Эволюционные дифференциальные уравнения и симметрии систем конечного типа

А.Г. Кушнер
МГУ – ИПУ РАН

Семинар “Геометрическая теория оптимального управления”

Москва, МИАН
16 марта 2023 г.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)}$$

Симметрии вполне интегрируемых распределений

$$\mathcal{P} : \mathbb{R}^m \ni a \mapsto \mathcal{P}(a) \subset T_a\mathbb{R}^m.$$

$$\mathcal{P}(a) = \mathrm{Span}\left(X_{1,a}, \ldots, X_{p,a}\right), \qquad \mathcal{P}(a) = \bigcap_{i=1}^{m-p} \ker \omega_{i,a}.$$

Определение

Диффеоморфизм $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ называется симметрией распределения $\mathcal{P}$ если $\Phi_*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, т.е.

$$\Phi_*(\mathcal{P}(a)) = \mathcal{P}(\Phi(a)) \quad \forall a \in \mathbb{R}^m$$

Инфинитезимальный аналог: $\mathcal{L}_X(\omega_i) \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{m-p} = 0$.
$\mathrm{Sym}(\mathcal{P})$ – $\mathbb{R}$-алгебра Ли:

- $X + Y \in \mathrm{Sym}(\mathcal{P}) \quad \& \quad [X, Y] \in \mathrm{Sym}(\mathcal{P})$;
- $\lambda X \in \mathrm{Sym}(\mathcal{P})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Определение

Характеристические симметрии распределения $\mathcal{P}$:

$$\mathrm{Char}(\mathcal{P}) := \mathrm{Sym}(\mathcal{P}) \cap D(\mathcal{P})$$

Теорема

Характеристические симметрии касаются максимальных интегральных многообразий распределения $\mathcal{P}$ и образуют идевл алгебры Ли $\mathrm{Sym}(\mathcal{P})$.

Определение

Тасующие симметрии распределения $\mathcal{P}$:

$$\mathrm{Shuf}(\mathcal{P}) := \mathrm{Sym}(\mathcal{P})/\mathrm{Char}(\mathcal{P}).$$

Симметрии систем PDE конечного типа

$$\boxed{\frac{\partial^{q+1} v}{\partial x^{\sigma+1_i}} = V_{\sigma+1_i}\left(x, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^q v}{\partial x^q}\right), \quad |\sigma| = q; \quad i = 1, \ldots n.}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ – мультииндекс, $\sigma_i \in \{0, 1, \ldots, q\}$, $|\sigma| = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n$,

$$\frac{\partial^{q+1} v}{\partial x^{\sigma+1_i}} = \frac{\partial^{q+1} v}{\partial x_1^{\sigma_1} \ldots \partial x_i^{\sigma_i+1} \ldots \partial x_n^{\sigma_n}},$$

$$\sigma + 1_i = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_i + 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n).$$

Пусть J^q – пространство q-джетов гладких функций на $\mathbb{R}^n$ с координатами

$$x([h]_a^q) = a, \quad v_\sigma([h]_a^q) = \frac{\partial^{|\sigma|} h}{\partial x_1^{\sigma_1} \ldots \partial x_n^{\sigma_n}}(a).$$

$$\omega_\sigma = \begin{cases} dv_\sigma - \sum\limits_{i=1}^{n} v_{\sigma+1_i}\, dx_i, & \text{if } 0 \le |\sigma| < q, \\ dv_\sigma - \sum\limits_{i=1}^{n} V_{\sigma+1_i}(x, v_\sigma)\, dx_i, & \text{if } |\sigma| = q. \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : J^q \ni \theta \longmapsto \mathcal{P}(\theta) = \bigcap_{0 \le |\sigma| \le q} \ker \omega_\sigma|_\theta \subset T_\theta J^q, \qquad \dim \mathcal{P} = n$$

Определение

n-мерное подмногообразие

$$\Gamma_h^q = \left\{ v_\sigma = \frac{\partial^q h}{\partial x^\sigma},\ 0 \le |\sigma| \le q \right\} \subset J^q$$

называется q-графиком функции $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Пусть распределение $\mathcal{P}$ вполне интегрируемо. Тогда каждое его максимальное многообразие является q-графиком решения системы PDE.

Модуль $D(\mathcal{P})$ порождён векторными полями

$$\mathcal{D}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{0\le|\sigma|<q} v_{\sigma+1_i}\frac{\partial}{\partial v_\sigma} + \sum_{|\sigma|=q} V_{\sigma+1_i}(x, v_\sigma)\frac{\partial}{\partial v_\sigma} \quad (i = 1, \dots n)$$

$$\boxed{\mathrm{Char}(\mathcal{P}) = \{h_1\mathcal{D}_1 + \dots + h_n\mathcal{D}_n |\, h_1, \dots, h_n \in C^\infty(J^q)\}}$$

Теорема

Любой элемент алгебры $\mathrm{Shuf}(\mathcal{P})$ *имеет единственного представителя вида*

$$S_\varphi = \sum_{0\le|\sigma|\le q} \mathcal{D}^\sigma(\varphi)\frac{\partial}{\partial v_\sigma},$$

где $\mathcal{D}^\sigma = \mathcal{D}_1^{\sigma_1} \circ \dots \circ \mathcal{D}_n^{\sigma_n}$ *и* φ *– функция на* J^q*, удовлетворяющая дифференциальному уравнению*

$$\mathcal{D}^{\sigma+1_i}(\varphi) - \sum_{|\sigma|=q} \mathcal{D}^\sigma(\varphi)\frac{\partial V_{\sigma+1_i}}{\partial v_\sigma} = 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad |\sigma| = q.$$

Пример: $n = 2, q = 1$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} = V_{20}\left(x_1, x_2, v, \dfrac{\partial v}{\partial x_1}, \dfrac{\partial v}{\partial x_2}\right), \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} = V_{11}\left(x_1, x_2, v, \dfrac{\partial v}{\partial x_1}, \dfrac{\partial v}{\partial x_2}\right), \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = V_{02}\left(x_1, x_2, v, \dfrac{\partial v}{\partial x_1}, \dfrac{\partial v}{\partial x_2}\right). \end{cases}$$

$$\omega_{00} = dv_{00} - v_{10}dx_1 - v_{01}dx_2,$$
$$\omega_{10} = dv_{10} - V_{20}dx_1 - V_{11}dx_2,$$
$$\omega_{01} = dv_{01} - V_{11}dx_1 - V_{02}dx_2,$$
$$\mathcal{D}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + v_{10}\frac{\partial}{\partial v_{00}} + V_{20}\frac{\partial}{\partial v_{10}} + V_{11}\frac{\partial}{\partial v_{01}},$$
$$\mathcal{D}_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + v_{01}\frac{\partial}{\partial v_{00}} + V_{11}\frac{\partial}{\partial v_{10}} + V_{02}\frac{\partial}{\partial v_{01}}$$

Условия теоремы Фробениуса:

$$\begin{cases} -V_{11}\dfrac{\partial V_{11}}{\partial v_{01}} + V_{02}\dfrac{\partial V_{20}}{\partial v_{01}} - V_{20}\dfrac{\partial V_{11}}{\partial v_{10}} + V_{11}\dfrac{\partial V_{20}}{\partial v_{10}} - v_{10}\dfrac{\partial V_{11}}{\partial v_{00}} + v_{01}\dfrac{\partial V_{20}}{\partial v_{00}} - \dfrac{\partial V_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_{20}}{\partial x_2} = 0, \\ -V_{11}\dfrac{\partial V_{02}}{\partial v_{01}} + V_{02}\dfrac{\partial V_{11}}{\partial v_{01}} - V_{20}\dfrac{\partial V_{02}}{\partial v_{10}} + V_{11}\dfrac{\partial V_{11}}{\partial v_{10}} - v_{10}\dfrac{\partial V_{02}}{\partial v_{00}} + v_{01}\dfrac{\partial V_{11}}{\partial v_{00}} - \dfrac{\partial V_{02}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_{11}}{\partial x_2} = 0. \end{cases}$$

$$S_\varphi = \varphi\frac{\partial}{\partial v_{00}} + \mathcal{D}_1(\varphi)\frac{\partial}{\partial v_{10}} + \mathcal{D}_2(\varphi)\frac{\partial}{\partial v_{01}}.$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1^2(\varphi) - S_\varphi(V_{20}) = 0, \\ \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2(\varphi) - S_\varphi(V_{11}) = 0, \\ \mathcal{D}_2^2(\varphi) - S_\varphi(V_{02}) = 0. \end{cases}$$

