Множество достижимости управляемой системы на двухступенной группе Карно и неравенства между независимыми случайными величинами

Алексей Подобряев
Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН
Переславль-Залесский

Семинар «Геометрическая теория оптимального управления»
29 сентября 2022 г.

Свободная двухступенной группа Карно

Определение

Свободной двухступенной группой Карно ранга r называется множество $G = V \times \Lambda^2 V$ (где V векторное пространство размерности r), снабженное законом умножения

$$(v, \omega) \cdot (v', \omega') = (v + v', \omega + \omega' + v \wedge v'), \text{ где } v \in V,\ \omega \in \Lambda^2 V$$

Другими словами, $G = \mathbb{R}^r \times \mathfrak{so}_r$ с законом умножения

$$(x, y) \cdot (x', y') = (x + x', y + y' + (xx'^T - x'x^T)),$$

где $x, x' \in \mathbb{R}^r$, а $y, y' \in \mathfrak{so}_r$ суть кососимметрические матрицы.

Управляемая система

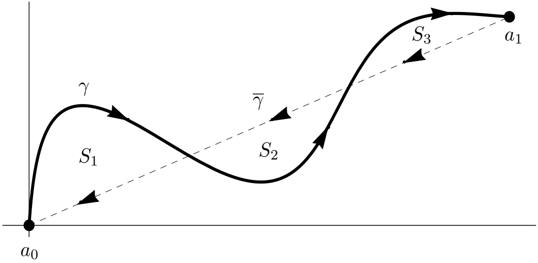
Рассмотрим левоинвариантную управляемую систему

$$\begin{aligned} \dot{v} &= u, \qquad u \in \mathbb{R}^r, \\ \dot{\omega} &= v \wedge u. \end{aligned}$$

В координатах $x = (x_1, \ldots, x_r)$, $y = (y_{ij})$, $u = (u_1, \ldots, u_r)$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= u_i, & i &= 1, \ldots, r, \\ \dot{y}_{ij} &= x_i u_j - x_j u_i, & i &< j. \end{aligned}$$

Двойственная задача Дидоны



Вычислим площадь по формуле Стокса

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma \cup \bar{\gamma}} x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1 = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma} x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1 + \mathrm{const}.$$

Значит, $2\dot{S} = x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 = x_1 u_2 - x_2 u_1$.

Множество достижимости с неотрицательными управлениями

Обозначим через $\mathcal{A}$ *множество достижимости из точки* $(0,0)$ *с управлениями* $u_1, \ldots, u_r \geqslant 0$. Иначе говоря, $\mathcal{A}$ есть *свободная двухступенная полугруппа Ли ранга* r.

Определение

Набор чисел $c_1, \ldots, c_r > 0$ определяет *неоднородное растяжение* $D_{c_1,\ldots,c_r} : G \to G$ так, что

$$D_{c_1,\ldots,c_r}(x_i, y_{ij}) = (c_i x_i, c_i c_j y_{ij}), \;\; i = 1, \ldots, r, \;\; i < j.$$

Эти преобразования сохраняют управляемую систему. Достаточно описать сечение множества достижимости

$$\mathcal{A}_1 = \{(x, y) \in \mathcal{A} \,|\, x = (1, \ldots, 1)\}.$$

Вероятностная интерпретация множества достижимости

Г. Абельс и Э. Б. Винберг[1] предложили вероятностную интерпретацию сечения множества достижимости $\mathcal{A}_1$. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_r$ суть независимые случайные величины.
Введем обозначения

$$p_{ij} = P(\xi_i < \xi_j), \qquad i < j,$$

тогда числа $y_{ij} = 2p_{ij} - 1$ суть координаты точек множества $\mathcal{A}_1$.
Таким образом, вероятностную интерпретацию имеем множество

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}((1, \ldots, 1)^T + \mathcal{A}_1).$$

