Асимптотика множеств достижимости

А. И. Овсеевич

Геометрические методы в теории оптимального управления

23 апреля 2014

План

- Постановка задачи
- Примеры
- Понятие формы
- Основной результат: Принцип расщепления
- Методы доказательства
- Другие ограничения на управление
- Неавтономный случай?

Постановка задачи

Рассмотрим линейную автономную управляемую систему

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x \in V = \mathbb{R}^n,\ u \in U \subset \mathbb{R}^m,\ x(0) = 0, \qquad (1)$$

для которой выполнено условие управляемости Калмана, а $U = -U$ — выпуклое тело. При $T > 0$ множество достижимости

$$\mathcal{D}(T) = \int_0^T e^{A(T-t)} BU dt = \bigcup_u \int_0^T e^{A(T-t)} Bu(t) dt \qquad (2)$$

— выпуклое тело. Мы хотим изучить асимптотическое поведение $\mathcal{D}(T)$ при $T \to 0, \infty$. Эти множества монотонно растут, по некоторым направлениям до бесконечности, но можно взглянуть на них через "телескоп"(микроскоп), который сильно уменьшает (увеличивает) по некоторым направлениям и увидеть "форму".

Феномен: для любой системы (1) существует предел форм $\lim\limits_{T\to\infty} \mathrm{Sh}\,\mathcal{D}(T)$ и $\lim\limits_{T\to 0} \mathrm{Sh}\,\mathcal{D}(T)$.

Примеры

1. Рассмотрим систему (1), где $A = 0$, $B = 1$, а U — единичный шар B_1 в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$. Тогда $\mathcal{D}(T) = TB_1$ имеет форму шара для любых времен.
2. Пусть A — строго устойчивая матрица, тогда существует $\lim\limits_{T\to\infty} \mathcal{D}(T) = \int_0^\infty e^{At}BUdt$ и "телескоп" не нужен.
3. Пусть A — строго неустойчивая матрица, тогда
$$e^{-AT}\mathcal{D}(T) = \int_0^T e^{-At}BUdt$$
и интеграл $\int_0^\infty e^{-At}BUdt$ сходится. Роль "телескопа" выполняет матрица e^{-AT}
4. Для маятника $\ddot{x} + \omega^2 x = u$, $|u| \leq 1$ имеем $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathcal{D}(T) = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \leq \frac{2}{\pi^2}\}$ Роль "телескопа" выполняет умножение на $\frac{1}{T}$

Примеры

5. Рассмотрим скалярную систему $x^{(n)} = u$, $|u| \le 1$. В координатах $x_i = x^{(i-1)}$ система имеет вид

$$\dot{x}_i = x_{i+1},\ i \le n-1,\ \dot{x}_n = u,\ |u| \le 1.$$

Для любого $T > 0$ определено преобразование системы $\delta(T) : x(t) \mapsto x_T(t) = T^{-n}x(Tt), \quad u(t) \mapsto u(Tt)$. Во введенных координатах $\delta(T) = \mathrm{diag}(T^{-n}, T^{1-n}, \ldots, T^{-1})$. Взаимная однозначность соответствия $x \mapsto x_T$ доказывает, что

$$\delta(T)\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(1),$$

так что формы множеств достижимости $\mathcal{D}(T)$ не зависят от T. “Телескоп(микроскоп)” действует умножением на матрицу $\delta(T)$.

Пространство форм

Формой $\operatorname{Sh} M$ подмножества $M \subset V$ будем называть совокупность gM, $g \in \mathrm{GL}(V)$. Нас интересуют центрально-симметричные выпуклые тела M — элементы пространства $\mathbb{B}$ центрально-симметричных выпуклых тел. Они находятся во взаимно однозначном соответствии с банаховыми нормами на V, а их формы — элементы $\mathbb{S} = \mathbb{B}/\,\mathrm{GL}(V)$ (компакт Минковского), с классами линейного изоморфизма соответствующих банаховых пространств. Естественная метрика в $\mathbb{B}$ задается формулой Банаха – Мазура

$$\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \log(t(\Omega_1, \Omega_2)t(\Omega_2, \Omega_1)),\ t(\Omega_1, \Omega_2) = \inf\{t \geq 1 : t\Omega_1 \supset \Omega_2\}.$$

Метрика БМ инвариантна относительно $\mathrm{GL}(V)$, а факторпространство $\mathbb{S}$ — метрический компакт.