Определение

Система конечного типа

$$\frac{\partial^{q+1} v}{\partial x^{\sigma+1_i}} = V_{\sigma+1_i}\left(x, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^q v}{\partial x^q}\right), \quad |\sigma| = q; \quad i = 1, \ldots n$$

называется конечномерной динамикой эволюционного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(x, \frac{\partial^{|\sigma|} u}{\partial x^\sigma}\right), \quad 0 \le |\sigma| \le k$$

если функция

$$\varphi = f(x, v_\mu, V_{\sigma+1_i}), \text{ где } |\mu| \le q, \ |\sigma| = q, \ i = 1, \ldots n$$

является производящей функцией её тасующей симметрии.

Для любого решения $v = h(x)$ системы конечного (с.к.т.) типа его q-график является максимальным интегральным многообразием распределения $\mathcal{P}$. Если Φ_t – симметрия с.к.т., то $\Phi_t\left(\Gamma_h^q\right)$ также является q-графиком другого решения для любого $t \in I$.
Многообразие

$$L := \bigcup_{t \in I} \Phi_t\left(\Gamma_h^q\right) \subset J^q(\mathbb{R}^{n+1})$$

является q-графиком некоторого решения $u = U(t, x)$ эволюционного уравнения.

Пример

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y}}$$

Тогда $n = 2$, $\psi = v_{20} + v_{02} + v_{10} + v_{00}v_{01}$ и $\varphi = V_{20} + V_{02} + v_{10} + v_{00}v_{01}$. Динамика с $q = 1$:

$$v_{x_1x_1} = av_{x_1} + bv_{x_2}, \quad v_{x_1x_2} = v_{x_2x_2} = 0$$

$$v(x_1, x_2) = C_1e^{ax_1} + C_2(ax_2 - bx_1) + C_3$$

$$\varphi = v_{00}v_{01} + bv_{01} + (a+1)v_{10}$$

$$S_\varphi = ((b + v_{00})v_{01} + (a+1)v_{10})\frac{\partial}{\partial v_{00}} + (a(a+1)v_{10} + v_{01}(v_{10} + ba + b))\frac{\partial}{\partial v_{10}} + v_{01}^2\frac{\partial}{\partial v_{01}}.$$

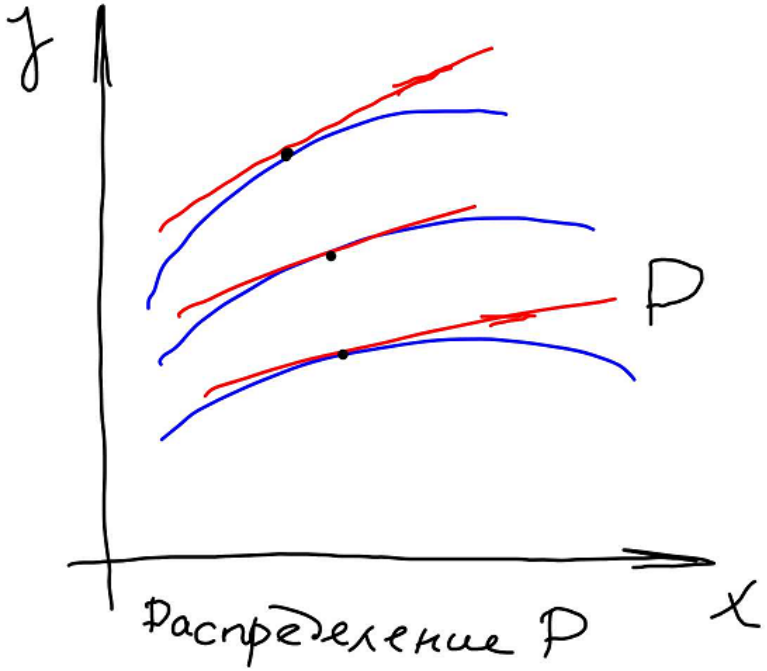
$$\Phi_t : \begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = x_2, \\ v_{00} = \dfrac{a(bv_{01}t + v_{10}) + bv_{01} - a^2 v_{00} - (av_{10} + bv_{01})e^{a(a+1)t}}{a^2(tv_{01} - 1)}, \\ v_{10} = \dfrac{(av_{10} + bv_{01} - bv_{01}e^{-a(a+1)t})e^{a(a+1)t}}{a(1 - tv_{01})}, \\ v_{01} = \dfrac{v_{01}}{1 - tv_{01}}. \end{cases}$$

Решение эволюционной системы:

$$u(t, x, y) = \frac{C_2(ay - b(t + x)) + C_1 e^{a(a+1)t + ax} + C_3}{1 - C_2 at}.$$

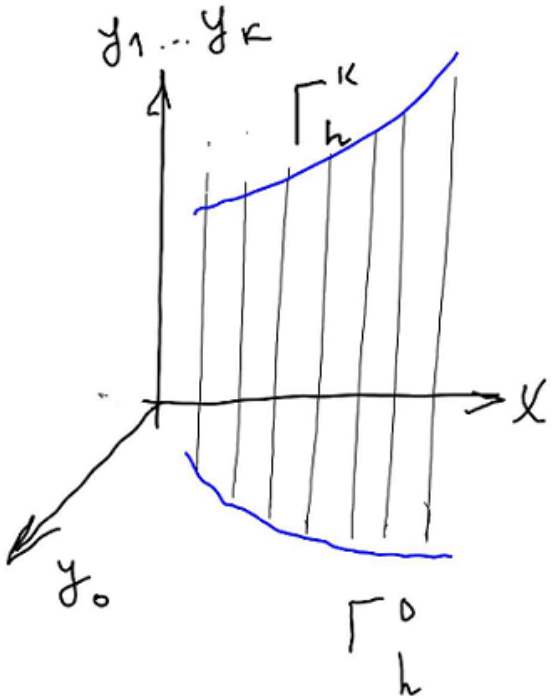
Симметрии скалярных ОДУ

$$\boxed{y' = f(x, y)}$$



$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \omega = dy - f(x, y)dx$$

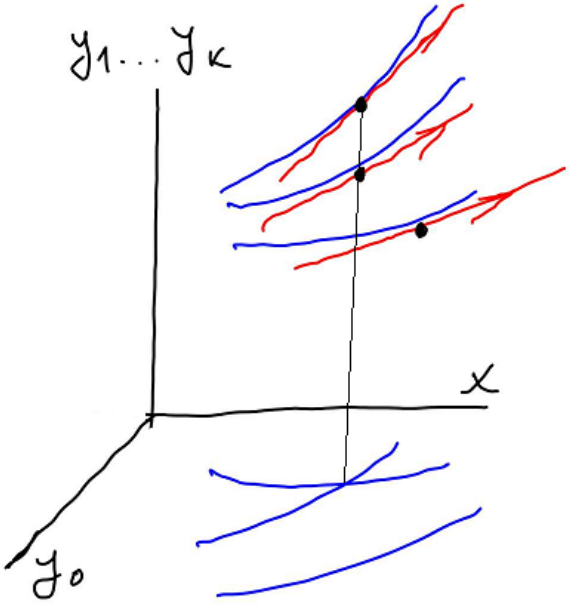
$$\boxed{y^{(k+1)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(k)})}$$