[1] H. Abels, È. B. Vinberg. On free two-step nilpotent Lie semigroups and inequalities between random variables // J. Lie Theory. 29, 1, 79–87 (2019)

Доказательство вероятностной интерпретации

Рассмотрим случай $r = 2$. Пусть F_1, F_2 суть функции распределения независимых случайных величин ξ_1, ξ_2. Тогда

$$P(\xi_1 < \xi_2) = \int\limits_0^T F_1 dF_2, \qquad P(\xi_2 < \xi_1) = \int\limits_0^T F_2 dF_1.$$

Значит,

$$2P(\xi_1 < \xi_2) - 1 = P(\xi_1 < \xi_2) - P(\xi_2 < \xi_1) = \int\limits_0^T F_1 dF_2 - F_2 dF_1.$$

По формуле Стокса это есть площадь области, ограниченной отрезком $[(0,0),\,(1,1)]$ и кривой $\{(F_1(t), F_2(t) \,|\, t \in [0,\,T]\}$. Функции F_1, F_2 монотонны, это соответствует неотрицательным управлениям $u_1 = \dot{F}_1$, $u_2 = \dot{F}_2$.

Пример

Г. Абельс и Э. Б. Винберг точно описали множество $\mathcal{B}$ в случае $r = 3$.
В частности, пусть $P(\xi_1 < \xi_2) = P(\xi_2 < \xi_3) = \frac{3}{5}$, тогда ясно, что

$$P(\xi_1 < \xi_3) \geqslant \frac{1}{5}.$$

Но описание множества $\mathcal{B}$ дает точную неулучшаемую оценку

$$P(\xi_1 < \xi_3) \geqslant \frac{1}{3}.$$

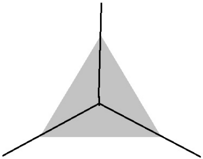
Задача быстродействия

Рассмотрим задачу быстродействия

$$
\begin{array}{ll}
(x, y) \in \mathrm{Lip}\,([0, T], G), & \\
x(0) = 0, & x(T) = x^1, \\
y(0) = 0, & y(T) = y^1, \\
\dot{x}_i = u_i, & i = 1, \dots, r, \\
\dot{y}_{ij} = x_i u_j - x_j u_i, & i < j, \\
(u_1, \dots, u_r) \in L^\infty([0, T], U), & T \to \min,
\end{array}
$$

с управлением в симплексе

$$U = \{(u_1, \dots, u_r) \mid u_1 + \dots + u_r = 1,\ u_1, \dots, u_r \geqslant 0\}.$$

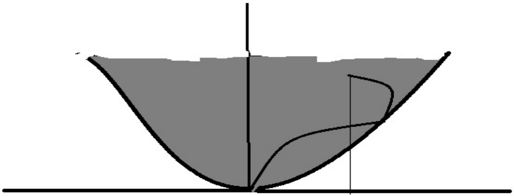


Граница множества достижимости

Предложение

Допустимая траектория приходит на границу множества достижимости тогда и только тогда, когда она является оптимальной для задачи быстродействия на пространстве $G/\mathbb{R}(1,\dots,1)^T$ *(редуцированная задача).*

Действительно, расстояние от точки допустимой траектории до плоскости $x_1 + \cdots + x_r = 1$ пропорционально времени.



Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим семейство функций T^*G:

$$H_u(\lambda) = u_1 h_1(\lambda) + \cdots + u_r h_r(\lambda), \;\; h_i(\lambda) = \langle X_i, \, \lambda \rangle, \;\; \lambda \in T^*G.$$

Теорема

Если $(\tilde{x}, \tilde{y})$ *и* $\tilde{u}$ *— оптимальный процесс, то существуют кривая* $\lambda \in \mathrm{Lip}\,([0, T], T^*G)$, $\pi(\lambda(t)) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ *и число* $\nu \in \{0, 1\}$ *такие, что для п.в.* $t \in [0, T]$ *выполнено*

$$\begin{array}{ll} \dot{\lambda}(t) = \vec{H}_{\tilde{u}(t)}(\lambda(t)), & \lambda(t) \neq 0, \\ H_{\tilde{u}(t)}(\lambda(t)) = \max\limits_{u \in U} H_u(\lambda(t)), & H_{\tilde{u}(t)}(\lambda(t)) \equiv \nu, \end{array}$$

где $\pi : T^*G \to G$ *— естественная проекция, а* $\vec{H}$ *есть гамильтоново векторное поле с гамильтонианом* H.