Пространство форм: модификация

Опустим условие центральной симметричности $\Omega = -\Omega$ выпуклых тел. Определим группу $H = V \rtimes \mathbb{R}_+^\times$ — полупрямое произведение аддитивной группы V на группу гомотетий $\mathbb{R}_+^\times$ пространства V. Для любых двух выпуклых тел Ω_1, Ω_2 найдется такой элемент $h \in H$, что $h\Omega_1 \supset \Omega_2$. В центрально симметричном случае для этого достаточно одной группы $\mathbb{R}_+^\times$. Пусть d — инвариантная метрика на H, например, метрика Лобачевского (в полупространстве Пуанкаре) с элементом длины $\frac{\sqrt{dx^2+dt^2}}{t}$, где $x \in V, t \in \mathbb{R}^\times$. Положим

$$\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \tau(\Omega_1, \Omega_2) + \tau(\Omega_2, \Omega_1)), \text{ где}$$
$$\tau(\Omega_1, \Omega_2) = \inf\{d(e, h) : h \in H,\ h\Omega_1 \supset \Omega_2\},$$

где $d(e, h)$ — расстояние между единицей $e = (0, 1)$ и h в группе H. В симметричном случае определение сводится к формуле БМ.

Пространство форм: продолжение

Сходимость областей достижимости $\mathcal{D}(T)$ и их форм $\mathrm{Sh}\,\mathcal{D}(T)$ понимается в смысле метрики БМ:

$$\Omega_1(T) \sim \Omega_2(T), \text{ если } \rho(\Omega_1(T), \Omega_2(T)) \to 0$$

и аналогично

$$\mathrm{Sh}\,\Omega_1(T) \sim \mathrm{Sh}\,\Omega_2(T), \text{ если } \rho(\mathrm{Sh}\,\Omega_1(T), \mathrm{Sh}\,\Omega_2(T)) \to 0.$$

Метрика Банаха – Мазура: пример

Множество $\mathcal{E}$ эллипсоидов $E = E(Q) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle Q^{-1}x, x\rangle \leq 1\}$ фиксированной площади на плоскости можно отождествить с множеством 2×2 симметрических положительно определенных матриц Q с определителем 1. Это двумерное гладкое многообразие с метрикой Банаха – Мазура.

Утверждение

Многообразие $\mathcal{E}$ является моделью плоскости Лобачевского. В этой модели прямая соединяющая эллипсы $E_i = E(Q_i)$, $i = 1, 2$, состоит из эллипсов вида $E(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)$, а отрезок $[E_1, E_2]$ этой прямой выделяется условиями $\lambda_i \geq 0$. Метрика Банаха – Мазура совпадает с метрикой Лобачевского.

Опорная функция

Если $\Omega \subset V = \mathbb{R}^n$, и $\xi \in V^*$ — двойственный вектор, то формула

$$H_\Omega(\xi) = \sup_{x \in \Omega} \langle x, \xi \rangle$$

задает опорную функцию Ω, которая однозначно определяет замыкание выпуклой оболочки. Сходимость выпуклых тел в смысле метрики Банаха – Мазура эквивалентна поточечной сходимости соответствующих равномерно ограниченных на сфере опорных функций.

Для опорной функции множества достижимости есть явная формула

$$H_{\mathcal{D}(T)}(\xi) = \int_0^T h(B^* e^{A^* t} \xi) dt, \; h = H_U, \tag{3}$$

примерно эквивалентная принципу максимума для задачи с терминальным функционалом $\langle x(T), \xi \rangle \to \max$

Расщепление динамической системы

Рассмотрим каноническое разложение матрицы системы (1)

$$A = A_+ \oplus A_0 \oplus A_- \tag{4}$$

на неустойчивую, нейтральную и устойчивую компоненты в зависимости от знака действительных частей ее собственных значений. Разложение (4) порождает спектральные проекторы P_i, $P_{ij} = P_i + P_j$ и подпространства $\mathbb{V}_i = P_i\mathbb{V}$, $\mathbb{V}_{ij} = P_{ij}\mathbb{V}$ вместе с разложением фазового пространства $\mathbb{V}$

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_+ \oplus \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_-.$$

Для каждого индекса $\alpha = i$ или ij получим новую динамическую систему в $\mathbb{V}_\alpha$

$$\dot{x}_\alpha(t) = A_\alpha x_\alpha(t) + B_\alpha u(t), \quad x_\alpha(0) = 0,\ u \in U \tag{5}$$

и множества достижимости $\mathcal{D}_\alpha(T) \subset \mathbb{V}_\alpha$.

Основной результат: $T \to 0$

Теорема 1

Формы $\operatorname{Sh} \mathcal{D}(T)$ имеют предел Sh_0 при $T \to 0$. Расстояние Б–М $\rho(\operatorname{Sh} \mathcal{D}(T), \operatorname{Sh}_0) = O(T)$.