Пространство k-джетов $J^k(\mathbf{R})$:
координаты $x, y_0, y_1, \ldots, y_k$

$$\theta = [h]_a^k \in J^k(\mathbf{R})$$
$$x(\theta) = a, y_0(\theta) = h(a),$$
$$y_1(\theta) = h'(a), \ldots y_k(\theta) = h^{(k)}(a).$$

$$\Gamma_h^k = \{y_0 = h(x), y_1 = h'(x), \ldots, y_k = h^{(k)}(x)\}$$



Распределение P в J^k

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} + \cdots + f \frac{\partial}{\partial y_k}$$

$$\omega_0 = dy_0 - y_1 dx,$$

$$\omega_1 = dy_1 - y_2 dx, \ldots$$

$$\vdots$$

$$\omega_{k-1} = dy_{k-1} - y_k dx$$

$$\omega_k = dy_k - f dx$$

Симметрия ОДУ — диффеоморфизим $\Phi : J^k \to J^k$, сохраняющий распределение P: $\Phi_*(P) = P$, т.е. $\Phi_*(\mathcal{D}) = \lambda \mathcal{D}$ или эквивалентно

$$\Phi^*(\omega_i) = \sum_{j=0}^{k} \lambda_{ij} \omega_j \quad \text{или} \quad \Phi^*(\omega_i) \wedge \omega_0 \cdots \wedge \omega_k = 0$$

Инфинитезимальная симметрия — векторное поле X, сдвиги вдоль которого являются симметриями ОДУ, т.е. $\Phi_t^*(\omega_i) \wedge \omega_0 \cdots \wedge \omega_k = 0$ для всех $i = 0 \ldots k$.

$$\boxed{L_X(\omega_i) \wedge \omega_0 \cdots \wedge \omega_k = 0}$$

Инфинитезимальные симметрии ОДУ образуют алгебру Ли $\operatorname{Symm} P$.
Инфинитезимальные симметрии, сдвиги вдоль которых сохраняют каждую интегральную кривую распределения P называются **характеристическими**.

Теорема

Характеристические симметрии образуют идеал $\operatorname{Char} P$ *в алгебре Ли* $\operatorname{Symm} P$, *т.е.*

- *если* $X \in \operatorname{Char} \mathrm{P}$ *и* $Y \in \operatorname{Symm} \mathrm{P}$, *то* $[X, Y] \in \operatorname{Char} \mathrm{P}$;
- *если* $X \in \operatorname{Char} \mathrm{P}$ *и* $f \in C^\infty(J^k)$, *то* $fX \in \operatorname{Char} \mathrm{P}$.

Фактор-алгебра Ли $\boxed{\mathrm{Shuff}\,\mathrm{P} := \mathrm{Symm}\,\mathrm{P}/\mathrm{Char}\,\mathrm{P}}$ называется алгеброй Ли **тасующих** симметрий ОДУ.

$$S = \sum_{i=0}^{k} a_i \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad a_i \in C^\infty(J^k)$$

Теорема

Всякая тасующая симметрия определяется одной функцией $\varphi \in C^\infty(J^k)$, которая называется производящей функцией:

$$S = \sum_{i=0}^{k} \mathcal{D}^i(\varphi) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

$$\mathcal{D}^0 = \mathrm{id}, \quad \mathcal{D}^i = \underbrace{\mathcal{D} \circ \cdots \circ \mathcal{D}}_{i \text{ times}}$$

Симметрии систем ОДУ

$$\boxed{\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{y}^{(k)}\right)}$$

$$\mathbf{y} = \left(y^1, \ldots, y^n\right)^T, \mathbf{f} = \left(f^1, \ldots, f^n\right)^T$$

$J^k := J^k(1; n)$ – пространство k-джетов функций $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$.
Координаты x, y_i^j $(i = 0, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n)$.

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{\substack{i=0,\ldots,k-1 \\ j=1,\ldots,n}} y_{i+1}^j \frac{\partial}{\partial y_i^j} + \sum_{j=1}^{n} f^j \frac{\partial}{\partial y_k^j}$$

$$\omega_i^j = dy_i^j - y_{i+1}^j dx, \quad \omega_k^j = dy_k^j - f^j dx \quad (i = 0, \ldots, k-1; j = 1, \ldots, n).$$

Теорема

Всякая тасующая симметрия системы ОДУ определяется одной вектор-функцией $\boldsymbol{\varphi} = \left(\varphi^1, \ldots, \varphi^n\right)$:

$$S = \sum_{\substack{i=0,\ldots,k \\ j=1,\ldots,n}} \mathcal{D}^i(\varphi^j)\frac{\partial}{\partial y_i^j}.$$

Теорема

Векторное поле S *является инфинитезимальной симметрией системы ОДУ тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{D}^{k+1}(\varphi^j) - \sum_{i=0,\ldots,k} \mathcal{D}^i(\varphi^j)\frac{\partial f^j}{\partial y_i^j} = 0.$$

Динамики эволюционных систем уравнений

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \boldsymbol{\varphi}\left(x, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial x^k}\right)}$$

Пусть $\boldsymbol{\varphi}(x, \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_k)$ — производящая вектор-функция тасующих симметрий системы ОДУ

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{y}^{(k)}\right).$$

Эта система ОДУ называется **конечномерной динамикой** системы эволюционных уравнений. Число $k+1$ называется **порядком** динамики

Теорема

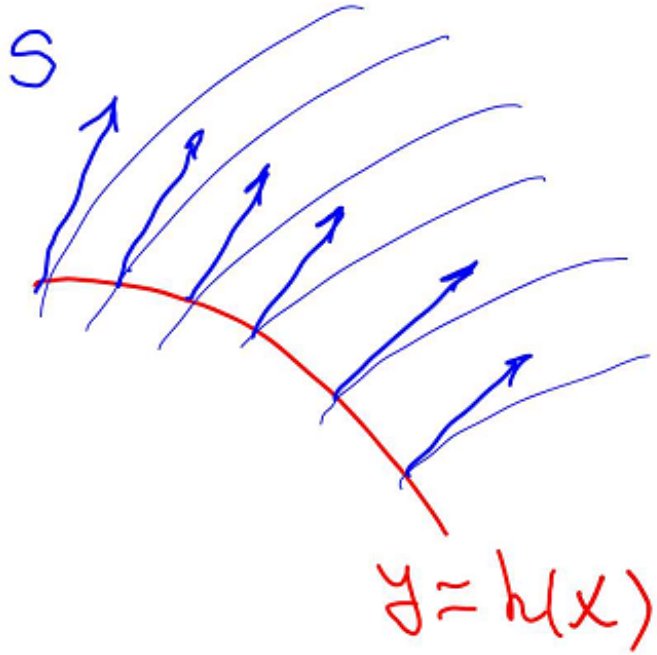
Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F = y_{k+1} - f(x, y_0, y_1, \dots, y_k) = 0$$

является динамикой эволюционного уравнения $u_t = \varphi(x, u, u_x, u_{xx}, \dots)$ тогда и только тогда, когда $[\varphi, F] = 0 \bmod \mathbf{DF}$, где $\mathbf{DF} = \langle F, D(F), D^2(F), \dots \rangle$ — дифференциальный идеал, порожденной функцией F, $D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots$ оператор полной производной по x и

$$[\phi, F] = \sum_{i \geq 0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_i} D^i(F) - \frac{\partial F}{\partial y_i} D^i(\phi) \right)$$

скобка Пуассона–Ли, продолженная в пространство джетов.



Пусть Φ_t сдвиг вдоль S от $t = 0$ до t и $\Gamma^k_{\mathbf{y}(x)} = \{\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(x), \dots\}$ — k-график решения $\mathbf{y}(x)$ системы ОДУ.

Теорема

Поверхность $\Phi_t\left(\Gamma^{(k)}_{\mathbf{y}(x)}\right) \subset J^k(2; n)$ является k-графиком решения эволюционного уравнения.

