Функция условной стоимости и необходимые условия оптимальности для задач с бесконечным горизонтом

С.М. Асеев
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва

Семинар "Геометрическая теория оптимального управления"
МГУ, Москва, 23 ноября, 2023

Постановка задачи

Пусть заданы непустое выпуклое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, непустые замкнутые множества $M_0 \subset G$ и $M_\infty \subset \mathbb{R}^n$, функции

$$f : [0,\infty) \times G \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad f^0 : [0,\infty) \times G \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1, \quad \varphi : G \to \mathbb{R}^1$$

и многозначное отображение $U\colon\ [0,\infty) \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ с непустыми значениями.

Задача (P):

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \varphi(x(0)) + \int_0^\infty f^0(t,x(t),u(t))\,dt \to \max\,,$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)),$$

$$u(t) \in U(t),$$

$$x(0) \in M_0, \qquad \liminf_{t\to\infty} \rho(x(t),M_\infty) = 0.$$

[1] Ramsey F.P. A mathematical theory of saving. Economic J., 1928, vol. 38, no. 152, pp. 543–559.

Оптимальность роста и “устойчивое” развитие

“Устойчивое развитие” (sustainable development) $\equiv$ *“развитие, удовлетворяющее интересы нынешнего поколения, без ущерба для удовлетворения интересов всех будущих поколений”.*

Доклад “Наше общее будущее” Мировой комиссии по окружающей среде и развитию (Brundtland Commission).

[2] Meadows D.H., Meadows D.L., Randers J., and Behrens III W.W. The limits to growth: A report for the Club of Rome's project on the predicament of mankind. N Y: Universe Books, 1972.

[3] Brundtland Commission, Our common future: report of the world commission on environment and development, United Nations, 1987.

Асимптотическое ограничение

$$\liminf_{t\to\infty} \rho(x(t), M_\infty) = 0$$

— минимальное необходимое условие устойчивого развития.

[4] Valente S. Optimal growth, genuine savings and long-run dynamics. Scottish Journal of Political Economy, 2008, vol. 55, no. 2, pp. 210–226.

Асимптотические концевые ограничения в оптимальном управлении

Концевое ограничение $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_1$.

[5] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., Математическая теория оптимальных процессов, М.: Физматгиз, 1961.

[6] Agrachev A.A.,Chittaro F.C., Smooth optimal synthesis for infinite horizon variational problems, ESAIM: COCV, 15:1 (2009), 173–188.

Ограничения на значения $x_*^i(\infty)$, $1 \le i \le m \le n$: $\exists \lim_{t\to\infty} x_*^i(t) = x_*^i(\infty)$.

[7] Бродский Ю.И., Необходимые условия слабого экстремума для задач оптимального управления на бесконечном интервале времени, Матем. сб., 105(147):3 (1978), 371–388.

[8] Tauchnitz N., Pontryagin's maximum principle for infinite horizon optimal control problems with bounded processes and with state constraints, arXiv:2007.09692

[9] Seierstad A., A maximum principle for smooth infinite horizon optimal control problems with state constraints and with terminal constraints at infinity, Open Journal of Optimization, 4 (2015), 100–130.

Экстремальные задачи с ограничениями

Пусть заданы нормированные пространства X, Y, отображение

$$F : X \to Y,$$

и функции

$$f_i : X \to \mathbb{R}^1, \qquad i = 0, 1, \dots, m.$$

Задача $(\widetilde{P})$:

$$f_0(x) \to \max\,,$$

$$F(x) = 0,$$

$$f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

[10] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М., Теория экстремальных задач. М.: Наука (1974).

Основные определения

Измеримую по Лебегу функцию $u\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$: $u(t) \in U(t)$ будем называть **управлением**.

Траектория $x(\cdot)$ — локально абсолютно непрерывное решение $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, определенное в G на $[0,\tau)$, $0 < \tau \leq \infty$.

Пару $(x(\cdot), u(\cdot))$ будем называть **процессом**, если $\tau = \infty$.