Это означает, что имеется такое не зависящее от времени выпуклое тело Ω, и матричная функция $C(T)$, что выполнена асимптотическая формула

$$\mathcal{D}(T) \sim C(T)\Omega.$$

Расстояние Б–М между левой и правой частью формулы есть $O(T)$.

NB. Начальное множество $\mathcal{D}(0) = \{0\}$ не лежит в пространстве $\mathbb{B}$ симметричных выпуклых тел: расстояние Б–М между $\operatorname{Sh} \mathcal{D}(T)$ и $\operatorname{Sh} \mathcal{D}(0)$ равно ∞.

Основной результат: $T \to \infty$

Теорема 2

Существует предельные формы $\omega = \lim\limits_{T\to\infty} \operatorname{Sh} D(T)$ и $\omega_\alpha = \lim\limits_{T\to\infty} \operatorname{Sh} D_\alpha(T)$, $\alpha = \pm, 0$, и выполнен принцип расщепления

$$\omega = \omega_+ \bigoplus \omega_0 \bigoplus \omega_- \tag{6}$$

Это означает, что имеются такие не зависящие от времени выпуклые тела $\Omega \subset \mathbb{V}$, $\Omega_\alpha \subset \mathbb{V}_\alpha$, и блочная матричная функция $C(T) = \operatorname{diag}(C(T)_+, C(T)_0, C(T)_-)$, что выполнены асимптотические формулы

$$\widetilde{\mathcal{D}}(T) := C(T)\mathcal{D}(T) \sim \Omega,\ \widetilde{\mathcal{D}}_\alpha(T) := C(T)_\alpha \mathcal{D}_\alpha(T) \sim \Omega_\alpha \tag{7}$$

$$\Omega = \bigoplus_\alpha \Omega_\alpha$$

$$\lim_{T\to\infty} H_{\widetilde{\mathcal{D}}(T)}(\xi) = \sum_\alpha \lim_{T\to\infty} H_{\widetilde{\mathcal{D}}_\alpha(T)}(\xi_\alpha) \tag{8}$$

Основной результат: пример

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = Ax + bu,\ x \in \mathbb{R}^{2n},\ |u| \le 1,\ u \in \mathbb{W} = \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{9}$$

где A — диагонализуемая матрица с чисто мнимым нерезонансным спектром, т.е.

$$\operatorname{Spec} A = \{\pm\sqrt{-1}\,\omega_j,\, j = 1, \dots, n\},\ \sum_{j=1}^{n} m_j\omega_j = 0,\ m_j \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0.$$

Предельная нормированная область достижимости $\Omega = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathcal{D}(T)$ описывается опорной функцией

$$H(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \left|\sum |\xi_i| \cos\phi_i\right| d\phi_1 \dots d\phi_n = \tag{10}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(1 - \prod_{k=1}^{n} J_0(|\xi_k|\rho)\right) \frac{d\rho}{\rho^2},\ \xi \in \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n*} \tag{11}$$

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{ix\cos\phi}\, d\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Ω не зависит ни от матрицы A ни от вектора b.

Основной результат: матричные множители

Рассмотрим разложение Жордана нейтральной компоненты матрицы системы A:

$$A_0 = D + N, \quad DN = ND, \tag{12}$$

где D — диагонализуемая, N — нильпотентная матрицы. Существует такая вещественная матрица $F = F(T) = F(N, T)$, что

$$FNF^{-1} = T^{-1}N, \quad FD = DF \text{ и } F(T) = F_\infty + O(\frac{1}{T}). \tag{13}$$

Если

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ то } F = \begin{pmatrix} T^{-(n-1)} & & & 0 \\ & T^{-(n-2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_+(T) = e^{-A_+T}, \quad C_0(T) = T^{-1}F(T), \quad C_-(T) = 1 \tag{14}$$

Матричные множители: Теорема Джекобсона – Морозова

Аналоги соотношений (12), (13) верны внутри любой редуктивной группы Ли G: Теорема Джекобсона – Морозова утверждает, что если $N \in \mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$ — нильпотентный элемент, то он вкладывается в подалгебру $\mathrm{sl}_2 \subset \mathfrak{g}$ как канонический элемент $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{sl}_2$. Тогда элемент F реализуется как элемент $\begin{pmatrix} T^{-1/2} & 0 \\ 0 & T^{1/2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2$. Это позволяет уточнить основной результат используя более общее понятие формы, в котором множества имеют одну форму, если переводятся друг в друга преобразованием из редуктивной группы G, такой что $A \in \mathfrak{g}$ вместо $\mathrm{GL}(V)$.