Если $\nu = 0$, то $u = 0$ и соответствующая экстремальная траектория постоянна (точка $(0, 0)$).

Сопряженная подсистема

Пусть $Y_{ij} = [X_i, X_j]$ и $h_{ij} = \langle Y_{ij}, \cdot \rangle$.
Сопряженная подсистема

$$\dot{h}(t) = R\tilde{u}(t), \qquad \dot{R} = 0,$$

где $h = (h_1, \dots, h_r)^T$, а $R = (h_{ij})$ — кососимметрическая матрица.
Траектории сопряженной подсистемы $h(\,\cdot\,)$ лежат на границе квадранта

$$Q = \{(h_1, \dots, h_r)^T \in (\mathbb{R}^r)^* \mid h_1, \dots, h_r \leqslant 1\},$$

двойственного симплексу U.
В случае $r = 3$ имеется первый интеграл

$$C = h_1 h_{23} + h_2 h_{31} + h_3 h_{12}.$$

Типы экстремальных траекторий

Обозначим через $F_i = Q \cup \{h_i = 1\}$ грань квадранта. Ребра

$$E_{ij} = F_i \cap F_j, \qquad E = E_{12} \cup E_{23} \cup E_{31},$$

и $V = (1,1,1)^T$ — вершина.
Пусть $h : [0, T] \to (\mathbb{R}^3)^*$ — траектория сопряженной подсистемы, соответствующая экстремали $\lambda : [0, T] \to T^*G$.

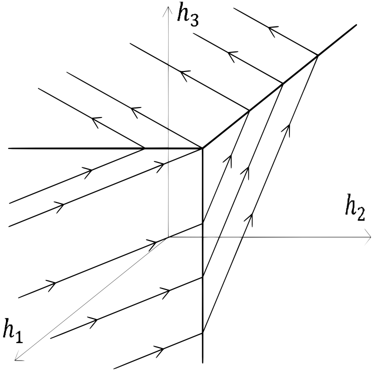
Предложение

Экстремали могут быть трех типов:
(1) *релейные, т.е.*

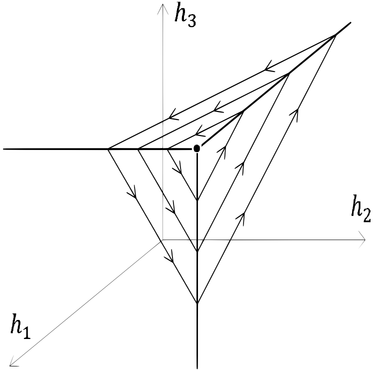
$$\operatorname{card}\{t \in [0, T] \mid h(t) \in E\} < \infty;$$

(2) *особые, т.е.* $h(t) \in E_i$ *для некоторого* $i = 1, 2, 3$ *или* $h(t) \in V$;
(3) *смешанные, т.е. объединения конечного числа особых и релейных дуг.*

