \in L} |l|$$

— минимум евклидовой нормы на решетке,  $R/2$  — радиус шаров упаковки.

При  $n = 1$  плотнейшей упаковкой является (очевидно) решетчатая упаковка с решеткой  $L = \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}^1$ . При  $n = 2$  плотнейшей упаковкой является решетчатая упаковка с гексагональной решеткой

$$L = \mathbf{Z} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{Z} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \subset \mathbf{R}^2$$

см. [1], [2]. При  $n = 3$  плотнейшей упаковкой является решетчатая упаковка с решеткой

$$L = \mathbf{Z} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \subset \mathbf{R}^3$$

см. [3]. Вектор  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3$  лежит в  $L$  если и только если  $\sum_i x_i$  — четное число.





# Плотнейшая упаковка: $n = 3$



Это решетка  $E_8 \subset \mathbf{R}^8$  со следующими свойствами:

- 1 Матрица  $Q$  целочисленная:  $Q_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$  — целое число
- 2 Решетка унимодулярна:  $\det Q = 1$
- 3 Решетка — четная:  $Q(x) = |\sum x_i e_i|^2$  — четное число (при  $x \in \mathbf{Z}^8$ )

## Теорема 1

(Коркин – Золотарев 1873)

- 1 Все такие решетки  $L$  изоморфны, в том смысле, что переводятся друг в друга вращением пространства  $\mathbf{R}^8$ .
- 2  $\min_{0 \neq x \in \mathbf{Z}^8} Q_L(x) = 2$ . Имеется 240 векторов  $y \in L$  длины  $\sqrt{2}$
- 3 В соответствующей решетчатой упаковке каждый шар (радиуса  $1/\sqrt{2}$ ) касается 240 других

Это решетка  $\Lambda_{24} \subset \mathbf{R}^{24}$  со следующими свойствами:

- 1 Матрица  $Q$  целочисленная:  $Q_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$  — целое число
- 2 Решетка унимодулярна:  $\det Q = 1$
- 3 Решетка — четная:  $Q(x) = |\sum x_i e_i|^2$  — четное число (при  $x \in \mathbf{Z}^8$ )
- 4  $\min_{0 \neq x \in \mathbf{Z}^{24}} Q(x) = 4$

## Теорема 2

(Conway 1969)

- 1 Все такие решетки  $L$  изоморфны, в том смысле, что переводятся друг в друга вращением пространства  $\mathbf{R}^{24}$ .
- 2 В соответствующей решетчатой упаковке каждый шар (радиуса 1) касается 196560 других

## Теорема 3

(Viazovska et al 2016) Решетчатые упаковки, связанные с  $E_8$  и  $\Lambda_{24}$ , имеют максимальную плотность среди всех упаковок в  $\mathbf{R}^8$  и  $\mathbf{R}^{24}$ . Соответствующие плотности есть

$$\delta_8 = \frac{\pi^4}{384} = 0.25637\dots$$

и

$$\delta_{24} = \frac{\pi^{12}}{12!} = 0.001929\dots$$

## Определение 4

Чудесные функции — такие быстро убывающие гладкие функции  $f = f_n : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , что

- 1  $f(x)$  зависит только от  $|x|$
- 2  $f(x) = f_n(x) \leq 0$  если  $|x| \geq r_n$
- 3 Преобразование Фурье  $\hat{f}(y) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{2\pi i x \cdot y} dx \geq 0$
- 4  $f(0) = \hat{f}(0) \neq 0$

Константа  $r_n = \sqrt{2}$  при  $n = 8$ , и  $r_n = 2$  при  $n = 24$

## Теорема 4

(Cohn, Elkies 2003) Если функция  $f$  удовлетворяет условиям 2, 3, 4 определения 4, то максимальная плотность  $\delta_n$  упаковки шаров в  $\mathbf{R}^n$  удовлетворяет неравенству

$$\delta_n \leq \text{vol } B(r_n/2) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} r_n^n, \quad (4)$$

где  $B(r)$  —  $n$ -мерный шар радиуса  $r$ .

## Следствие 1

Пусть  $L \subset \mathbf{R}^n$  — унимодулярная решетка с минимальной нормой  $r_n$ . Тогда соответствующая упаковка — плотнейшая,  $f_n(l) = 0$  при  $0 \neq l \in L$ .