Доказательство: опорная функция

Рассмотрим нормированное множество достижимости:

$$\widetilde{\mathcal{D}}(T) = C(T)\mathcal{D}(T),$$

где матрица $C(T)$ определена в (7), (14). Опорная функция нормированного множества $\widetilde{\mathcal{D}}(T)$ связана с опорной функцией множества достижимости $\mathcal{D}(T)$ соотношением

$$H_{\widetilde{\mathcal{D}}(T)}(\xi) = H_{\mathcal{D}(T)}(C^*(T)\xi)$$

и определяется по формуле:

$$H_{\widetilde{\mathcal{D}}(T)}(\xi) = \int_0^T h(B^* f_T(t))dt,\ h = H_U \tag{15}$$

$$f_T = f_{+T} + f_{0T} + f_{-T}, \quad f_{\alpha T}(t) = e^{A_\alpha^*(T-t)} C_\alpha^*(T)\xi_\alpha$$

$\xi = \xi_+ \oplus \xi_0 \oplus \xi_-$ — каноническое разложение вектора $\xi \in \mathbb{V}^*$.

Доказательство: разбиение интервала интегрирования

Разобьем интервал $\mathcal{I} = [0, T]$ на три подинтервала

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_+ \cup \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_- := [0, \varepsilon\, T] \cup [\varepsilon\, T, (1-\varepsilon)\, T] \cup [(1-\varepsilon)\, T, T]$$

где $\varepsilon = T^{-1/2}$ и изучим интегралы

$$\int_{\mathcal{I}_\alpha} h(B^* f_T(t))dt, \int_{\mathcal{I}_\beta} h(B^* f_{\alpha T}(t))dt, \ \alpha, \beta = \pm, 0.$$

Лемма 1

L_1-нормы $\int_{\mathcal{I}_\beta} |f_{\alpha T}(t)| dt$, где $\beta \neq \alpha$, стремятся к нулю при $T \to \infty$.

Лемма 2

Существует предел $H_{\Omega_\alpha}(\xi_\alpha) = \lim\limits_{T\to\infty} \int_{[0,T]} h(B^* f_{\alpha T}(t))dt$

Доказательство: леммы

Из формул (14), (15), (13) получаем

$$f_{+T}(t) = e^{-A_+^* t}\xi_+, \quad f_{-T}(t) = e^{A_-^*(T-t)}\xi_-$$

$$f_{0T}(t) = \frac{1}{T}e^{A_0^*(T-t)}F(T)^*\xi_0 = \frac{1}{T}F(T)^*e^{D^*(T-t)}e^{N^*\frac{T-t}{T}}\xi_0. \quad (16)$$

Очевидно, что $f_{\pm T}(t)$ — экспоненциально малая функция вне интервала $\mathcal{I}_\pm$, величина $e^{D^*(T-t)}e^{N^*\frac{T-t}{T}}\xi_0$ ограничена, а длина интервала $\mathcal{I}_\pm$ равна εT, следовательно $\int_{\mathcal{I}_\pm}|f_{0T}(t)|dt = O(\varepsilon)$. Отсюда следует лемма 1. При $\alpha = \pm$ интегралы леммы 2 легко вычисляются:

$$\lim_{T\to\infty}\int_{[0,T]} h(B^*f_{\pm T}(t))dt = \int_0^\infty h\left(e^{\mp A_\pm t}\xi_\pm\right)dt. \quad (17)$$

Для вычисления

$$\frac{1}{T}\lim_{T\to\infty}\int_{[0,T]} h(B^*F(T)^*e^{D^*(T-t)}e^{N^*\frac{T-t}{T}}\xi_0)dt \quad (18)$$

нужно использовать теорию равномерного распределения для прямолинейной обмотки тора.

Доказательство: равномерное распределение

Определим тор $\mathcal{T}$ как замыкание множества матриц e^{Dt}, $t \in \mathbb{R}$. Интеграл (18) после замены $t \mapsto T - t$ имеет вид

$$\frac{1}{T}\int_{[0,T]} \phi(\mathbf{t},\tau)dt + O\left(\frac{1}{T}\right) \quad \text{при } T \to \infty, \tag{19}$$

где $\phi(\mathbf{t},\tau) = h(B^* F_\infty^* \mathbf{t}^* e^{N^*\tau}\xi_0)$ — непрерывная функция на произведении тора $\mathcal{T} = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$ на отрезок $J = [0,1]$, $\mathbf{t} = e^{Dt}$, $\tau = t/T$. Теория Г. Вейля равномерного распределения показывает, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{[0,T]} \phi(\mathbf{t},\tau)dt = \int_{\mathcal{T}\times J} \phi(\mathbf{t},\tau)d\mathbf{t}d\tau, \tag{20}$$

где $d\mathbf{t}$ — мера Хаара, в которой $\mathcal{T}$ имеет единичный объем. Тем самым леммы 1, 2 установлены.