Построение решений систем эволюционных уравнений

Пространство начальных данных ОДУ в точке x_0: $\mathbf{R}^{n(k+1)}$.
Вместо векторного поля S можно использовать поле

$$E = \sum_{\substack{i=0,\dots,k \\ j=1,\dots,n}} \mathcal{D}^i(\overline{\varphi^j}) \frac{\partial}{\partial y_i^j}$$

Первый способ

Пусть $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x; \mathbf{a})$— решение системы ОДУ с начальным данными $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{a}_0, \mathbf{y}'(x_0) = \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{y}^{(k)}(x_0) = \mathbf{a}_k$. Применяя преобразование $\overline{\Phi}_t$ к точке $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k)$ (where $\mathbf{a}_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$), мы получим однопараметрическое семейство решений системы ОДУ $\mathbf{y}(x; \overline{\Phi}_t(\mathbf{a}))$. Тогда функция $\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{y}(x, \overline{\Phi}_t(\mathbf{a}))$ является решением системы эволюционных уравнений с начальными условием $\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{y}(x; \mathbf{a})$.

Второй способ

Пусть $\Phi_t^* : C^\infty(J^k) \to C^\infty(J^k)$ — "антиувлечение" функций: $\Phi_t^*(f) := f \circ \Phi_t$.

$$\Gamma^k_{\mathbf{y}(x)} = \{\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}(x) = 0,\ \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}'(x) = 0, \ldots,\ \mathbf{y}_k - \mathbf{y}^{(k)}(x) = 0\}.$$

Применив преобразование $\left(\Phi_t^{-1}\right)^*$ к этой системе, получим

$$\mathbf{F}^0(t, x, \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_k) = 0, \ldots, \mathbf{F}^k(t, x, \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_k) = 0$$

Откуда находим

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{Y}_0(t, x), \quad \mathbf{y}_1 = \mathbf{Y}_1(t, x), \quad \ldots, \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{Y}_k(t, x).$$

$$\boxed{\mathbf{u} = \mathbf{Y}_0(t, x), \quad \frac{\partial^j \mathbf{u}}{\partial x^j} = \mathbf{Y}_j(t, x)}$$

Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова

$$\boxed{u_t = u_{xx} + f(u)}$$

Теорема

Уравнение КПП допускает динамики второго порядка вида $F := y_2 - A(y_0)y_1 - B(y_0)$ тогда и только тогда, когда

$$f(u) = f_3 u^3 + f_2 u^2 + f_1 u + f_0,$$

где $f_0, \ldots, f_3 \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим случай $f_3 < 0$, т.е. $f_3 = -2q^2$. Динамика:

$$y'' + \left(3qy - \frac{f_2}{2q}\right) y' + q^2 y^3 - \frac{f_2}{2} y^2 - \frac{f_1}{2} y - \frac{f_0}{2} = 0.$$

Распределение P:

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} - \left(\left(3qy_0 - \frac{f_2}{2q} \right) y_1 + q^2 y_0^3 - \frac{f_2}{2} y_0^2 - \frac{f_1}{2} y_0 - \frac{f_0}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y_1}$$

$$\omega_1 = dy_0 - y_1 dx,$$
$$\omega_2 = dy_1 + \left(\left(3qy_0 - \frac{f_2}{2q} \right) y_1 + q^2 y_0^3 - \frac{f_2}{2} y_0^2 - \frac{f_1}{2} y_0 - \frac{f_0}{2} \right) dx.$$

Тасующие симметрии:

$$
\begin{aligned}
S_1 =& \bar{\phi}\frac{\partial}{\partial y_0} + \mathcal{D}(\bar{\phi})\frac{\partial}{\partial y_1} \\
=& \left(-3q^2y_0^3 + \frac{3}{2}f_2y_0^2 + \left(-3qy_1 + \frac{3}{2}f_1\right)y_0 + \frac{1}{2q}f_2y_1 + \frac{3}{2}f_0\right)\frac{\partial}{\partial y_0} \\
& \left(3q^3y_0^4 - 2qf2y_0^3 + \frac{1}{4q^2}(-6q^3f_1 + qf_2^2)y_0^2 + \frac{1}{4q^2}(qf_1f_2 - 6q^3f_0)y_0\right. \\
& \left. -3qy_1^2 + \frac{1}{4q^2}(6f_1q^2 + f_2^2)y_1 + \frac{1}{4q}f_0f_2\right)\frac{\partial}{\partial y_1}
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
S_2 =& y_1\frac{\partial}{\partial y_0} + \mathcal{D}(y_1)\frac{\partial}{\partial y_1} \\
=& y_1\frac{\partial}{\partial y_0} + \left(-q^2y_0^3 + \frac{1}{2}f_2y_0^2 + \left(-3qy_1 + \frac{1}{2}f_1\right)y_0 + \frac{1}{2q}f_2y_1 + \frac{1}{2}f_0\right)\frac{\partial}{\partial y_1}.
\end{aligned}
$$

$$
[S_1, S_2] = 0.
$$

$$W = \begin{Vmatrix} \omega_1(S_1) & \omega_1(S_2) \\ \omega_2(S_1) & \omega_2(S_2) \end{Vmatrix}$$

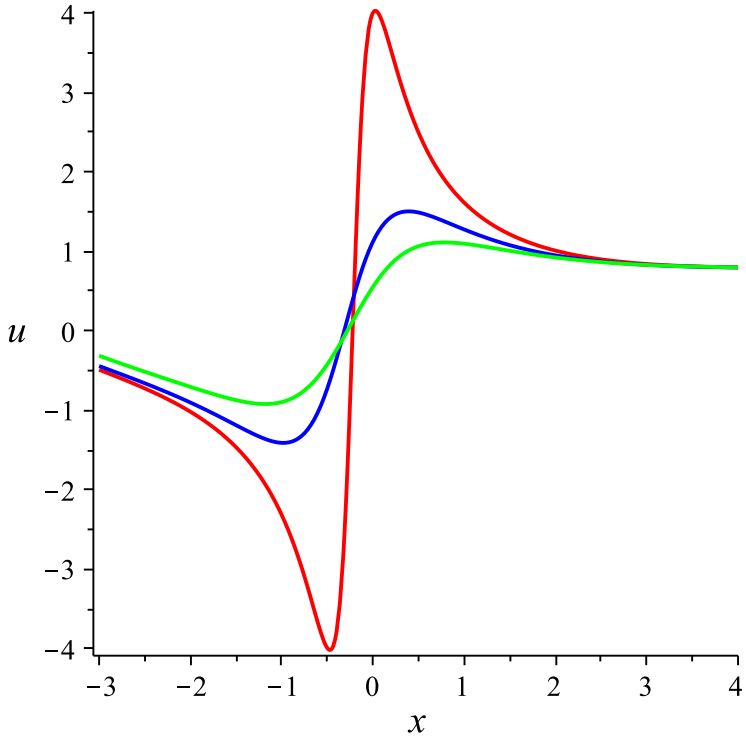
Рассмотрим область где $\det W \neq 0$. Тода вместо форм ω_1, ω_2 рассмотрим формы

$$\begin{Vmatrix} \varpi_1 \\ \varpi_2 \end{Vmatrix} = W^{-1} \begin{Vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{Vmatrix}.$$