Релейные траектории и одна особая

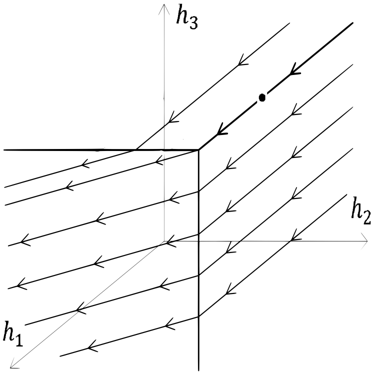


1 или 2 переключения

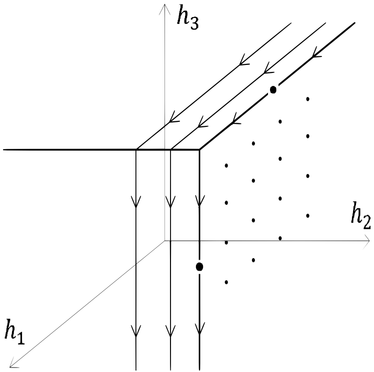


периодическое управление

Особые траектории



объединение особой и релейной дуг



объединение двух особых дуг

План действий

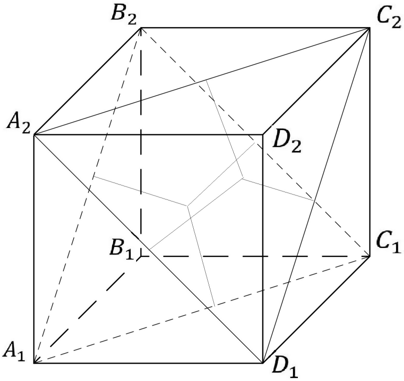
Для траекторий всех типов

- получить оценки на количество переключений;
- описать множества, которые заметают их концы;

Куб в пространстве (p, q, r), содержащий множество $\mathcal{B}$

Для точек множества $\mathcal{B}$ выполнено

$$1 \leqslant p + q + r \leqslant 2.$$



Релейные траектории

Предложение

(1) *Если на релейной траектории более 4 переключений, то она не оптимальна.*
(2) *Релейные траектории с 4 переключениями соответствуют квадратичным поверхностям вида* $p + qr = 1$ *или* $(1-p) + (1-q)(1-r) = 1$, *с учетом циклических перестановок переменных* $p = P(\xi_1 < \xi_2)$, $q = P(\xi_2 < \xi_3)$, $r = P(\xi_3 < \xi_1)$.

Доказательство предложения

(2) Для $e^{t_1 X_{i_1}} e^{t_2 X_{i_2}} \dots e^{t_n X_{i_n}} \in \mathcal{A}_1$ из закона умножения получим

$$\sum_{l \,|\, i_l = i} t_i = 1, \qquad p_{ij} = \sum_{l<m \,|\, i_l=i, i_m=j} t_l t_m.$$

В частности, для $e^{tX_1} e^{sX_2} e^{X_3} e^{(1-t)X_1} e^{(1-s)X_2}$ имеем

$$p = p_{12} = t + (1-t)(1-s), \;\; q = p_{23} = s, \;\; r = p_{31} = 1-t,$$

so, $p + qr = 1$.

Условия оптимальности второго порядка

Теорема (А. А. Аграчев, Р. В. Гамкрелидзе)

Пусть $q(\cdot)$ *— экстремальная траектория,* $u(\cdot)$ *— экстремальное управления, а* $\lambda(\cdot)$ *— соответствующая строго нормальная экстремаль. Пусть* $u(t) = u^i$ *при* $t \in (t_i, t_{i+1})$*, где* $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = T$*, пусть* V_i *— скорости, отвечающие управлениям* u^i*. Определим рекурсивно операторы:* $P_0 = P_1 = \mathrm{id}$, $P_i = P_{i-1} \circ e^{(t_i - t_{i-1})\,\mathrm{ad}\, V_{i-1}}$, $i = 2, \dots, k$ *и векторные поля* $Z_i = P_i V_i$*. Если квадратичная форма*

$$G(\alpha) = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant k} \alpha_i \alpha_j \langle \lambda(t_1), [Z_i, Z_j](q(t_1)) \rangle$$

не является отрицательно полуопределенной на пространстве $W = \{(\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0,\ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i Z_i(q(t_1)) = 0\}$*, то траектория* $q(\cdot)$ *не оптимальна.*