Процесс $(x(\cdot), u(\cdot))$ будем называть **допустимым**, если выполняются концевые ограничения $x(0) \in M_0$ и $\liminf_{t\to\infty} \rho(x(t), M_\infty) = 0$, а функция $t \mapsto f^0(t, x(t), u(t))$ локально интегрируема на $[0,\infty)$.

Допустимый процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ будем называть **слабо обгоняющим**, если для любого другого допустимого процесса $(x(\cdot), u(\cdot))$ выполняется неравенство

$$\varphi(x_*(0)) - \varphi(x(0)) + \limsup_{T\to\infty} \left[\int_0^T f^0(t, x_*(t), u_*(t))\, dt - \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))\, dt \right] \geq 0.$$

При п.в. $t \in [0,\infty)$ производные $f_x(t,x,u)$ и $f_x^0(t,x,u)$ существуют для всех $(x,u) \in G \times \mathbb{R}^m$.

Функции $f(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f^0(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f_x(\cdot,\cdot,\cdot)$ и $f_x^0(\cdot,\cdot,\cdot)$ — измеримы по Лебегу-Борелю (LB-измеримы) по (t,u) для любого $x \in G$ и непрерывны по x при п.в. $t \in [0,\infty)$ и всех $u \in \mathbb{R}^m$.

В этом случае для любого управления $u(\cdot)$ и любого $x \in G$ функции $t \mapsto f(t,x,u(t))$, $t \mapsto f_x(t,x,u(t))$, $t \mapsto f^0(t,x,u(t))$ и $t \mapsto f_x^0(t,x,u(t))$ измеримы по Лебегу.

График многозначного отображения $U(\cdot)$, т.е. множество

$$\operatorname{graph} U(\cdot) = \{(t,u) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^m \colon\ u \in U(t)\},$$

предполагается LB-измеримым множеством в $\mathbb{R}^{m+1}$.

[11] Clarke F., Functional analysis, calculus of variations and optimal control. Graduate Texts in Mathematics. V. 264. (2013).

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — некоторый процесс.

(A1) *Существуют такие непрерывная функция* $\gamma\colon [0,\infty) \mapsto (0,\infty)$ *и локально интегрируемая функция* $\nu\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^1$, *что* $\{x\colon \|x - x_*(t)\| \leq \gamma(t)\} \subset G$ *для всех* $t \geq 0$ *и для п.в.* $t \in [0,\infty)$ *выполняется неравенство*

$$\max_{\{x\colon \|x-x_*(t)\|\leq\gamma(t)\}} \Big\{ \|f_x(t,x,u_*(t))\| + \|f_x^0(t,x,u_*(t))\| \Big\} \leq \nu(t).$$

$(A1) \Rightarrow$ применимость стандартных результатов о существовании, единственности, непрерывной зависимости решения $x(\tau,\xi;\cdot)$ задачи Коши

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u_*(t)), \qquad x(\tau) = \xi.$$

от начальных данных (τ,ξ) и дифференцируемости по начальному состоянию ξ на любом конечном интервале $[0,T]$, $T > 0$.

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — некоторый процесс.

(A2) *Существуют такие число $\beta > 0$ и интегрируемая функция $\lambda : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, что для любого $\zeta \in G$, $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ решение $x(\zeta; \cdot)$ задачи Коши $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t))$, $x(0) = \zeta$, существует в G на $[0,\infty)$ и*

$$\max_{\theta \in [x(\zeta;t), x_*(t)]} \left| \langle f_x^0(t, \theta, u_*(t)), x(\zeta; t) - x_*(t) \rangle \right| \overset{\text{п.в.}}{\leq} \|\zeta - x_*(0)\| \lambda(t).$$

Лемма 1. *Пусть процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ удовлетворяет условиям $(A1)$ и $(A2)$. Тогда*

$$\left\| [Z_*(t)]^{-1} f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)) \right\| \leq \sqrt{n} \lambda(t) \quad \text{п.в.} \quad t \geq 0.$$

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — некоторый процесс.