Тогда $\varpi_i(S_j) = \delta_{i,j}$. Так как $[S_1, S_2] = 0$, то

$$d\varpi_i\,(S_1, S_2) = S_1(\varpi_i(S_2)) - S_2(\varpi_i(S_1)) - \varpi([S_1, S_2]) = 0.$$

$$d\varpi_i = 0 \Rightarrow \varpi_i = dH_i$$



$$\boxed{u_t = u_{xx} - 2u^3 + 1}$$

$$\phi = y_2 - 2y_0^3 + 1$$

Динамика:
$y'' + 3yy' + y^3 - \frac{1}{2} = 0$

$$y(x) = \frac{C_1 e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\chi} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\chi}\left(\sqrt{3}C_2 + 1\right)\cos\chi + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\chi}\left(C_2 - \sqrt{3}\right)\sin\chi}{\sqrt[3]{2}\left(C_1 e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\chi} - C_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\chi}\sin\chi + e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\chi}\cos\chi\right)}$$

$$\chi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{16}} x.$$

Уравнение реакции–диффузии с конвективным членом

$$\boxed{u_t + H(u)_x = u_{xx} + f(u)}$$

$$u_t = u_{xx} - (u+1)u_x + \frac{1}{8}u^3$$

Динамика: $F = y_2 - \frac{3}{4}y_0y_1 + \frac{1}{16}y_0^3$

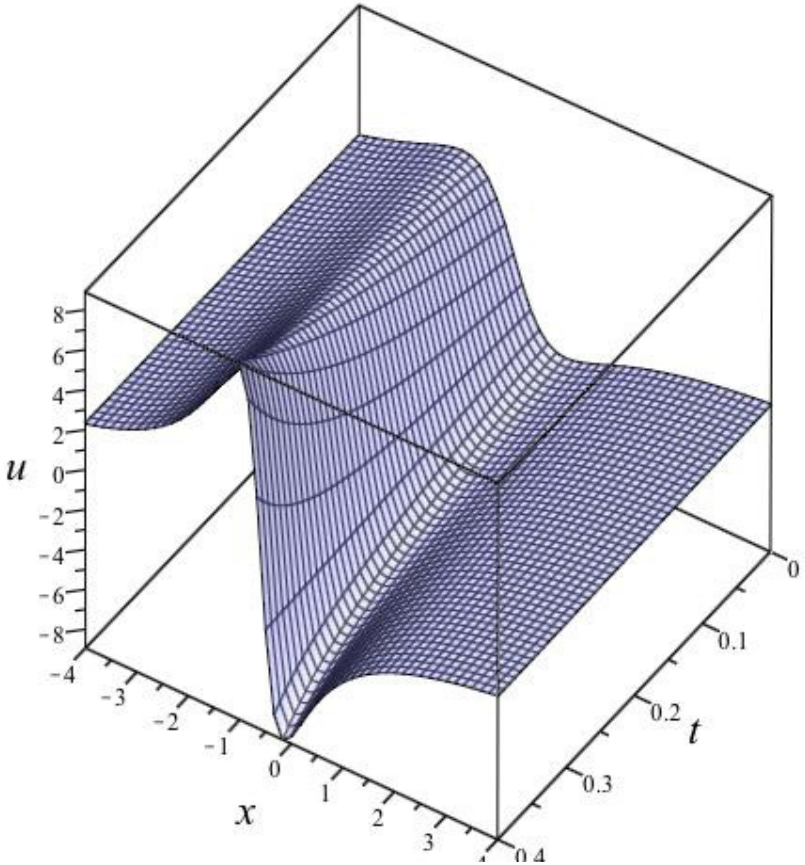
$$y(x) = -\frac{8(C_1x + C_2)}{C_1x^2 + 2C_2x + 2}$$

$$S = \left(-\frac{1}{4}y_0y_1 + \frac{1}{16}y_0^3 - y_1\right)\frac{\partial}{\partial y_0} + \left(-\frac{1}{4}y_1^2 - \frac{3}{4}y_0y_1 + \frac{1}{64}y_0^4 + \frac{1}{16}y_0^3\right)\frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Сдвиг вдоль S:

$$y_0 \mapsto \frac{8(ty_0^2 - 4y_1t + 4y_0)}{(t^2-2t)y_0^2 + 8ty_0 + 32 + (8t - 4t^2)y_1},$$

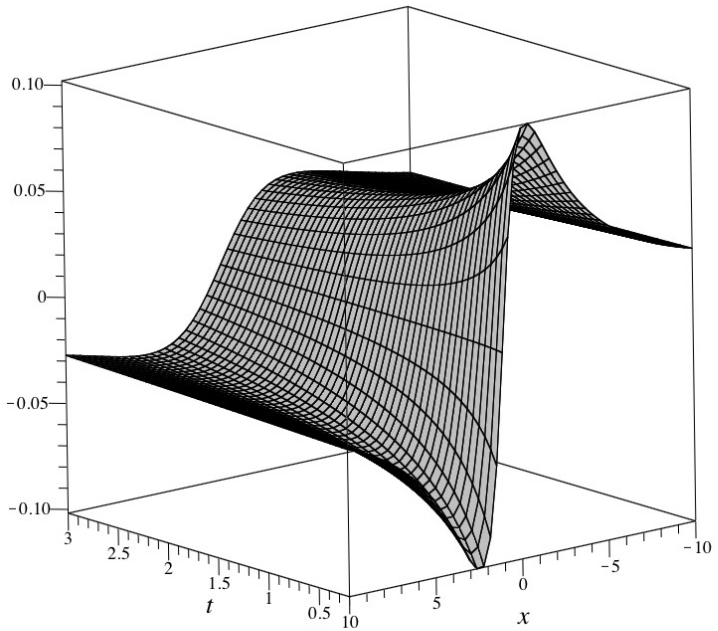
$$y_1 \mapsto \frac{8((2t+t^2)y_0^4 + 8ty_0^3 - 8ty_1(2+t)y_0^2 - 32ty_0y_1 + 128y_1 + 16t^2y_1^2 + 32ty_1^2)}{((t^2-2t)y_0^2 + 8ty_0 - 4t^2y_1 + 8y_1t + 32)^2}$$



$$u(t,x) = -\frac{8(C_1(x-t)+C_2)}{2+((x-t)^2-2t)C_1+(2(x-t))C_2}$$

Уравнение Бюргерса–Хаксли

$$\boxed{u_t + uu_x = u_{xx} + f(u)}$$



$$u_t + uu_x = u_{xx} + \frac{1}{9}u^3 + \frac{1}{3}bu^2$$

Динамика:
$y'' - yy' + \frac{1}{9}y^3 + \frac{1}{3}by^2 = 0$

$$y(x) = -\frac{3C_2 + 3b\exp(bx)}{C_1 + C_2x + \exp(bx)}.$$

$$u(t,x) = -\frac{3(b\exp(b(bt+x)) + C_2)}{C_1 + C_2bt + \exp(b(bt+x)) + C_2x}$$

Уравнение Блэка–Шоулза

$$\boxed{u_t = -\tfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} - rxu_x + ru}$$

$$F = y_1 - A(x)y_0 - B(x).$$

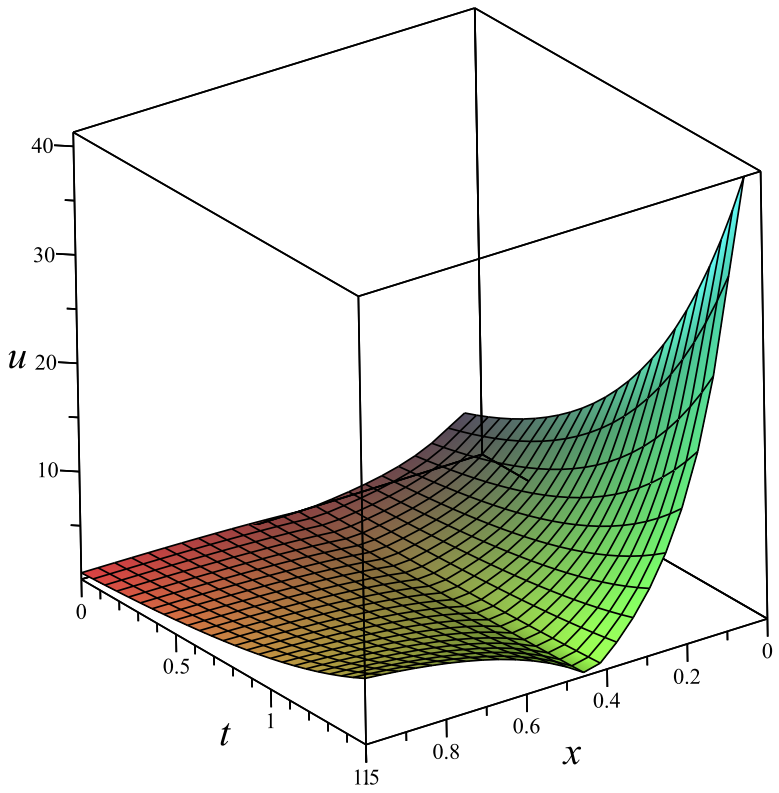
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}A''\sigma^2x^2 + (A\sigma^2x + \sigma^2 + r)xA' + A^2\sigma^2x + Ar = 0, \\ \dfrac{1}{2}B''\sigma^2x + (\sigma^2 + r)B' + \sigma^2(xA' + A)B = 0. \end{cases}$$