Доказательство предложения

(1) Пусть имеется 5 переключений.

$$\begin{aligned} V_0 &= X_1, & V_1 &= X_2, & V_2 &= X_3, \\ V_3 &= X_1, & V_4 &= X_2, & V_5 &= X_3 \end{aligned}$$

и $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, 5$. Тогда

$$\begin{gathered} Z_0 = X_1, \qquad Z_1 = X_2, \qquad Z_2 = X_3 + \tau_2 Y_{23}, \\ Z_3 = X_1 - \tau_2 Y_{12} - \tau_3 Y_{13}, \qquad Z_4 = X_2 - \tau_3 Y_{23} + \tau_4 Y_{12}, \\ Z_5 = X_3 + (\tau_2 + \tau_5) Y_{23} + \tau_4 Y_{13}. \end{gathered}$$

Важно, что $\tau_5 = \tau_2$, тогда

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -\tfrac{\tau_4}{\tau_3}\alpha_5, & \alpha_1 &= -\tfrac{\tau_2}{\tau_3}\alpha_5, & \alpha_2 &= -\alpha_5, \\ \alpha_3 &= \tfrac{\tau_4}{\tau_3}\alpha_5, & \alpha_4 &= \tfrac{\tau_2}{\tau_3}\alpha_5, & \alpha_5 &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Доказательство предложения

Квадратичная форма

$$G(\alpha) = \frac{2\tau_2\tau_4}{\tau_3}\left(\frac{h_{12}}{\tau_3} + \frac{h_{23}}{\tau_4} - \frac{h_{31}}{\tau_2}\right)\alpha_5^2.$$

Так как мы имеем треугольник в сечении Q, то коэффициенты C положительны $h_{12}, h_{23}, h_{31} > 0$. Вычислим

$$\tau_2 = \frac{K}{h_{12}h_{23}}, \qquad \tau_3 = \frac{K}{h_{23}h_{31}}, \qquad \tau_4 = \frac{K}{h_{31}h_{12}},$$

где $K = h_{12} + h_{23} + h_{31} - C > 0$. Тогда знак $G(\alpha)$ равен знаку $h_{12}h_{23}h_{31} + h_{23}h_{31}h_{12} - h_{31}h_{12}h_{23} = 2h_{12}h_{23}h_{31} > 0$. Таким образом, квадратичная форма G положительно определена на W.

Смешанные траектории

Предложение

Концы смешанных траекторий, являющихся объединением особой дуги соответствующей ребру квадранта Q и релейной траектории, заметают ребра множества $\mathcal{B}$.

Предложение

Концы смешанных траекторий, являющихся объединением особых траекторий, соответствующих двум ребрам квадранта Q, заметают треугольные грани $A_1A_2B_2$, $B_2C_2C_1$ и $C_1D_1A_1$ множества $\mathcal{B}$.

Основной результат

Теорема

(1) *Множество достижимости* $\mathcal{A}$ *для свободной двухступенной группы Карно ранга 3 получается применением к множеству* $\mathcal{A}_1 = 2\mathcal{B} - (1, \ldots, 1)^T$ *всех неоднородных растяжений и взятием замыкания.*

(2) *Множество* $\mathcal{B}$ *есть криволинейный многогранник, вырезанный из куба* $[0, 1]^3$ *с помощью поверхностей вида*

$$p + qr = 1, \qquad (1 - p) + (1 - q)(1 - r) = 1$$

с учетом циклических перестановок переменных p, q, r.

(3) *Вершины, ребра и грани множества* $\mathcal{B}$ *соответствуют экстремальным траекториям с не более, чем 2, 3 и 4 переключениями.*

Случай ранга 4

Теорема

Граница множества достижимости при $r = 4$ *заметается концами экстремальных траекторий с не более, чем 8 переключений управления.*

Дякую за увагу!