$(A2')$ *Существуют такие число* $\beta > 0$ *и интегрируемая функция* $\lambda : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, *что для любого* $\zeta \in G$, $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ *решение* $x(\zeta; \cdot)$ *задачи Коши* $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t))$, $x(0) = \zeta$, *существует в* G *на* $[0, \infty)$ *и для любых* $\|\zeta_i - x_*(0)\| < \beta$, $i = 1, 2$, *имеем*

$$\max_{\theta \in [x(\zeta_1; t), x(\zeta_2; t)]} \left| \langle f_x^0(t, \theta, u_*(t)), x(\zeta_1; t) - x(\zeta_2; t) \rangle \right| \overset{\text{п.в.}}{\leq} \|\zeta_1 - \zeta_2\| \lambda(t).$$

Пусть $\forall$ $(x(\zeta;\cdot), u_*(\cdot))$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ выполняется условие $(A1)$.

Определим открытое множество $\Omega \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ равенством

$$\Omega = \bigcup_{\zeta:\ \|\zeta - x_*(0)\| < \beta} \{(\tau,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1} : \xi = x(\zeta;\tau):\ \tau \geq 0\}.$$

Лемма 2. *Пусть для процесса* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *выполняется условие* $(A2')$ *и для любого процесса* $(x(\zeta;\cdot), u_*(\cdot))$, $\|x(\zeta;0) - x_*(0)\| < \beta$, *выполняется условие* $(A1)$. *Тогда для любой точки* $(\tau,\xi) \in \Omega$ *имеем*

$$\left\| [Z(\tau,\xi;t)]^{-1} f_x^0(t, x(\tau,\xi;t), u_*(t)) \right\| \leq \sqrt{n}\lambda(t) \quad \textit{при п.в.} \quad t \geq 0.$$

Здесь $Z(\tau,\xi;\cdot)$ — матричное решение линейной системы

$$\dot{z}(t) = -\left[f_x(t, x(\tau,\xi;t), u_*(t))\right]^* z(t),$$

удовлетворяющее начальному условию $Z(\tau,\xi;0) = I$.

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — допустимый процесс, $u(\cdot)$ — некоторое управление и $\tau > 0$.

Определим составное управление $u_*^\tau(\cdot)$ равенством

$$u_*^\tau(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0,\tau), \\ u_*(t), & t \in [\tau,\infty). \end{cases}$$

(A3) *Существует такое* $\varepsilon > 0$, *что если для допустимого процесса* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *в момент* $\tau \geq 0$ *выполняется неравенство* $\rho(x_*(\tau), M_\infty) \leq \varepsilon$, *то существует такое* $\delta(\tau, x_*(\tau)) > 0$, *что для любой траектории* $x(\cdot)$, *соответствующего управлению* $u(\cdot)$ *на интервале* $[0,\tau]$ *в* G *с начальным состоянием* $x(0) \in M_0$ *и удовлетворяющего неравенствам* $\|x(\tau) - x_*(\tau)\| \leq \delta(\tau, x_*(\tau))$ *и* $\rho(x(\tau), M_\infty) \leq \rho(x_*(\tau), M_\infty)$, *пара* $(x_*^\tau(\cdot), u_*^\tau(\cdot))$ *— допустимый процесс. Здесь,* $u_*^\tau(\cdot)$ *— составное управление, соответствующее* $u(\cdot)$, $u_*(\cdot)$ *и* τ, *а* $x_*^\tau(\cdot)$ *— соответствующая траектория.*

Функция стоимости и цена в экономике

Пусть $V(\tau, \zeta)$ есть **стоимость** (вектора) капитала $\zeta \in G$ в момент времени $\tau \geq 0$ и $V(\cdot, \cdot) \in C^1\left([0, \infty) \times G, \mathbb{R}^1\right)$.