## Теорема 5

(Viazovska et al 2016) При  $n = 8$  и  $n = 24$  чудесные функции  $f_n$  с константой  $r_n = \sqrt{2}$  при  $n = 8$ , и  $r_n = 2$  при  $n = 24$  существуют и потому оценка линейного программирования (4) является точной: верхняя грань достигается на решетчатых упаковках, связанных с решеткой  $E_8$  и решеткой Лича  $\Lambda_{24}$ .

Это предложение искать чудесную функцию  $f = f_n$  и ее преобразование Фурье в виде:

$$f(x) = 4 \sin^2 \left( \frac{\pi r^2}{2} \right) \int_0^\infty \phi(it) e^{-\pi r^2 t} dt.$$

$$\mathcal{F}f = \hat{f} = 4 \sin^2 \left( \frac{\pi r^2}{2} \right) \int_0^\infty \psi(it) e^{-\pi r^2 t} dt$$
(5)

Здесь  $r = |x|$ ,  $\phi, \psi$  — голоморфные функции в верхней полуплоскости  $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbf{C} : \Im z > 0\}$ , интегрирование ведется по вертикальному лучу  $(0, i\infty) \subset \mathfrak{H}$ . Если интегралы в (5) сходятся при  $r > r_n$  в первом из них и при  $r > 0$  во втором, и если  $\phi(it) \leq 0$ , а  $\psi(it) \geq 0$  при  $t > 0$ , то выполнены условия 2, 3 в определении чудесной функции:

- $f(x) = f_n(x) \leq 0$  если  $|x| \geq r_n$
- Преобразование Фурье  $\hat{f}(y)$  неотрицательно



Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned}T\phi(z) &= \phi(z-1), \quad S\phi(z) = z^{\frac{n}{2}-2}\phi(-1/z), \\A\phi(z) &= \frac{1}{2}(\phi(z-1) - 2\phi(z) + \phi(z+1))\end{aligned}$$

на голоморфных функциях в верхней полуплоскости. Анализ условий, при которых вторая строка в (5) — преобразование Фурье первой строки показывает, что это так, если выполнены соотношения

$$\begin{aligned}TST\phi &= \psi, & TST\psi &= \phi, \\SA\phi &= \psi, & SA\psi &= \phi.\end{aligned}\tag{6}$$

Простейший способ добиться, чтобы  $f$  и  $\hat{f}$  имели разные знаки — найти решение

$$TST\phi = -\phi, \quad SA\phi = -\phi,\tag{7}$$

и положить  $\psi = -\phi$ . Для этого Вязовская использует модулярные формы.

Это голоморфные функции на верхней полуплоскости  $\mathfrak{H}$ , которые хорошо преобразуются под действием модулярной группы

$$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbf{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

Матрица  $\gamma \in \Gamma$  действует на  $\mathfrak{H}$  дробно-линейными преобразованиями:

$$z \mapsto \gamma z = \frac{az + b}{cz + d}$$

Функция  $F$  — модулярная форма веса  $k \in \mathbf{Z}$  относительно подгруппы  $H \subset \Gamma$ , если

$$(cz + d)^{-k} F(\gamma z) = F(z), \quad \gamma \in H$$

# Модулярные формы: примеры

Ряды Эйзенштейна

$$E_k(z) = \frac{1}{\zeta(k)} \sum_{(c,d) \in \mathbf{Z}^2 \setminus 0} (cz + d)^{-k}$$

Здесь  $k \in \mathbf{Z}$  и ряд абсолютно сходится при  $k > 2$ ,  
 $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$  при  $k > 1$ . Разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$E_k(z) = 1 + \frac{2}{\zeta(1-k)} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n z}, \text{ где } \sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$$

$E_k$  — модулярная форма веса  $k$  при  $k > 2$ ,  $E_{2k+1} = 0$ . Функция

$$E_2(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) e^{2\pi i n z}$$

является квазимодулярной формой:  $z^{-2} E_2(-1/z) = E_2(z) - \frac{6i}{\pi z}$

$\theta$ -функции Якоби  $\theta_{\epsilon\delta}$ , где  $\epsilon, \delta \in \{0, 1\}$  определяются сходящимися рядами

$$\theta_{\epsilon\delta}(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{\pi i(n + \frac{\epsilon}{2})^2 z + \pi i n \delta}, \quad \Im z > 0$$