$$F = y_1 - \frac{1}{2\sigma^2 x}(\sigma^2 - 2r)y_0 - C_3 x^{-\frac{\sigma^2+2r}{\sigma^2}} - C_4$$

$$y(x) = C_5 x^{\frac{\sigma^2-2r}{2\sigma^2}} - \frac{2\sigma^2(C_3 x^{-\frac{2r}{\sigma^2}} - C_4 x)}{\sigma^2 + 2r},$$

$$F = y_1 - \frac{1}{2\sigma^2 x}\left(\sigma^2 - 2r - C_1 \tan\left(\frac{C_1 \ln x - C_2}{2\sigma^2}\right)\right) y_0.$$

$$y(x) = C_3 x^{\frac{\sigma^2-2r}{2\sigma^2}} \cos\left(\frac{C_1 \ln x - C_2}{2\sigma^2}\right).$$



$$u(t,x) = C_3 x^{\frac{\sigma^2-2r}{2\sigma^2}} \cos\left(\frac{C_1 \ln x - C_2}{2\sigma^2}\right) e^{-\frac{C_1^2+(\sigma^2+2r)^2}{8\sigma^2}t}.$$

$$\sigma = r = 1:$$

$$u(t,x) = \frac{e^{\frac{3}{2}t}}{\sqrt{2x}} \sqrt{\sin(\sqrt{3}\ln x) + 1}$$

Обобщенное уравнение Рапопорта – Лиса

$$\boxed{u_t = A(u)_x + B(u)_{xx}}$$

- Движение грунтовых вод.
- Распределение тепла излучением на начальной фазе ядерного взрыва.
- Фильтрация политропного газа.
- Фильтрация двухфазной жидкости без учета капилярных сил ($B(u) = 0$).
- Фильтрация двухфазной жидкости с учетом капилярных сил ($B(u) \neq 0$).

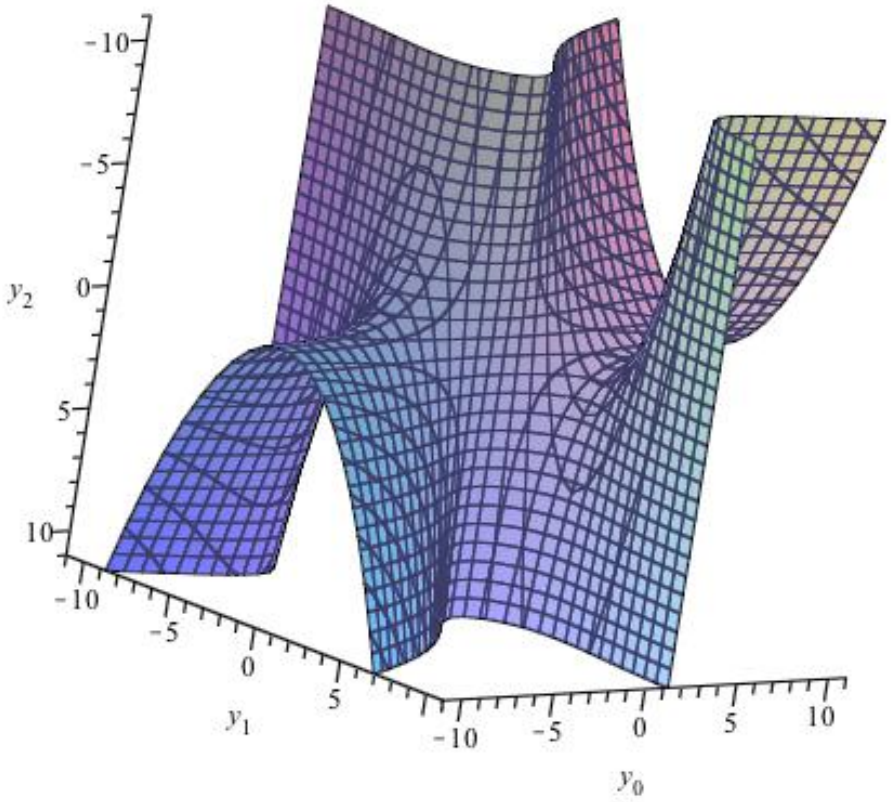
$$\phi = A'(y_0)y_1 + B''(y_0)y_1^2 + B'(y_0)y_2.$$

Теорема

Пусть $B'(u) \neq 0$, тогда уравнение Рапопорта – Лиса имеет следующие конечномерные динамики:

- *порядка 1:* y_1 *и* $B'(y_0)y_1 + A(y_0) + \alpha y_0 + \beta$;
- *порядка 2:* $B'(y_0)y_2 + B''(y_0)y_1^2 + (A'(y_0) + \alpha)y_1$;
- *порядка 3:* $B'(y_0)y_1y_3 - B'(y_0)y_2^2 + B'''(y_0)y_1^4 + 2B''(y_0)y_1^2y_2 + A''(y_0)y_1^3$.

Здесь α и β — произвольные постоянные.



Динамика второго порядка при $A(y) = y^2$, $B(y) = y^3$ и $\alpha = -90$.

Пусть функция G определена на пространстве $J^n(\mathbb{R})$, т.е. $G = G(x, y_0, y_1, \ldots, y_n)$. Обозначим

$$G[u] = G\left(x, u(t,x), \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial x^n}\right).$$

Определение

Скажем, что динамика $\mathcal{E}$ является аттрактором для решения $u(t,x)$ эволюционного уравнения $u_t = \phi(u, u_x, u_{xx})$, если

$$\lim_{t\to+\infty} F[u] = 0.$$

$$e := \frac{\partial \phi}{\partial y_0} + a, \quad p := \frac{\partial \phi}{\partial y_1} + b, \quad q := \frac{\partial \phi}{\partial y_2}.$$

Теорема

Пусть $u(t,x)$ *— решение эволюционного уравнения и* $e[u], p[u], q[u]$ *— ограниченные функции. Пусть, кроме того, выполнены следующие условия:*

$$e[u] \leq -\beta < 0 \quad \text{и} \quad q[u] \geq \alpha > 0 \tag{1}$$

при некоторых постоянных α *и* β*. Тогда динамика* $\mathcal{E}$ *является аттрактором для решения* $u(t,x)$*.*

Следствие

При выполнении условий теоремы справедливо неравенство

$$|F[u]| \leq Ce^{-\beta t},$$

где C *— некоторая положительная постоянная.*

Глубокая фильтрация: поток суспензии в пористой среде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial u}{\partial x} - h(v)u, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = h(v)u. \end{cases}$$

Производящая вектор-функция ($u^1 = u, u^2 = v$):

$$\begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1^1 - h(y_0^2)y_0^1 \\ h(y_0^2)y_0^1 \end{pmatrix}.$$

Динамики первого порядка:

$$\begin{cases} y_1^1 = f^1(y_0^1, y_0^2), \\ y_1^2 = f^2(y_0^1, y_0^2). \end{cases}$$

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + f^1(y_0^1, y_0^2)\frac{\partial}{\partial y_0^1} + f^2(y_0^1, y_0^2)\frac{\partial}{\partial y_0^2}$$

$$
\begin{aligned}
S =& \varphi^1 \frac{\partial}{\partial y_0^1} + \varphi^2 \frac{\partial}{\partial y_0^2} \\
=& \left(-y_1^1 - h(y_0^2) y_0^1\right) \frac{\partial}{\partial y_0^1} + f(y_0^2) y_0^1 \frac{\partial}{\partial y_0^2} \\
=& \left(-f^1(y_0^1, y_0^2) - h(y_0^2) y_0^1\right) \frac{\partial}{\partial y_0^1} + h(y_0^2) y_0^1 \frac{\partial}{\partial y_0^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
y_0^1 h(y_0^2) \dfrac{\partial f^1}{\partial y_0^1} - \left(f^2 + y_0^1 h(y_0^2)\right) \dfrac{\partial f^1}{\partial y_0^2} - h(y_0^2) f^1 - y_0^1 h'(y_0^2) f^2 = 0, \\
\left(f^1 + y_0^1 h(y_0^2)\right) \dfrac{\partial f^2}{\partial y_0^1} - y_0^1 h(y_0^2) \dfrac{\partial f^2}{\partial y_0^2} + h(y_0^2) f^1 + y_0^1 h'(y_0^2) f^2 = 0.
\end{cases}
$$