Цена $\equiv$ приращение стоимости капитала при увеличении его величины на единицу $(n = 1)$:

$$p(\tau, \zeta) = V(\tau, \zeta + 1) - V(\tau, \zeta) \cong \frac{\partial}{\partial \zeta} V(\tau, \zeta) \cdot 1.$$

В гладком случае имеем $(n \geq 1)$:

$$V(\tau, \zeta + \Delta\zeta) - V(\tau, \zeta) = \langle \frac{\partial}{\partial \zeta} V(\tau, \zeta), \Delta\zeta \rangle + o(\|\Delta\zeta\|).$$

В гладком случае цена $p(\tau, \zeta)$ капитала $\zeta \in G$ в момент τ определяется равенством

$$p(\tau, \zeta) = \frac{\partial}{\partial \zeta} V(\tau, \zeta).$$

“Стандартная” интерпретация принципа максимума

Рассмотрим семейство задач $\{(P(\tau,\zeta))\}$, $\tau \geq 0$, $\zeta \in G$,:

$$J_\tau(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_\tau^\infty f^0(t,x(t),u(t))\,dt \to \max\,,$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \quad x(\tau)=\zeta, \qquad u(t)\in U.$$

Пусть $\forall\ \tau \geq 0$, $\zeta \in G$ в задаче $(P(\tau,\zeta))$ максимум достигается.

Тогда **функция стоимости** $V(\cdot,\cdot)$ определяется равенством

$$V(\tau,\zeta) = \max{}_{(x(\cdot),u(\cdot))} J_\tau(x(\cdot),u(\cdot)), \quad (\tau,\zeta)\in[0,\infty)\times G.$$

Теорема 1. *Пусть* $V(\cdot,\cdot)\in C^2\left([0,\infty)\times G,\mathbb{R}^1\right)$ *и* $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ — *оптимальная пара в задаче* (P)*. Тогда* $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ *удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме* ($\psi^0=1$) *вместе с сопряженной переменной* $\psi(\cdot)$*, определяемой равенством*

$$\psi(t) = V_x(t,x_*(t)), \qquad t\geq 0.$$

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — некоторый процесс и выполняется $(A2')$.

Пусть $\forall$ $(x(\zeta;\cdot), u_*(\cdot))$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ выполняется условие $(A1)$.

Пусть $0 \leq \tau < s$ и $(\tau, \xi) \in \Omega$

Определим **функцию межвременной полезности** $\pi(\tau, \cdot, s)$ на множестве

$$G_\tau = \{x \in G : \ (\tau, x) \in \Omega\}$$

равенством

$$\pi(\tau, \xi, s) = f^0(s, x(\tau, \xi; s), u_*(s)), \qquad \xi \in G_\tau.$$

Пусть процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ удовлетворяет $(A2')$ и значение $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ конечно.

Тогда $\forall\ (\tau, \xi) \in \Omega$ интеграл

$$W(\tau, \xi) = \int_{\tau}^{\infty} \pi(\tau, \xi, s)\, ds$$

сходится и функцию $W(\cdot, \cdot)$ будем называть **функцией условной стоимости**.

Лемма 3. *Пусть для процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ выполняется $(A2')$, значение $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ конечно и для любого процесса $(x(\zeta; \cdot), u_*(\cdot))$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ выполняется $(A1)$. Тогда для любого $\tau \geq 0$ функция $\xi \mapsto W(\tau, \xi)$ непрерывно дифференцируема на G_τ и*

$$W_\xi(\tau, \xi) = \int_{\tau}^{\infty} \pi_\xi(\tau, \xi, s)\, ds$$
$$= Z(\tau, \xi; \tau) \int_{\tau}^{\infty} [Z(\tau, \xi; s)]^{-1} f_x^0(s, x(\tau, \xi; s), u_*(s))\, ds.$$

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — слабо обгоняющий процесс, величина $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ конечна и выполняются условия $(A2')$ и $(A3)$. Пусть для любого процесса $(x(\zeta;\cdot), u_*(\cdot))$, $\|\zeta - x_0\| < \beta$ выполняется $(A1)$. Выберем $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim_{k\to\infty} T_k = \infty$ и $\lim_{k\to\infty} \rho(x_*(T_k), M_\infty) = 0$.