Они являются модулярными формами веса  $\frac{1}{2}$  относительно подгруппы  $\Gamma(2) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), \gamma \equiv 1 \pmod{2}\}$ :

$$(cz + d)^{-1/2} \theta_{\epsilon\delta}(\gamma z) = \zeta \theta_{\epsilon\delta}(z), \quad \zeta^8 = 1,$$

вещественными при  $z = it$ ,  $t > 0$ . Дискриминант

$$\Delta = 2^{-8} \theta_{00}^8 \theta_{01}^8 \theta_{10}^8 = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728}$$

модулярная форма веса 12, которая не имеет нулей в  $\mathfrak{H}$ .

Вязовская использует для решения (7) при  $n = 8$  модулярную форму  $\Phi_-$  веса  $-2$

$$\Phi_- = \frac{5\theta_{01}^{12}\theta_{10}^8 + 5\theta_{01}^{16}\theta_{10}^4 + 2\theta_{01}^{20}}{\Delta}$$

Это не дает чудесной функции, потому что  $f(0) = \widehat{f}(0) = 0$  для соответствующей функции  $f$ . Поэтому используется также функция  $\Phi_+$ , связанная с квазимодулярной формой

$$\Phi_+(z) = z^2\eta_+(-1/z), \quad \eta_+ = \frac{(E_2E_4 - E_6)^2}{\Delta}$$

$\phi$  в (5) выбирается в виде линейной комбинации  $\phi = \frac{\pi}{36}\Phi_+ + \frac{1}{\pi}\Phi_-$ . Тогда интеграл

$$\int_0^\infty \psi(it)e^{-\pi r^2 t} dt = \int_0^\infty \left( \frac{\pi}{36}\Phi_+ - \frac{1}{\pi}\Phi_- \right) (it)e^{-\pi r^2 t} dt$$

сходится при  $r > 0$ .

Окончательно имеем чудесную функцию  $f = f_8$  и ее преобразование Фурье в виде:

$$f(x) = 4 \sin^2 \left( \frac{\pi r^2}{2} \right) \int_0^\infty \left( \frac{\pi}{36} \Phi_+ + \frac{1}{\pi} \Phi_- \right) (it) e^{-\pi r^2 t} dt. \quad (8)$$

$$\mathcal{F}f = \hat{f} = 4 \sin^2 \left( \frac{\pi r^2}{2} \right) \int_0^\infty \left( \frac{\pi}{36} \Phi_+ - \frac{1}{\pi} \Phi_- \right) (it) e^{-\pi r^2 t} dt$$

$$\Phi_+(z) = z^2 \eta_+(-1/z), \quad \eta_+ = \frac{(E_2 E_4 - E_6)^2}{\Delta}$$

$$\Phi_- = \frac{5\theta_{01}^{12} \theta_{10}^8 + 5\theta_{01}^{16} \theta_{10}^4 + 2\theta_{01}^{20}}{\Delta}$$

Нужно проверить, что  $\left( \frac{\pi}{36} \Phi_+ + \frac{1}{\pi} \Phi_- \right) (it) \leq 0$ ,  
 $\left( \frac{\pi}{36} \Phi_+ - \frac{1}{\pi} \Phi_- \right) (it) \geq 0$  при  $t > 0$ . Это проще всего проделать численно, нарисовав графики.






Здесь имеем чудесную функцию  $f = f_{24}$  и ее преобразование Фурье в виде:

$$f(x) = 4 \sin^2 \left( \frac{\pi r^2}{2} \right) \int_0^\infty \left( \frac{\pi}{432} \Phi_+ + \frac{1}{\pi} \Phi_- \right) (it) e^{-\pi r^2 t} dt. \quad (9)$$







$$\mathcal{F}f = \hat{f} = 4 \sin^2 \left( \frac{\pi r^2}{2} \right) \int_0^\infty \left( \frac{\pi}{432} \Phi_+ - \frac{1}{\pi} \Phi_- \right) (it) e^{-\pi r^2 t} dt$$

$$\Phi_+(z) = z^2 \left( \frac{25E_4^4 - 49E_6^2 E_4 + 48E_6 E_4^2 E_2 + 25E_6^2 E_2^2 - 49E_4^3 E_2^2}{\Delta^2} \right) (-1/z)$$

$$\Phi_- = \frac{7\theta_{01}^{20} \theta_{10}^8 + 7\theta_{01}^{24} \theta_{10}^4 + 2\theta_{01}^{28}}{\Delta}$$