Случай линейной функции h: $h(y_0^2) = \alpha y_0^2 + \beta$.

$$\begin{cases} f^1 = (\delta - \alpha(y_0^1 + y_0^2))y_0^1, \\ f^2 = \dfrac{1}{\beta + \xi - \alpha y_0^1}\left((\beta + \xi - \alpha y_0^1)^2 H\left(\dfrac{\alpha y_0^2 + \beta}{\alpha(\beta + \xi - \alpha y_0^1)}\right)\right. \\ \qquad \left. -y_0^1(\alpha y_0^2 + \beta)(\xi - \alpha(y_0^1 + y_0^2))\right) \end{cases} \quad (2)$$

Положим $\alpha = -1, \beta = 1, \delta = \xi = 0$.

$$\begin{cases} y^1(x) = \dfrac{C_2}{\exp(C_1 \exp x - x - 1) - C_2}, \\ y^2(x) = \dfrac{(C_1 \exp x - 1)\exp(C_1 \exp x - 1) + C_2 \exp x}{C_2 \exp x - \exp(C_1 \exp x - 1)}, \end{cases}$$

$$S = -y_0^1(1 + y_0^1)\frac{\partial}{\partial y_0^1} + y_0^1(1 - y_0^2)\frac{\partial}{\partial y_0^2}$$

$$\Phi_t : (x, y_0^1, y_0^2) \longmapsto \left(x, \frac{y_0^1}{e^t(1 + y_0^1) - y_0^1}, -\frac{e^t((e^{-t} - 1)y_0^1 - y_0^2)}{e^t(1 + y_0^1) - y_0^1}\right)$$

$$\begin{cases} u(t,x) = \dfrac{C_2 e^{x+1}}{e^{C_1 x + t} - C_2 e^{x+1}}, \\ \\ v(t,x) = -\dfrac{C_2 e^{x+1} + (C_1 e^x - 1) e^{C_1 e^x + t}}{e^{C_1 x + t} - C_2 e^{x+1}}. \end{cases}$$

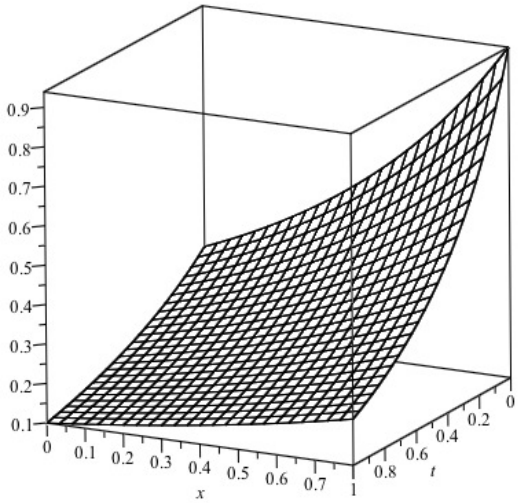


Рис. : График функции u.

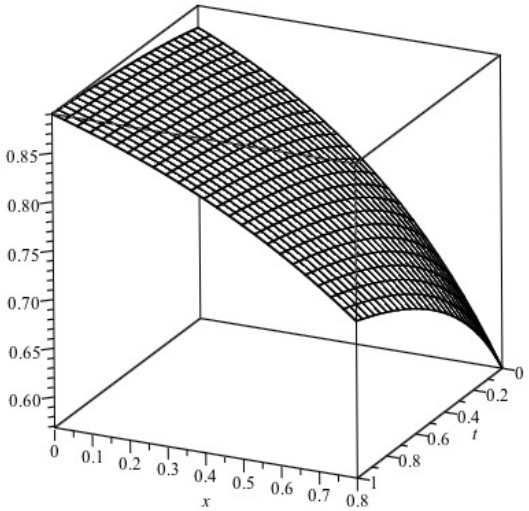


Рис. : График функции u.

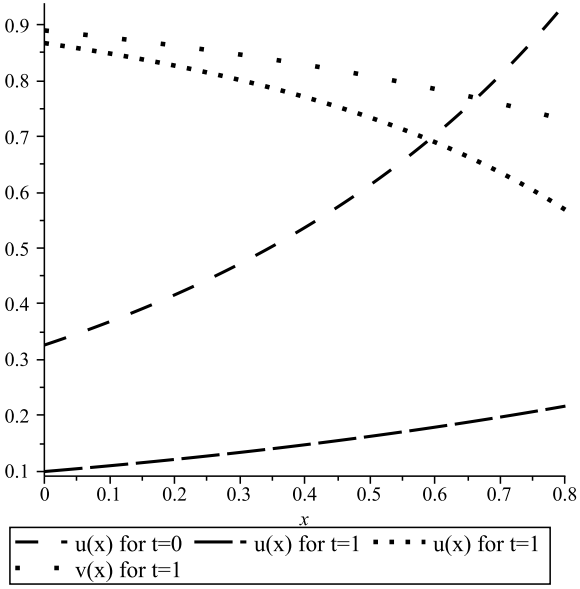


Рис. : Эволюция насыщенности $u(x)$ и осадка $v(x)$ при изменении времени от $t = 0$ до $t = 1$

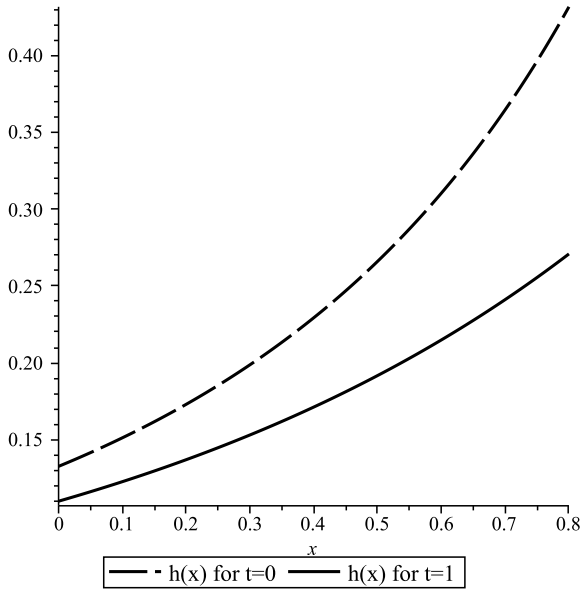


Рис. : Эволюция коэффициента фильтрации h от $t = 0$ до $t = 1$.