Для $k = 1, 2, \ldots$ положим

$$M_k = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \rho(x, M_\infty) \le \rho(x_*(T_k), M_\infty),\ \|x - x_*(T_k)\| \le \delta(T_k, x_*(T_k))\}.$$

Задача (P_k):

$$J_k(x(\cdot), u(\cdot)) = \varphi(x(0)) + W_k(x(T_k)) + \int_0^{T_k} f^0(t, x(t), u(t))\, dt \to \max,$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

$$x(0) \in M_0, \qquad x(T_k) \in M_k,$$

$$u(t) \in U(t).$$

Функция $W_k(\cdot)\colon = W(\cdot, T_k)$ непрерывно дифференцируема на G_{T_k}.

Теорема 2. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — слабо обгоняющий процесс в (P), значение $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ конечно и выполняются условия $(A2')$ и $(A3)$. Пусть $\forall\ \zeta \in M_0$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$, для $(x(\zeta;\cdot), u_*(\cdot))$ выполняется $(A1)$. Тогда существуют такая ненулевая пара $\psi^0 \geq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, что

(i) Функция $\psi\colon\ [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, определенная равенством

$$\psi(t) = -Z_*(t)\xi + \psi^0 Z_*(t) \int_t^\infty [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds, \qquad t \geq 0,$$

лок. абсолютно непрерывна и удовлетворяет П.М.П.:

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t)),$$

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} H(t, x_*(t), \psi^0, \psi(t)).$$

(ii) Выполняются включения

$$\psi(0) \in -\psi^0 \widehat{\partial}\varphi(x_*(0)) + \widehat{N}_{M_0}(x_*(0)),$$

$$\xi \in \mathrm{Ls}_{\,t\to\infty:\ \rho(x_*(t), M_\infty)\to 0} \left\{ [Z_*(t)]^{-1} N_*(t) \right\}.$$

Здесь

$$N_*(t) = \{\lambda\zeta\colon\ \lambda \geq 0,\ \zeta \in \widehat{\partial}\rho(x_*(t), M_\infty + \rho(x_*(t), M_\infty)B^n(0))\}.$$

В силу ПМП $\exists$ пара $(\psi_k^0, \psi_k(\cdot))$, $\psi_k^0 + \|\psi_k(0)\| = 1$:

1)
$$\dot{\psi}_k(t) \overset{\text{п.в}}{=} -\left[f_x(t, x_*(t), u_*(t))\right]^* \psi_k(t) - \psi_k^0 f_x^0(x_*(t), u_*(t)),$$

2)
$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi_k^0, \psi_k(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} H(t, x_*(t), \psi_k^0, \psi_k(t)),$$

3)
$$\psi_k(0) \in -\psi_k^0 \widehat{\partial}\varphi(x_*(0)) + \widehat{N}_{M_0}(x_*(0)), \ \psi_k(T_k) \in \psi_k^0 \widehat{\partial} W_k(x_*(T_k)) - \widehat{N}_{M_k}(x_*(T_k)).$$

Поскольку
$$\widehat{N}_{M_k}(x_*(T_k)) = \{\lambda\zeta\colon\ \lambda \geq 0, \zeta \in \widehat{\partial}\rho(x_*(T_k), M_\infty + \rho(x_*(T_k), M_\infty)B^n(0))\},$$

то
$$\psi_k(t) = Z_*(t)\left[Z_*(T_k)\right]^{-1}\left[\psi_k^0 \frac{\partial}{\partial x} W_k(x_*(T_k)) - \lambda_k\zeta_k\right]$$
$$+ \psi_k^0 Z_*(t) \int_t^{T_k} \left[Z_*(s)\right]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s)) \, ds.$$

(a) $\exists \{k_i\}_{i=1}^{\infty}$: $\lambda_{k_i}\zeta_{k_i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots$;

$$\begin{aligned}\psi_k(t) = \psi_k^0 Z_*(t)\,[Z_*(T_k)]^{-1}\,\frac{\partial}{\partial x} W_k(x_*(T_k))\\ + \psi_k^0 Z_*(t) \int_t^{T_k} [Z_*(s)]^{-1}\, f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds,\\ = \psi_k^0 Z_*(t) \int_t^{\infty} [Z_*(s)]^{-1}\, f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds, \qquad t \geq 0.\end{aligned}$$