-  Maryna Viazovska. The sphere packing problem in dimension 8. arxiv:1603.04245, March 15, 2016
-  H. Cohn, A. Kumar, Stephen D. Miller, D. Radchenko, and Maryna Viazovska. The sphere packing problem in dimension 24. arxiv:1603.06518, March 21, 2016
-  David de Laat, Frank Vallentin. A breakthrough in sphere packing: the search for magic functions. Nieuw Archief voor Wiskunde (NAW) 5/17 nr. 3, 184–192. September 2016
-  Henry Cohn. A Conceptual Breakthrough in Sphere Packing. Notices of the AMS Volume 64, Number 2, 102–115 (2017)
-  H. Cohn, N. Elkies. New upper bounds for sphere packings I, Ann. Math. 157 (2003), 689–714



-  A. Thue, Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene. Norske Vid. Selsk. Skr. No.1 (1910), 1–9.
-  L. F. Tóth, Über die dichteste Kugellagerung. Math. Z. 48 (1943), 676–684.
-  Hales, Thomas C., A proof of the Kepler conjecture, Ann. of Math. 162 (3): 1065–1185 (2005)
-  Conway J. H., A characterization of Leech's lattice. Invent. Math., 1969, 7(2), 137–142.
-  T. C. Hales, Cannonballs and honeycombs, Notices Amer. Math. Soc. 47 (2000), no. 4, 440–449
-  A. Korkine, and G. Zolotareff: Sur les formes quadratiques, Math. Ann. 6 (1873), 366–389.

Обозначим через  $R$  множество векторов  $x \in L$  длины  $\sqrt{2}$ ,  
 $V = L \otimes \mathbf{R} = \mathbf{R}^8$

$R$ -система корней в  $V$ , что означает:

- 1  $R$  порождает  $V$
- 2 Если скалярное кратное корня  $x$  лежит в  $R$ , то это либо  $x$  либо  $-x$ .
- 3 Для любого  $x \in R$  отражение  $s_x$  относительно гиперплоскости, ортогональной к  $x$ , переводит  $R$  в себя
- 4 Если  $x$  и  $y$  — корни, то  $s_x y - y = nx$ , где  $n = -2 \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \in \mathbf{Z}$  — целое число

Системы корней  $R$  классифицируют полупростые компактные группы Ли  $G$ . Размерность  $G = \dim V + \#R$ , что равно  $8 + 240 = 248$  для  $R = E_8$ . В классификации Арнольда особенность  $E_8$  задается как  $f(z) = z_1^5 + z_2^3 + \sum_3^n z_i^2$ . Сфера Милнора задается уравнениями  $f(z) = t$ ,  $|z| = \epsilon$  при  $n = 5$ .

# Решетка Лича $\Lambda_{24}$ : конструкция

Рассмотрим пространство Минковского  $\mathbf{R}^{25,1}$ , состоящее из векторов  $(x_0, \dots, x_{24}|x_{25})$ , со скалярным произведением

$$x \cdot y = \sum_{i=0}^{24} x_i y_i - x_{25} y_{25}, \quad N(x) = x \cdot x$$

Имеется единственная (с точностью до преобразования Лоренца) четная унимодулярная целочисленная решетка  $\Pi_{25,1} \in \mathbf{R}^{25,1}$ . Можно взять  $\Pi_{25,1}$  в виде множества векторов  $x = (x_0, \dots, x_{24}|x_{25})$ , где либо все  $x_i \in \mathbf{Z}$ , либо все  $x_i \in \mathbf{Z} + 1/2$  и

$$\sum_{i=0}^{24} x_i - x_{25} \in 2\mathbf{Z}$$

Вектор  $w = (0, \dots, 24|70)$  изотропен:  $w \cdot w = 0$ . Решетка  $\Lambda_{24} = (w^\perp \cap \Pi_{25,1})/w \subset w^\perp/w = \mathbf{R}^{24}$  — решетка Лича.