Неэволюционные уравнения

$$\boxed{u_{tt} = f(x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}, u_{txx}, u_{xxx}, \dots)}$$

$$\boxed{u_{tt} + 2b(x)u_{tx} + c(x)u_{xx} + h(x)u_t + g(x)u_x + f(x) = 0}$$

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t = -2b(x)v_x - c(x)u_{xx} - h(x)v - g(x)u_x - f(y). \end{cases}$$

Производящая вектор-функция:

$$\begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0^2 \\ -2b(x)y_1^2 - c(x)y_2^1 - h(x)y_0^2 - g(x)y_1^1 - f(x) \end{pmatrix}$$

Телеграфное уравнение:

$$\boxed{u_{tt} - u_{xx} = au + bu_t + c}$$

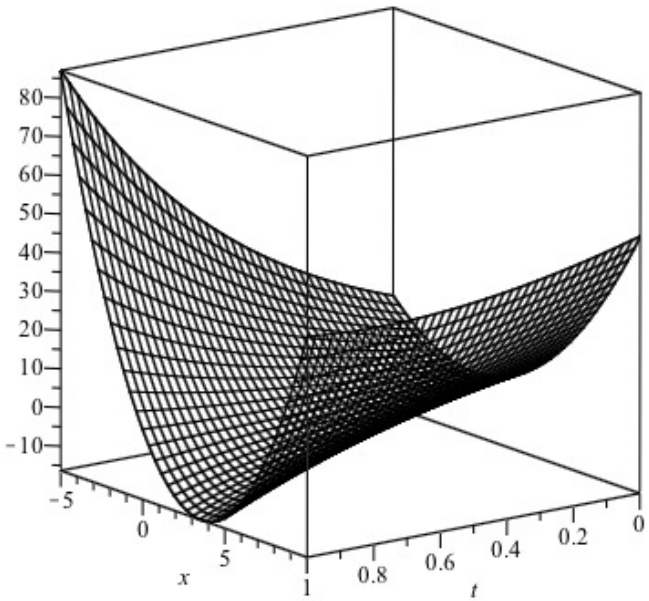
Динамика:

$$\begin{cases} y_2^1 = \dfrac{2b\alpha - (x+\beta)\alpha^2}{4b^2 + 16a - \alpha^2(x+\beta)^2} \times y_1^1 - \dfrac{4\alpha}{4b^2 + 16a - \alpha^2(x+\beta)^2} \times y_1^2, \\ y_2^2 = -\dfrac{4a\alpha}{4b^2 + 16a - \alpha^2(x+\beta)^2} \times y_1^1 - \dfrac{2b\alpha + \alpha^2(x+\beta)}{4b^2 + 16a - \alpha^2(x+\beta)^2} \times y_1^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^1(x) = \dfrac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4, \\ y^2(x) = \dfrac{1}{8\alpha} \left(x(C_2\beta - C_3)(2\beta + x)\alpha^2 + (8C_1 + 2bx^2 C_2 + 4bC_3 x)\alpha - 32\left(a + \dfrac{b^2}{4}\right) C_2 x \right) \end{cases}.$$

$$S = y_0^2 \frac{\partial}{\partial y_0^1} + \frac{(x^2-20)(y_0^1+y_0^2)+(x+2)y_1^1+x^2-20+4y_1^2}{x^2-20}\frac{\partial}{\partial y_0^2} + y_1^2\frac{\partial}{\partial y_1^1} + (y_1^1+y_1^2)\frac{\partial}{\partial y_1^2}.$$

$$u(t,x) = -1 + \frac{1}{10}\left(\frac{5}{2}x^2 + 5 + (10x+1-t)\sqrt{5}\right)e^{-\frac{t}{2}(\sqrt{5}-1)} +$$
$$+ \frac{1}{10}\left(\frac{5}{2}x^2 + 5 + (-10x-1+t)\sqrt{5}\right)e^{\frac{t}{2}(\sqrt{5}+1)}$$



Уравнение Гельмгольца

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = ku + g(x)}$$

$$g(x) = g_2 x^2 + g_1 x + g_0$$

Динамика 1:

$$\begin{cases} y_2^1 = \dfrac{y_1^1}{x+\alpha} + \dfrac{2g_2\alpha - g_1}{k(x+\alpha)}, \\ y_2^2 = \dfrac{y_1^2}{x+\alpha} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} y^1(x) = \dfrac{1}{2k}\left((C_3x^2 + 2C_3x\alpha + 2C_4)k + 2x(-2g_2\alpha + g_1)\right), \\ y^2(x) = C_1 + C_2(x+\alpha)^2. \end{cases} \tag{4}$$

Динамика 2:

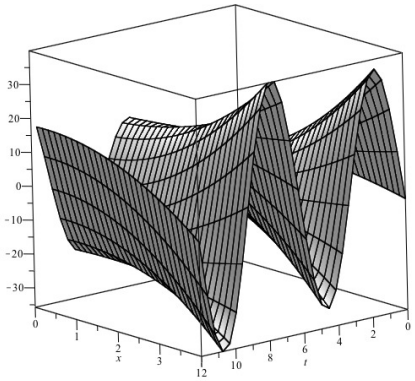
$$\begin{cases} y_2^1 - \dfrac{\beta^2(x+\alpha)y_1 + 4\beta y_1^2 + 32g_2}{(x+\alpha)^2\beta^2 + 16k} - \dfrac{(2g_2\alpha - g_1)(x+\alpha)\beta^2}{k((x+\alpha)^2\beta^2 + 16k)} = 0, \\ y_2^2 + \dfrac{4\beta k y_1 - \beta^2(x+\alpha)y_1^2 - \beta(8g_2x + 4g_1)}{(x+\alpha)^2\beta^2 + 16k} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^1(x) = & \dfrac{1}{2}C_4x^2 + C_5x + C_6, \\ y^2(x) = & \dfrac{1}{8k\beta}\left(x((C_4\alpha - C_5)k - 2\alpha g_2 + g_1)(x+2\alpha)\beta^2\right. \\ & \left. +8C_3\beta k + 32kx(C_4k - 2g_2)\right), \end{cases}$$

$$u_{tt} + u_{xx} = -u + x.$$

$$S = y_0^2 \frac{\partial}{\partial y_0^1} + \frac{x^2 - xy_0^1 - y_1^1 + 1}{x} \frac{\partial}{\partial y_0^1} + y_1^2 \frac{\partial}{\partial y_1^1} + (1 - y_1^1) \frac{\partial}{\partial y_1^2}$$

$$u(t,x) = \left(\frac{1}{2x} \left(2x^2 \sin^2 t + (4x^3 + xt) \sin t \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2\cos t \left(x^2 \cos t - \frac{1}{2} x^3 + (2t+1)x \right) \right) \right).$$



Уравнение Келдыша

$$\boxed{xu_{xx} + u_{yy} = \alpha u + \beta u_y + ax^2 + 2bx + c}$$

α, β, a, b, c — постоянные. Сиситема:

$$u_y = v, \quad v_y = -xu_{xx} + \alpha u + \beta v + ax^2 + 2bx + c,$$

Динамика: $p'' = -\frac{2a}{\alpha}, q'' = 0$
Четырёхпараметрическое семейство решений уравнения Келдыша:

$$u(x,y) =$$
$$\frac{1}{\alpha^2\sqrt{\beta^2+4\,\alpha}}(((C_3\,x + C_4)\alpha^2 + (2^{-1}\,c + bx)\alpha + ax)\sqrt{\beta^2+4\,\alpha}$$
$$+ ((\beta\,C_3 - C_1)x - C_2 + \beta\,C_4)\alpha^2 + (2^{-1}\,c + bx)\beta\,\alpha + \beta\,ax)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,(\beta+\sqrt{\beta^2+4\,\alpha})y}$$
$$+ (((C_3\,x + C_4)\alpha^2 + (2^{-1}\,c + bx)\alpha + ax)\sqrt{\beta^2+4\,\alpha} + ((-\beta\,C_3 + C_1)x + C_2 - \beta\,C_4)\alpha^2$$
$$- (2^{-1}\,c + bx)\beta\,\alpha - \beta\,ax)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,(\beta+\sqrt{\beta^2+4\,\alpha})y} - \sqrt{\beta^2+4\,\alpha}((c + ax^2 + 2\,bx)\alpha + 2\,ax)$$

Обобщённое уравнение Кана–Хилларда описывает процесс, при котором две компоненты бинарной жидкости самопроизвольно разделяются.

$$\boxed{u_t + (Du_{xx} + f(u))_{xx} = 0}$$

Если $f(u) = \sum_{i=0}^{3} f_i u^i$, это уравненение имеет тривиальную динамику $y'' = 0$, которая, однако, приводит нас к нетривиальному точному решению уравнения К–Х:

$$u(t,x) = \frac{-f_2\sqrt{1 + 12C_1^2 f_3 t} + 3f_3(C_1 x + C_2) + f_2}{3f_3\sqrt{1 + 12C_1^2 f_3 t}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. При $f_0 = f_2 = 0$ и $f_1 = 1, f_3 = -1$ получаем точное решение уравнения К–Х.