(b) $\forall\ k$ имеем $\lambda_k \|\zeta_k\| > 0$. Определим вектор $\xi_k = \lambda_k \zeta_k$. Тогда

$$\begin{aligned}\psi_k(0) = [Z_*(T_k)]^{-1}\left[\psi_k^0 \frac{\partial}{\partial x} W_k(x_*(T_k)) - \xi_k\right]\\ + \psi_k^0 \int_0^{T_k} [Z_*(s)]^{-1}\, f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds\\ = \psi_k^0 \int_0^{\infty} [Z_*(s)]^{-1}\, f_x^0(x_*(s), u_*(s))\, ds - [Z_*(T_k)]^{-1}\,\xi_k. \qquad \square\end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть $M_\infty = \mathbb{R}^n$. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — слабо обгоняющий процесс в (P), $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) < \infty$ и выполняется условие $(A2')$. Пусть для любого $\zeta \in M_0$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$, для процесса $(x(\zeta;\cdot), u_*(\cdot))$ выполняется $(A1)$. Тогда для любого $t \geq 0$ функция $W(t,\cdot)$ непрерывно дифференцируема на множестве $G_t = \{x \in G\colon\ (t,x) \in \Omega\}$ и выполняются следующие условия:

(i) Функция $\psi\colon\ [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, определенная равенством

$$\psi(t) = W_x(t, x_*(t)), \qquad t \geq 0,$$

локально абсолютно непрерывна и удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума с $\psi^0 = 1$.

(ii) Выполняется условие трансверсальности

$$\psi(0) \in -\widehat{\partial}\varphi(x_*(0)) + \widehat{N}_{M_0}(x_*(0)),$$

(iii) Частная производная $W_t(t, x_*(t))$ существует при п.в. $t \geq 0$ и

$$W_t(t, x_*(t)) + \sup_{u \in U(t)} \left\{ \langle W_x(t, x_*(t)), f(t, x_*(t), u)\rangle + f^0(t, x_*(t), u) \right\} \overset{\text{п.в.}}{=} 0.$$

Пример. Роль условия роста $(A2)$

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-t}\left[u(t) - 5x(t)^2\right]dt \to \max\,,$$

$$\dot{x}(t) = (u(t) + x(t))\,\phi(x(t)), \quad x(0) = 0, \quad G = (-\infty,\infty),$$

$$u(t) \in [0,1].$$

Здесь $\phi : \mathbb{R}^1 \to [0,1]$ – такая гладкая функция, что $\phi(x) \equiv 1$ если $|x| \le 1$, и $\phi(x) \equiv 0$ если $|x| \ge 2$.
В этом примере $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$, $x_*(t) \equiv 0$, $u_*(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$, $t \ge 0$.
Так как $Z_*(t) = e^{-t}$, $f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)) = -10x_*(t)e^{-t} \equiv 0$, $t \ge 0$, то

$$\psi(t) = Z_*(t)\int_t^\infty Z_*^{-1}(s) f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\,ds \equiv 0, \qquad t \ge 0,$$

Однако, для $u_*(t) \equiv 0$ и $\psi(t) \equiv 0$, $t \ge 0$:

$$u_*(t)\left(e^{-t} + \psi(t)\right) \neq \max{}_{u\in[0,1]}\left[u\left(e^{-t} + \psi(t)\right)\right] \equiv e^{-t}.$$

П.М.П. для $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ выполняется с $\psi^0 = 1$, $\psi(t) = -e^{-t}$, $t \ge 0$.

Публикации

[11] Асеев С.М., О некоторых свойствах сопряженной переменной в соотношениях принципа максимума для задач оптимального экономического роста, Труды Ин-та математики и механики УрО РАН, 19, № 4 (2013), 15–24.

[12] Асеев С.М., Сопряженные переменные и межвременные цены в задачах оптимального управления на бесконечном интервале времени, Труды МИАН, 290 (2015), 239–253.

[13] Aseev S.M., Veliov, V.M., Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions, Труды Ин-та математики и механики УрО РАН, 20 (2014), 41–57.

[14] Aseev S.M., Necessary conditions for the optimality and sustainability of solutions in infinite-horizon optimal control problems, Mathematics, 11 (2023), 3851.