Следствие 1

Существует предел
$H_\Omega(\xi) = \lim_{T\to\infty} \int_{[0,T]} h(B^* f_T(t))dt = \sum_\alpha H_{\Omega_\alpha}(\xi_\alpha)$

В самом деле, $|h(B^* f_T) - h(B^* f_{\alpha T})| \leq h(B^* f_{\beta T}) + h(B^* f_{\gamma T})$, а потому, согласно лемме 1,

$$\left| \int_{[0,T]} h(B^* f_T(t))dt - \sum_\alpha \int_{[0,T]} h(B^* f_{\alpha T}(t))dt \right| \leq$$
$$C \sum_{\alpha\neq\beta} \int_{\mathcal{I}_\alpha} |f_{\beta T}(t))|\, dt = o(1),$$

где $C = \|B\| \sup_{|\xi|=1} h(\xi)$, а интеграл $\int_{[0,T]} h(B^* f_{\alpha T}(t))dt$ стремится к $H_{\Omega_\alpha}(\xi_\alpha)$, согласно лемме 2.
Тем самым основной результат установлен.

Пусть в системе (1) $u(t)dt$ есть векторная мера со значениями в $\mathbb{W} = \mathbb{R}^m$, удовлетворяющая условию ограниченности полной массы

$$\mathfrak{M}(udt) = \int_0^T \|u(t)\|_U dt \leq 1. \tag{21}$$

$\|v\|_U$ есть банахова норма вектора $v \in \mathbb{W}$, для которой тело $U \subset \mathbb{W}$ является единичным шаром. Мера $\|u(t)\|_U dt$ задается формулой

$$\int_A \|u(t)\|_U dt = \sup \sum_n \left\| \int_{A_n} u(t)dt \right\|_U ,$$

где sup берется по всем счетным разложениям $A = \bigcup A_n$ в объединение непересекающихся борелевских подмножеств A_n.

Основной результат: импульсный случай

Теорема 3

Формы множества достижимости системы (1), (21) удовлетворяют асимптотическим равенствам:

$$\operatorname{Sh}\mathcal{D}(T) \sim \operatorname{Sh}\Omega(\mathbf{t}) \quad \text{при} \;\; T \to \infty, \tag{22}$$

где выпуклое тело $\Omega(\mathbf{t})$ представимо в виде соединения

$$\Omega(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}\Omega_{+0}) * \Omega_0 * \Omega_{-0} := \operatorname{conv}\left((\mathbf{t}\Omega_{+0}) \cup \Omega_0 \cup \Omega_{-0}\right). \tag{23}$$

Здесь $\mathbf{t} = e^{DT}$ есть элемент тора $\mathcal{T}$, Ω_α — не зависящие от времени выпуклые тела в пространствах V_α, $\alpha \in \{+0, 0, -0\}$

Таким образом, при $T \to \infty$ кривая $T \mapsto \operatorname{Sh}\mathcal{D}(T)$ приближается к прямолинейной обмотке тора.

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = Ax + bu, \ x \in \mathbb{R}^{2n}, \ u \in \mathbb{W} = \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R}^{2n},$$

где A — диагонализуемая матрица с чисто мнимым нерезонансным спектром, управление ограничено условием (21).
Предельная область достижимости $\Omega = \lim_{T\to\infty} \mathcal{D}(T)$ существует и имеет в подходящих координатах вид полидиска

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n; \ |z_i| \leq 1\}, \quad H_\Omega(\xi) = \sum |\xi_i|.$$

Литература

- Alexander Ovseevich, Asymptotic behavior of attainable and superattainable sets // Proceedings of the Conference on Modeling, Estimation and Filtering of Systems with Uncertainty, Sopron, Hungary, 1990, Birkhaüser, Basel, Switzerland. 1991. P. 324–333.
- Е.В. Гончарова, А.И. Овсеевич, Рождение формы множества достижимости, ДАН, 2013, том 452, №1, стр. 24-26
- А.И. Овсеевич, Структура аттрактора форм множеств достижимости, Функциональный анализ и его приложения, 2010, т. 44, №2, 74—81
- Е.В. Гончарова, А.И. Овсеевич, Сравнительный анализ асимптотической динамики множеств достижимости линейных систем, Изв. РАН ТиСУ, 2007, №3, 5 – 13